

UNIVERSIDAD METROPOLITANA DE EDUCACIÓN,

CIENCIA Y TECNOLOGÍA

Decreto Ejecutivo 575 del 21 de julio de 2004

Acreditada mediante Resolución N°15 del 31 de octubre de 2012

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

ESTRUCTURA DE LOS SABERES PREVIOS, ESTRATEGIAS METACOGNITIVAS Y TRANSFORMACIÓN SEMIÓTICA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ALGEBRAICOS

Abel Antonio Díaz Castellar

Director de Tesis: Oscar Olmedo Valverde Riascos

Panamá, febrero, 2022

REDIMECIT



UNIVERSIDAD METROPOLITANA DE EDUCACIÓN,

CIENCIA Y TECNOLOGÍA

Decreto Ejecutivo 575 del 21 de julio de 2004

Acreditada mediante Resolución N°15 del 31 de octubre de 2012

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

ESTRUCTURA DE LOS SABERES PREVIOS, ESTRATEGIAS METACOGNITIVAS Y TRANSFORMACIÓN SEMIÓTICA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ALGEBRAICOS

Trabajo presentado como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias de la Educación

Abel Antonio Díaz Castellar

Director de tesis: Oscar Olmedo Valverde Riascos

Panamá, febrero 20, 2022

REDIMEC IT

Dedicatoria

A Dios Jehová, por darme la perseverancia y disciplina que caracteriza un trabajo de tal envergadura y el apoyo emocional y psicológico que necesité durante esta travesía investigativa.

A mi padre, Helio Manuel Díaz Negrete, por haberme encaminado en esta maravillosa labor docente y a mi madre, porque gracias a ella tuve el apoyo integral que necesite para culminar este trabajo.

A todos los docentes y personas interesadas en la educación matemática, que desean mejorar sus prácticas pedagógicas.

RED-UNEFM

Agradecimiento

Agradezco de manera especial, por el apoyo brindado en todo el proceso investigativo de la tesis doctoral:

A Dios Jehova, en primer lugar, por ser la fuente de todo conocimiento y permitirme aprender muchas cosas nuevas, por iluminarme con ideas productivas.

Al doctor Oscar Valverde Riascos, por acompañarme durante este proceso de manera constante, cuya exigencia me motivo cada vez a ser mejor. Infinitas gracias por poner su vasto conocimiento a mi disposición. Sé que algo logré aprenderle. Le estaré eternamente agradecido.

A mis padres, Idalides Castellar Racine, Helio Manuel Díaz Negrete, mi hermana Idalis Teresa Diaz Castellar y Ana Paola Barreto Vergara, por apoyarme emocional y materialmente en este proceso de aprendizaje.

A los estudiantes de cada una de las seis instituciones educativas que participaron en la presente investigación, por brindar información valiosa de sus procesos de resolución de problemas algebraicos.

A la universidad Metropolitana de Educación, Ciencia y Tecnología UMECIT, por abrirme sus puertas al programa de formación de Doctorado en Ciencias de la Educación, luego de haberlo hecho en una ocasión anterior, con el programa de Maestría en Ciencias de la Educación, así como a los profesores que me orientaron en cada una de las asignaturas, personal administrativo y demás personal que colaboró, de forma directa o indirecta en que este sueño fuera posible…

A todos ustedes, mil y mil gracias.

REPOSITORIO UMECIT

Resumen

Esta investigación tuvo como objetivo analizar los saberes previos, las estrategias metacognitivas y la transformación semiótica en la resolución de problemas algebraicos. Se fundamentó en el Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, Teoría de los Campos Conceptuales y Registros de Representación Semiótica. Asimismo, utilizó el paradigma plurimetódico, con dominancia cuantitativa-cualitativa, enfoque empírico-analítico, interpretativo, de tipo y diseño analítico. Como conclusión, inductivamente se planteó un constructo denominado "esquema cognoscitivo", que asocia las marcas ostensivas con conceptos, mediante dos fuerzas mentales: racional y emocional. La primera incluye funciones semióticas con actividades de tipo procedimental y de tipo regulatorio. La segunda se refiere a la motivación, autoconfianza y se afecta mutuamente con las racionales. En cierto problema algebraico, las actividades procedimentales nacen por una sola asociación marca-concepto (objeto matemático, propiedad, relación numérica, algoritmo, sintaxis, experiencia); las regulatorias surgen si fallan las primeras, generando asociaciones intermedias, con la explicitación del contenido procedimental y su fragmentación semántica aislada y/o relacional, mediante el uso de los razonamientos hipotético-inductivo, hipotético-deductivo y creativo, cuya repetición genera en el esquema fenómenos de insight e intuición. Estas asociaciones conceptuales reconectan el esquema inicial, cuya nueva configuración soluciona el problema. Por tanto, se conjetura un número mínimo y clase de conceptos empíricos y/o racionales, de forma que todo el conocimiento humano podría expresarse, como las infinitas posibilidades combinatorias entre los conceptos axiomáticos. Así, dado que todo el conocimiento estaría ajustado a conceptos aprehensibles por los sentidos, ofrecería información más confiable sobre la estructura humana del aprendizaje, que sobre el objeto "externo"que pretende explicar. Lo anterior se constituye en un aporte a la investigación en la educación matemática, referente a la comprensión de los vacíos epistémicos y discontinuidades cognoscitivas en la transición de la aritmetica al álgebra.

Palabras clave: esquema cognoscitivo, actividades procedimentales, actividades regulatorias, asociaciones.

PREPRINT

Abstract

This research aimed to analyze previous knowledge, metacognitive strategies and semiotic transformation in solving algebraic problems. It was based on the Ontosemiotic Approach to mathematical cognition and instruction, Conceptual Field Theory and Semiotic Representation Registers. Likewise, it used the multi-method paradigm, with quantitative-qualitative dominance, empirical-analytical, interpretive, type and analytical design approach. In conclusion, a construct called "cognitive schema" was inductively proposed, which associates ostensive marks with concepts, through two mental forces: rational and emotional. The first includes semiotic functions with procedural and regulatory activities. The second refers to motivation, self-confidence and mutually affects the rational ones. In a certain algebraic problem, the procedural activities are born from a single brand-concept association (mathematical object, property, numerical relation, algorithm, syntax, experience); the regulatory ones arise if the first ones fail, generating intermediate associations, with the explanation of the procedural content and its isolated and/or relational semantic fragmentation, through the use of hypothetical-inductive, hypothetical-deductive and creative reasoning, whose repetition generates in the scheme phenomena of insight and intuition. These conceptual associations reconnect the initial schema, whose new configuration solves the problem. Therefore, a minimum number and class of empirical and/or rational concepts are conjectured, so that all human knowledge could be expressed, as the infinite combinatorial possibilities between axiomatic concepts. Thus, since all knowledge would be adjusted to concepts apprehensible by the senses, it would offer more reliable information about the human structure of learning than about the "external" object that it purports to explain. The foregoing constitutes a contribution to research in mathematics education, referring to the understanding of epistemic gaps and cognitive discontinuities in the transition from arithmetic to algebra.

Keywords: cognitive schema, procedural activities, regulatory activities, associations.

PREPRINT

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE GENERAL vii
ÍNDICE DE GRÁFICOS xii
ÍNDICE DE TABLAS xiv
ÍNDICE DE FIGURAS xvii
Introducción 1
CAPÍTULO I. CONTEXTUALIZACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA 7
1. Descripción de la problemática 8
1.1. Evidencias del problema en relación con los saberes previos 10
1.2. Evidencias del problema en relación con las estrategias metacognitivas 12
1.3. Evidencias del problema en relación con la transformación semiótica 14
1.3.1. Problema en el uso de la variable 15
1.3.2. Problema en el uso de símbolos u operadores 16
1.3.3. Problema en el uso de expresiones 17
1.3.4. Problema en el uso de estructuras 18
1.4. Limitaciones de algunos desarrollos teóricos en resolución de problemas 20
1.5. Evidencia del problema en estadísticas educativas nacionales 23
1.6. Evidencia del problema desde la percepción de los estudiantes 30
1.7. Evidencia del problema desde la percepción docente 32
1.8. Síntesis del problema, pronóstico y control del pronóstico 32
2. Formulación de la pregunta de investigación 39
3. Objetivos de la investigación 39
3.1. Objetivo general 39
3.2. Objetivos específicos 39
4. Justificación e impacto 40
5. Alcances y Limitaciones 43
5.1. Alcances 43
5.2. Limitaciones 46
CAPÍTULO II. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA DE LA INVESTIGACIÓN 48
1. Antecedentes históricos e investigativos 51
1.1. Antecedentes históricos 51
1.2. Antecedentes investigativos 59

PREPRINT

1.2.1. Antecedentes en la categoría Saberes previos 60
1.2.2. Antecedentes en la categoría Estrategias Metacognitivas 66
1.2.3. Antecedentes en la categoría Transformación Semiótica 77
2. Bases teóricas y conceptuales 89
2.1. De la Resolución de problemas: Importancia y algunas tendencias teóricas 90
2.1.1. Teorías psicológicas 90
2.2. La Resolución de problemas en el ámbito matemático 131
2.2.1. Evolución, desarrollo y estado actual 131
2.2.2. Naturaleza de los problemas 148
2.2.3 Enfoques en la resolución de problemas 155
2.2.4 Clasificación de los problemas 159
2.2.5 Factores que inciden en la resolución de problemas 161
2.2.6. Aspectos implicados en el aprendizaje de la resolución de problemas 162
2.3. Enfoque Ontosemiótico de la Cognición en la resolución de problemas 168
2.3.1. En el ámbito matemático 168
2.3.2. En el ámbito algebraico 191
2.3.3. Implicaciones del enfoque en los saberes previos, en las estrategias metacognitivas y transformación semiótica 196
3. Bases éticas y legales 203
3.1. Bases éticas 203
3.2. Bases legales 204
4. Sistema de categorías y su conceptualización 207
4.1. Definición conceptual 208
4.1.1. Saberes previos 208
4.1.2. Estrategias metacognitivas 222
4.1.3. Transformación semiótica 227
4.2. Definición operacional 236
4.2.1. Saberes previos 236
4.2.2. Estrategias metacognitivas 241
4.2.3. Transformación semiótica 252
5. Matriz de Variables / Categorías 259
CAPÍTULO III. FUNDAMENTACIÓN METODOLÓGICA DE LA INVESTIGACIÓN 261

PREPRINT

1. Naturaleza de la investigación 263
2. Tipo de investigación 265
3. Diseño de investigación 265
4. Población y Muestra 269
4.1. Población 269
4.2. Muestra 271
5. Técnicas e instrumentos de recolección de datos 274
5.1. Técnica e instrumentos cuantitativos 274
5.2. Técnica e instrumentos cualitativos 279
6. Criterios de calidad de los instrumentos 282
6.1. Confiabilidad, Validez y Objetividad de los instrumentos cuantitativos 282
6.2. Credibilidad, transferibilidad, dependencia y confirmabilidad de los instrumentos cualitativos 283
7. Técnica de análisis de los datos 283
7.1. Técnica de análisis por el método cuantitativo 284
7.2. Técnica de análisis por el método cualitativo 284
7.3. Triangulación concurrente por método 284
CAPÍTULO IV. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS 286
1. Aplicación de Tecnicas de Análisis de Datos Cuantitativos y Cualitativos 287
1.1. Procesamiento y Análisis de Datos Cuantitativos 287
1.2. Procesamiento y Análisis de Datos Cualitativos 288
2. Hallazgos de Datos Cuantitativos y Cualitativos 289
2.1. Hallazgos de Datos Cuantitativos 289
2.1.1. Saberes Previos 290
2.1.2. Estrategias Metacognitivas 310
2.1.3. Transformación Semiótica 334
2.1.4. Regresión lineal de las variables saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica 354
2.2. Hallazgos de Datos Cualitativos 360
2.2.1. Saberes Previos a Partir de Axiomas 360
2.2.2. Saberes Previos a Partir de Definiciones y Operaciones en R 369
2.2.3. Saberes Previos a Partir de la Noción Algebraica 373
2.2.4. Planeación de Las Estrategias Metacognitivas 385

2.2.5. Regulación en Las Estrategias Metacognitivas 391
2.2.6. Evaluación de Las Estrategias Metacognitivas 395
2.2.7. Transformación Semiótica: Nivel de Algebrización I 397
2.2.8. Transformación Semiótica: Nivel de Algebrización II 403
2.2.9. Transformación Semiótica: Nivel de Algebrización III 406
3. Triangulación De Hallazgos de Datos Cuantitativos y Cualitativos 411
4. Discusión de los Resultados y Contrastaciòn/Teorización 417
4.1. Discusión de los Resultados 417
4.1.1. Saberes previos 418
4.1.2. Estrategias metacognitivas 418
4.1.3. Transformación semiótica 420
4.2. Contrastación y Teorización de los resultados 421
4.2.1. Saberes previos 421
4.2.2. Estrategias metacognitivas 424
4.2.3. Transformación Semiótica 427
4.3. Síntesis De La Discusión y Contrastación Teórica 429
4.3.1. Reconstrucción conceptual de los esquemas cognoscitivos en la resolución de problemas algebraicos 430
CAPÍTULO V. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES 468
1. Conclusiones finales respecto al análisis de resultados por Variables o Categorías 469
1.1. Saberes previos 469
1.2. Estrategias metacognitivas 470
1.3. Transformación semiòtica 471
2. Triangulación de resultados, estado del arte y marco teórico 472
2.1. Saberes previos 472
2.2. Estrategias metacognitivas 472
2.3. Transformación semiótica 473
3. Constructo analítico derivado de los resultados y el estado del arte 474
4. Conclusiones finales de la investigación 475
5. Recomendaciones 478
Referencias bibliográficas 482
APÉNDICES 518
Apéndice No. 1. Matriz de rastreo bibliográfico de los antecedentes investigativos 518

Apéndice No. 2. Consentimiento informado a padres para recolección y tratamiento de datos investigativos 550
INSTRUMENTOS CUANTITATIVOS 552
Apéndice No. 3. Prueba tipo Likert sobre Saberes Previos 552
Apéndice No. 4. Prueba tipo Likert sobre Estrategias Metacognitivas 554
Apéndice No. 5. Prueba tipo Likert sobre Transformación Semiótica 555
INSTRUMENTOS CUALITATIVOS 558
Apéndice No. 6. Guión de Entrevista a grupos focales sobre Saberes Previos 558
Apéndice No. 7. Guión de Entrevista a grupos focales sobre Estrategias Metacognitivas 559
Apéndice No. 8. Guión de Entrevista a grupos focales sobre Transformación Semiótica 560
Apéndice No. 9. Coeficiente de validez de contenido del instrumento de saberes previos 561
Apéndice No. 10. Coeficiente de validez de contenido del instrumento de transformación semiòtica 561

RED-UNET

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1. Puntaje global y niveles de desempeño durante el cuatrienio 2014-2017. Institución Educativa María Auxiliadora 27
Gráfico 2. Puntaje global y niveles de desempeño durante el cuatrienio 2014-2017. Institución Educativa Agrícola de Urabá..... 28
Gráfico 3. Puntaje global y niveles de desempeño durante el cuatrienio 2014-2017. Institución Educativa Chigorodó 28
Gráfico 4. Puntaje global y niveles de desempeño durante el cuatrienio 2014-2017. Institución Educativa Los Andes..... 28
Gráfico 5. Puntaje global y niveles de desempeño durante el cuatrienio 2014-2017. Institución Educativa Gonzalo Mejía 29
Gráfico 6. Puntaje global y niveles de desempeño durante el cuatrienio 2014-2017. Institución Educativa Juan Evangelista Berrío..... 29
Gráfico 7. Comparación del número de estudiantes y su nivel de saberes previos..... 290
Gráfico 8. Porcentaje de estudiantes según el nivel de saberes previos 291
Gráfico 9.Comparación del número de estudiantes y su nivel en los axiomas y propiedades 300
Gráfico 10. Porcentaje de estudiantes, según su nivel en los axiomas y propiedades de R301
Gráfico 11. Comparación del número de estudiantes respecto al nivel de definiciones y operaciones en R..... 303
Gráfico 12. Porcentaje según el nivel de la subvariable definiciones y operaciones en R. 304
Gráfico 13. Comparación del número de estudiantes y su nivel en la subvariable nocion algebraica..... 307
Gráfico 14. Porcentaje de estudiantes según el nivel de la subvariable nociòn algebraica 308
Gráfico 15. Comparación del número de estudiantes por nivel de estrategias metacognitivas 310
Gráfico 16. Porcentaje de estudiantes según el nivel de estrategias metacognitivas 311
Gráfico 17. Comparación del número de estudiantes por nivel de la subvariable planeación 324
Gráfico 18. Porcentaje de estudiantes, según su nivel en la subvariable planeaciòn 324
Gráfico 19. Comparación del número de estudiantes por nivel en los axiomas y propiedades 327
Gráfico 20. Porcentaje de estudiantes, según su nivel en la subvariable regulaciòn..... 328
Gráfico 21. Comparación del número de estudiantes por nivel en la subvariable evaluaciòn 331
Gráfico 22. Porcentaje de estudiantes, según su nivel en la subvariable evaluaciòn 332
Gráfico 23. Comparación del número de estudiantes por nivel de la variable transformación semiòtica..... 334
Gráfico 24. Porcentaje de estudiantes, según su nivel en la variable transformación semiòtica..... 335
Gráfico 25. Comparación del número de estudiantes en la subvariable nivel de algebrizaciòn I 344

Gráfico 26. Porcentaje de estudiantes según su nivel de algebrizaciòn 344
Gráfico 27. Comparación del número de estudiantes en el nivel de algebrizaciòn II 347
Gráfico 28. Porcentaje de estudiantes según el nivel de algebrizaciòn III 348
Gráfico 29. Comparación del número de estudiantes por nivel en los axiomas y propiedades 351
Gráfico 30. Porcentaje de estudiantes según su nivel en los axiomas y propiedades en R 352

RED-UNEG

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Porcentaje de estudiantes en cada nivel de desempeño 23
Tabla 2. Descripción de los niveles de desempeño evaluados en la prueba PISA 23
Tabla 3. Descriptor cualitativo y cuantitativo en función de los niveles de desempeño 26
Tabla 4. Encuesta semiestructurada a estudiantes 30
Tabla 5. Tipos de castigo y refuerzo 103
Tabla 6. Diferentes acepciones de concepto de problema matemático 148
Tabla 7. Tipos de objetos matemáticos 176
Tabla 8. Aproximaciones conceptuales de los niveles de algebrización 193
Tabla 9. Normograma de bases legales 204
Tabla 10. Categorías y subcategorías de análisis 207
Tabla 11. Componentes esenciales de la noción algebraica 221
Tabla 12. Nivel intermedio de algebrización en la resolución de problemas algebraicos .. 234
Tabla 13. Matriz de Variables-Categorías 260
Tabla 14. Tamaño del subgrupo muestral por institución educativa 272
Tabla 15. Conformación de grupos focales por institución educativa 273
Tabla 16. Número de hombres y mujeres en los grupos focales 273
Tabla 17. Valoración cuantitativa de saberes previos por ítem 276
Tabla 18. Niveles de desempeño en saberes previos según la valoración total de ítems ... 276
Tabla 19. Valoración cuantitativa de estrategias metacognitivas por afirmación 277
Tabla 20. Niveles de desempeño en estrategias metacognitivas según la valoración total 277
Tabla 21. Valoración cuantitativa de transformación semiótica por ítem 278
Tabla 22. Niveles de desempeño en transformación semiótica según la valoración total .. 279
Tabla 23. Contextualización metodológica de los instrumentos 281
Tabla 24. Número de estudiantes segun el nivel de saberes previos 290
Tabla 25. Media y desviación típica de la variable saberes previos por ítem 292
Tabla 26. Media de la puntuación en la variable saberes previos por institución 293
Tabla 27. Analisis de varianza de la variable saberes previos 294
Tabla 28. Medida de KMO y Prueba de Bartlett de la variable saberes previos 295
Tabla 29. Comunalidades de la variable saberes previos, por ìtem 295
Tabla 30. Factores explicativos de la variable saberes previos 296
Tabla 31.Matriz de componente rotado de la variable saberes previos 297
Tabla 32.Número de estudiantes según su nivel en la subvariable axiomas y propiedades 299
Tabla 33. Media y desviación estándar de la subvariable axiomas y propiedades de R 301
Tabla 34. Anàlisis de varianza de la subvariable axiomas y propiedades de R 302
Tabla 35. Numero de estudiantes segùn el nivel de definiciones y operaciones en R 303
Tabla 36. Media de puntuación de la subvariable definiciones y operaciones en R 305
Tabla 37. Analisis de varianza de la subvariable definiciones y operaciones en R 306
Tabla 38. Número de estudiantes segun el nivel de la subvariable nociòn algebraica 306
Tabla 39. Media y desviación tìpica de puntuación en la subvariable noción algebraica .. 308
Tabla 40. Analisis de varianza de la subvariable noción algebraica 309

Tabla 41. Numero de estudiantes segun el nivel en la variable estrategias metacognitivas 310
Tabla 42. Media y desviación típica de la variable estrategias metacognitivas por ítem ... 312
Tabla 43. Media y desviación tìpica en la variable estrategias metacognitivas por institucion 314
Tabla 44. Analisis de varianza de la variable estrategias metacognitivas 315
Tabla 45. Medida de KMO y Prueba de Bartlett de la variable estrategias metacognitivas 316
Tabla 46. Comunalidades de la variable estrategias metacognitivas por ítem 316
Tabla 47. Factores explicativos de la variable estrategias metacognitivas 318
Tabla 48. Matriz de componente rotado de la variable estrategias metacognitivas 319
Tabla 49. Número de estudiantes según su nivel en la subvariable planeaciòn 323
Tabla 50. Media y desviación estándar de la subvariable planeación por institución 325
Tabla 51. Analisis de varianza de subvariable planeaciòn 326
Tabla 52. Número de estudiantes según su nivel en la subvariable regulación 327
Tabla 53. Media y desviación estándar de la subvariable regulación por institución 329
Tabla 54. Anàlisis de varianza de la subvariable regulaciòn 330
Tabla 55. Número de estudiantes según su nivel en la subvariable evaluaciòn 330
Tabla 56. Media y desviación estándar de la subvariable evaluación 332
Tabla 57. Anàlisis de varianza de la subvariable evaluación 333
Tabla 58. Número de estudiantes según su nivel en la variable transformación semiòtica 334
Tabla 59. Media y desviación estándar de la variable transformación semiòtica por ítem 336
Tabla 60. Media y desviación tìpica de la variable transformación semiòtica por institución 338
Tabla 61. Analisis de varianza de la variable transformación semiòtica 338
Tabla 62. Medida de KMO y Prueba de Bartlett de la variable transformación semiòtica 339
Tabla 63. Comunalidades de los ítems de la variable transformación semiótica 339
Tabla 64. Factores explicativos de la variable transformación semiòtica 340
Tabla 65. Matriz de componente rotado de la variable saberes previos 341
Tabla 66. Número de estudiantes en la subvariable nivel de algebrizaciòn I 343
Tabla 67. Media y desviación estándar de la subvariable nivel de algebrizaciòn I 345
Tabla 68. Anàlisis de varianza de la subvariable nivel de algebrizaciòn I 346
Tabla 69. Número de estudiantes según en la subvariable nivel de algebrizaciòn II 347
Tabla 70. Media y desviación estándar de la subvariable nivel de algebrizaciòn II 349
Tabla 71. Anàlisis de varianza de la subvariable nivel de algebrizaciòn II 350
Tabla 72. Número de estudiantes según su nivel de algebrizaciòn III 350
Tabla 73. Media y desviación estándar de la subvariable nivel de algebrización III 352
Tabla 74. Anàlisis de varianza de la subvariable nivel de algebrizaciòn III 353
Tabla 75. Correlaciones entre variables 354
Tabla 76. Ajuste de los modelos de regresión 355
Tabla 77. Anàlisis de varianza de los modelos de regresión lineal 357
Tabla 78. Coeficientes de los modelos de regresión lineal 357
Tabla 79. Variables excluidas de los modelos de regresión 358

Tabla 80. Diagnósticos de colinealidad en los modelos de regresión lineal 359
Tabla 81. Matriz de triangulación de la variable saberes previos 412
Tabla 82. Matriz de triangulación de la variable estrategias metacognitivas 414
Tabla 83. Matriz de triangulación de la variable transformación semiòtica 416
Tabla 84. Vacìos en el tratamiento y/o conversión de representaciones semiòticas 479

RED-UNEC

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Evidencia del problema en relación con los saberes previos 11
Figura 2. Evidencia del problema en la gestión de la variable 16
Figura 3. Evidencia del problema en relación con la interpretación de operadores 17
Figura 4. Evidencia del problema en la manipulación de estructuras 18
Figura 5. Generalidades del problema de investigación 34
Figura 6. Ruta cognoscitiva de la resolución 130
Figura 7. Relaciones semióticas binarias 199
Figura 8. Proceso de resolución de problemas algebraicos 202
Figura 9. Estructura específica del diseño analítico. 268
Figura 10. Estructura del proceso de triangulación 285
Figura 11. Conceptos centrales de la codificación selectiva 360
Figura 12. Codificaciòn axial de la variable saberes previos 362
Figura 13. Codificaciòn axial de la variable estrategias metacognitivas 386
Figura 14. Codificación axial de la variable transformación semiótica 399
Figura 15. Correspondencia entre objetos y sus represetaciones simbòlicas 438
Figura 17. Trazabilidad de la formación de un concepto 445
Figura 18. Estructura del estado mental de las experiencias 447
Figura 19. Generalizaciòn del esquema cognoscitivo de un sujeto 450
Figura 20. Linea cerrada sin denominación verbal o analìtica 452
Figura 21. Proceso de reconstrucción de sentido a partir de la fragmentación semántica . 461
Figura 22. Proceso de reconstrucción de sentido a partir de la interrelación semántica 462

REPOSITORIO

Introducción

Desde el comienzo de la historia de la humanidad, la resolución de problemas ha sido y es una actividad cotidiana de todo ser humano. De hecho, algunos autores la han denominado como la actividad cognitiva más importante de esta especie, toda vez que, de ella depende su supervivencia, calidad de vida y desarrollo científico-tecnológico (Escudero & Flores, 2016; Pupo, 2011; Pérez & Ramírez, 2011). Ahora bien, sobre las estrategias de resolución empleadas, gran parte de dichos problemas han sido modelados y resueltos gracias a las efectivas técnicas de razonamiento matemático que se han construido a lo largo de la historia.

No obstante, entre la formulación de un problema y la concreción de su solución existen un sinnúmero de aspectos que transitan entre ambos extremos por lo general, socialmente eclipsados por la sobrevalorada importancia de la solución para el sujeto resolutor, lo que hace que rápidamente olvide los aspectos intermedios que le permitieron el tránsito desde el problema hasta su solución, como herramienta para solucionar nuevos problemas (Schoenfeld, citado en Barrantes, 2006). Es de anotar que la manipulación consciente de dichos aspectos intermedios posee especial importancia en el área de la educación matemática, puesto que su propósito principal es enseñar a resolver problemas (Pupo, 2011).

Respecto a la clarificación y enseñanza del uso consciente de los aspectos intermedios que condicionan la resolución de problemas, cabe resaltar que ha sido un asunto de interés desde la antigüedad. En esa línea se puede incluir a filósofos, psicólogos, matemáticos y educadores. Por ejemplo, en el diálogo de Platón, se evidencia que Sócrates dirigió a un esclavo por medio de preguntas, mostrando un conjunto de estrategias, técnicas y contenido matemático, para que, por sí mismo, pudiera llegar a la solución de un problema (Alfonso & González, 2014).

Posteriormente, en la edad moderna, nuevamente, Sócrates aparece en la obra de René Descartes, quién señalaba los modelos del pensamiento productivo o consejos para aquellos que quisiesen resolver problemas con facilidad (Lazo, 2016). Además, el matemático Leonard Euler, al exponer muchos de sus resultados matemáticos, incluyó

reflexiones sobre las técnicas que utilizó, y por otro lado, se ocupó de la educación heurística de sus discípulos (Sigarreta, Rodríguez & Ruesga, 2006). Adicionalmente, entran en esta lista, personalidades de la edad contemporánea, como Henri Poincaré, Hadamard, Bloom, Mayer, los cuales tienen en común, la descripción del carácter psicológico de los factores implicados en la resolución de problemas (Campistrous, 2013).

Entonces, desde la época antigua, hasta la modernidad, se observa la clarificación gradual, desde un paradigma consistente en asumir factores netamente externos y disciplinares, hacia otro de carácter psicológico cognitivo, donde confluyen variables externas e internas; de los procesos y componentes que interaccionan durante la resolución de problemas. No obstante, el sistema educativo seguía asumiendo la resolución de problemas, a nivel educativo, como un aprendizaje natural del sujeto, luego de conocer o dominar ciertas técnicas, conceptos, procedimientos o algoritmos de resolución.

Sería en la edad contemporánea, a partir de los trabajos del matemático y educador George Polya en 1945, quien en sus obras, como: resolver problemas, Matemáticas y razonamiento plausible, y Descubrimiento matemático, prescribe una serie de subetapas para solucionar problemas, constituyéndose en un avance paradigmático respecto a las propuestas de los autores anteriores, debido a que es considerado el primer intento formal en explorar, desde una perspectiva educativa, los aspectos implicados en la resolución de problemas matemáticos, no como una construcción natural del sujeto, sino como un saber enseñable (Piñeiro, Pinto & Díaz, 2015).

Sin embargo, dado que la obra de Polya seguía siendo muy general, en el tratamiento de los aspectos implicados en la resolución, Schoenfeld (citado en Barrantes, 2006) exploró aspectos más específicos que condicionan la resolución de problemas, tales como recursos cognitivos, heurísticas, creencias, metacognición, incluso, la motivación y los tuvo en cuenta en la construcción de ambientes didácticos. Ahora bien, aunque la obra de Schoenfeld representó un gran avance en la exploración de los factores implicados en la resolución de problemas matemáticos, faltaba un enfoque que explicitara con más especificidad, cómo ocurren esos procesos en la práctica pedagógica y la forma en que pueden orientarse en situaciones didácticas específicas (Hoyles et al., 2012).

En ese contexto surge el Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, EOS, el cual, a través de los aspectos históricamente abordados y de otros enfoques teórico conceptuales similares, como la Teoría de los Campos Conceptuales, TCC; la Teoría de los Registros de Representación Semiótica, TRRS; entre otras teorías; introduce conceptos como plano personal, plano institucional, objetos, tipos de objetos matemáticos, representaciones, funciones semióticas, con el fin de caracterizar el proceso de aprendizaje de la matemática, que incluye la resolución de todo tipo de problemas matemáticos en el ámbito escolar, entre ellos, los algebraicos (Vergnaud, 2016; Duval, 2016; Godino, 2012).

Si bien, estos esfuerzos son notables y han contribuido al mejoramiento progresivo de la educación matemática, Tortosa (citado en Orama & Guzmán 2019) señala que aun "queda mucho por sistematizar y profundizar al respecto, y un ejemplo de ello es que no existe aún una caracterización universalmente aceptada de los términos problema y resolución de problemas"(p.15). De hecho, el mismo Godino, autor del EOS, menciona que hace falta explorar de manera más específica, factores como los conocimientos previos o "plano personal e institucional, las estrategias metacognitivas utilizadas por el estudiante y las transformaciones semióticas, que sufren los objetos matemáticos durante el proceso de resolución" (Godino, 2012, p.19).

Además, en la actualidad, el proceso de enseñanza de la matemática deja insatisfechos a docentes y estudiantes, precisamente por la escasa habilidad de los últimos para resolver problemas, producto de un constructo curricular, sin la suficiente exploración didáctica de los objetos implicados. Esto hace pertinente explorar dichos objetos, compuestos por aspectos intrínsecos y extrínsecos al sujeto resolutor, tales como, saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica, en la resolución de problemas matemáticos, en este caso, algebraicos.

Por lo anterior, el objetivo medular de esta investigación es analizar los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica, en la resolución de problemas algebraicos. Para ello, se escogió una población compuesta por los estudiantes de grado octavo de seis instituciones educativas urbanas del municipio de Chigorodó, de

donde se extrajo una muestra representativa de estudiantes con un rango etario entre 13 y 15 años.

Respecto al paradigma filosófico que subyace el presente trabajo de investigación, se concibe una posición ecléctica sobre el origen del conocimiento, estructurada con posturas empiristas, racionalistas, realistas y pragmatistas, dentro de la escuela de la cognición y aprendizaje matemático, en el plano socioepistémico. Así, este estudio se desarrolla según la metodología plurimetódica con enfoque mixto y dominancia cuantitativa cualitativa. En relación con el aspecto cuantitativo, su finalidad es descriptiva-analítica, dado que se procesan los datos obtenidos de las categorías de análisis, esto es, saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica en la resolución problemas algebraicos, a través del análisis documental en relación con dichos factores que influyen en el proceso de aprendizaje de la resolución de problemas. Asimismo, desde el aspecto cualitativo, es descriptivo comprensivo, ya que dicho constructo posee ajustes y complementos teórico conceptuales, luego de la recolección de datos durante la práctica pedagógica en contexto.

Adicionalmente, se propone una relación sujeto objeto dependiente e independiente. En primera instancia es independiente, porque se realiza una exploración general de las categorías de análisis desde la literatura. En segunda instancia, es dependiente, porque dicho constructo es susceptible a los cambios que sea necesario, tras analizar las evidencias durante su implementación didáctica con los estudiantes. Asimismo, como referente teórico central, se toma el Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, por describir, de manera relativamente específica, los procesos implicados en la práctica matemática de la resolución de problemas algebraicos.

Por último, la presente investigación se estructuró con los siguientes capítulos: capítulo I, correspondiente a la Contextualización de la problemática; el capítulo II, correspondiente a la Fundamentación Teórica de la Investigación; el capítulo III, correspondiente a la Fundamentación Metodológica de la Investigación.

En el capítulo I, Contextualización de la problemática, se realiza un proceso de análisis de la literatura y de información del contexto, para encontrar que, en la educación matemática, existe una problemática asociada a la falta de clarificación de los saberes

previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica, en la resolución de problemas algebraicos. Además, en este capítulo se menciona el pronóstico, control del pronóstico, la pregunta de investigación y los objetivos, de manera coherente con la problemática encontrada. Asimismo, se presenta la justificación, en la que se describen los aportes sociales, teóricos y metodológicos implicados en el cumplimiento de los objetivos trazados. Por último, se presentan los alcances y limitaciones de la presente investigación.

En el capítulo II, Fundamentación Teorica de la Investigación, se presentan los antecedentes históricos e investigativos, desde la trazabilidad histórica de la caracterización de los aspectos que influyen en el proceso de resolución y las contribuciones realizadas en diferentes épocas de la historia humana. Por otro lado, se describen los aportes de principales investigaciones de los últimos diez años, clasificados por ubicación geográfica y por categorías de análisis. Además, se presentan las bases teóricas, conceptuales, éticas y legales, donde se exponen los desarrollos de las teorías generales, teorías sustantivas, los aspectos operativos que pueden afectar a los implicados y la forma de mitigarlos, así como un normograma, que contiene los fundamentos legales, desde el ámbito internacional, hasta el institucional. Por último, se expone la definición conceptual y operacional de las categorías de análisis y su respectiva matriz de análisis.

En el capítulo III, Fundamentación Metodológica de la Investigación, se explica que el paradigma de esta investigación es plurimetódico, con dominancia cuantitativa-cualitativa y el enfoque es empírico-analítico, interpretativo. Asimismo, se indica que el tipo de investigación es exploratorio, descriptivo-comprensivo, con un diseño metodológico que describe la trazabilidad de procedimientos, desde la elección del paradigma hasta el proceso de triangulación, por método, de los resultados obtenidos. Además, se describe la población objeto de estudio, los criterios de inclusión y exclusión de integrantes de la misma, así como los criterios para la conformación de la muestra y submuestra. Por último, se evidencian las técnicas e instrumentos de recolección de la información, los criterios de validez y confiabilidad, credibilidad y transferibilidad de los mismos, así como las técnicas de análisis utilizadas para el procesamiento de datos cuantitativos y cualitativos.

En el capítulo IV, Análisis e Interpretación de los resultados, se presentan los resultados obtenidos, tanto por el método cuantitativo, como por el método cualitativo. En

el primero se presentan información procesada mediante las técnicas estadísticas descriptivas e inferenciales, correspondiente a tablas y gráficos, con su respectiva interpretación y análisis, para cada variable y subvariable de investigación. En el segundo, se muestran las redes taxonómicas, con el eje temático, categorías, subcategorías y categorías inductivas, producto del procesamiento de datos, con su respectiva interpretación y análisis. Adicionalmente, se presenta la triangulación de resultados o hallazgos de cada variable, por método, con base en las semejanzas, diferencias/complementos y variables extrañas o intervinientes. Por último, se presenta la discusión y contrastación teórica de los resultados, por variable, en la que se muestra la implicación del análisis cuantitativo y cualitativo en las investigaciones y teorías precedentes, así como una reconstrucción analítica derivada de los resultados, como aporte teórico.

Por último, en el capítulo V, en primer lugar, se presentan las conclusiones generales por variables y categorías de análisis. En segundo lugar, se exponen los aspectos concluyentes de la triangulación de resultados, en relación con el estado del arte y el marco teórico, desde cada una de las variables y categorías de análisis, así como el respectivo aporte conceptual de esta investigación. Adicionalmente, se presentan las conclusiones finales de la investigación, donde se sintetizan los aportes que esta investigación representa para el estado de conocimiento, en cada objetivo específico y en el objetivo general. Finalmente, en las recomendaciones se proponen líneas de investigación emergentes, a partir de los vacíos y limitaciones conceptuales, derivadas del análisis de los resultados.

REDIPUCP

CAPÍTULO I. CONTEXTUALIZACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA

El presente capítulo se encuentra estructurado con los siguientes subcapítulos: descripción del problema, formulación del problema, objetivo general, objetivos específicos y justificación.

RED-UMECIT

En primer lugar, se presenta la descripción del problema abordándose desde cuatro perspectivas epistemológicas: 1. desde el análisis de la literatura científica, 2. desde datos estadísticos de entidades nacionales e internacionales que evalúan la educación matemática, 3. desde la percepción docente, 4. desde la percepción de los estudiantes, estos últimos pertenecientes a las instituciones educativas focalizadas. A partir de estas perspectivas, se sintetizaron los aspectos estructurantes del problema. Posteriormente, se describe el pronóstico, en caso de seguir el problema, así como el proceso que, a juicio de esta investigación, permite controlar el mismo.

En segundo lugar, a partir de la información anterior se formula una pregunta en virtud de la problemática evidenciada, que se constituye en la razón de ser de este estudio investigativo. En tercer lugar, se presentan los objetivos generales y específicos, orientados de manera pertinente a situación problema delimitada. En cuarto lugar, se argumenta la justificación, dando cuenta de las razones para la ejecución de la presente investigación y, por último, los alcances y limitaciones del presente estudio.

1. Descripción de la problemática

Antes de empezar la descripción de la problemática en torno a la resolución de problemas algebraicos, se debe tener en cuenta que el objetivo principal de la enseñanza del álgebra debe ser "que los estudiantes aprendan a representar relaciones generales y procedimientos, porque a través de estas representaciones, se pueden resolver una amplia gama de problemas y pueden desarrollarse nuevas relaciones a partir de las conocidas" (Booth, citado en Castro, 2012, p. 7).

No obstante, numerosas comunidades de profesores e investigadores en educación matemática reconocen que el aprendizaje del álgebra, así como su aspecto fundamental, la resolución de problemas, se les dificulta a la mayoría de los estudiantes de secundaria. Por ejemplo, autores como Booth (citado en Castro, 2012), Cerdán (2010), Espinosa (2019), Fernández (1998), Herscovics (1994), Kieran (1989), Martínez (2011), Molina (2007), Socas (2007), Trujillo, Castro y Molina (2009), Vega, Molina y Castro (2011), constatan

que los alumnos no llegan a obtener un conocimiento algebraico satisfactorio a pesar del empeño puesto en su enseñanza.

En ese sentido, han identificado las causas que dan origen a las dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas algebraicos. Por ejemplo, entre las nociones que producen dificultad se señalan

> La clausura para las expresiones algebraicas que los estudiantes tienden a hacer; el lenguaje algebraico al que no le ven sentido y que les lleva a asignar valores numéricos a las letras o a generalizar apresuradamente; la jerarquía de la operaciones para la que no encuentran justificación; el uso de paréntesis; la percepción del signo igual como expresión de una equivalencia, entre otras. (Soto, Vera & González, 2015, p. 23)

De esta manera, la problemática referida a la resolución de problemas algebraicos, se evidencia en el tipo de relación del sujeto con los objetos algebraicos, es decir, signos, conceptos y procedimientos implicados en el problema en cuestión.

Así, desglosando el problema de la relación sujeto objeto algebraico, puede que "las dificultades en la resolución de problemas se concentran en aspectos que son intrínsecos al objeto, otros inherentes al propio sujeto y, en torno a estos dos, el medio, es decir, las técnicas de enseñanza" (Palarea, 2012, p. 18).

En cuanto a los aspectos intrínsecos al objeto, se refieren a la naturaleza misma del álgebra, sus definiciones, axiomas, teoremas, objetos, conceptos, procedimientos, representaciones, en general su lenguaje y los consiguientes procesos de generalización, deducción e inducción (Joseph, 2011).

Respecto a las dificultades inherentes al sujeto, están relacionadas con las concepciones que posee. Según Schoenfeld (citado en Barrantes, 2006), dichas concepciones "son los conocimientos previos que posee el individuo; es decir, conceptos,

fórmulas, algoritmos, y, en general, todas las nociones que se considere necesario saber para enfrentarse a un determinado problema" (p. 5).

Concretamente, Alan Schoenfeld (citado en Mejía & Londoño, 2017) identificó que problemática en torno a la resolución de problemas matemáticos, implica los siguientes factores

- Recursos cognitivos: Son nuestros conocimientos matemáticos generales, tanto de conceptos y resultados como de procedimientos (métodos y algoritmos).
- Creencias: Se refiere a aquellas creencias y opiniones relacionadas con la resolución de problemas y que pueden afectarla favorable o desfavorablemente
- Heurística: Es el conjunto de estrategias y técnicas para resolver problemas que conocemos y estamos en capacidad de aplicar.
- Control o metacognición: Es la capacidad de utilizar lo que sabemos para lograr un objetivo. (p.159)

En este punto, cabe resaltar que los aspectos propios del sujeto, mencionados por Schoenfeld, están íntimamente relacionados con los aspectos del objeto, mencionados por Joseph (2011), lo cual es de esperarse, dada la relación entre el sujeto y el objeto, mencionada anteriormente por Palarea (2012).

1.1. Evidencias del problema en relación con los saberes previos

En una primera aproximación a los aspectos inherentes del sujeto, se encuentran sus saberes previos, concepciones personales, como una versión de los aspectos intrínsecos del objeto algebraico en su estructura cognitiva, es decir, de las adaptaciones y forma personal en que se encuentran organizados los elementos propios del objeto matemático (Palarea, 2012; Kieran, 1989).

Adicionalmente, el problema referente a los saberes previos se refiere a la tendencia de los estudiantes a "producir respuestas convencionales a problemas convencionales, dejando de lado otras formas de abordaje, quizá, con desarrollo más fácil" (Schoenfeld, citado en Barrantes, 2006, p. 11). Además, aunque posea ciertas nociones conceptuales o procedimentales, estas pueden ser defectuosas. Por ejemplo, la mayoría de los estudiantes presentan dificultades en relación con las convenciones algebraicas y, dado que las convenciones del álgebra provienen de la aritmética,

> puede decirse que el origen de fondo, en la dificultad en el manejo del algebra, está estrechamente relacionado con el desconocimiento de definiciones, axiomas, teoremas de la aritmética, así como convenciones, tales como el uso del paréntesis y la jerarquía de operaciones. (García, Segovia & Lupiáñez, 2012, p.23)

Un ejemplo de lo anterior, se evidencia en la concepción del axioma de la distributividad, en la resolución de un binomio aritmético, o en el uso de paréntesis, que evidencian nociones que no son coherentes con el saber institucional.

Figura 1. Evidencia del problema en relación con los saberes previos

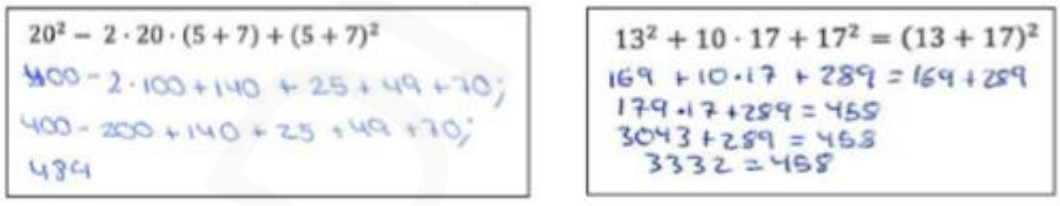


Figura 1. Desarrollo del axioma distributivo y cuadrado de un binomio por un estudiante. Fuente: Castro (2012, p. 9).

En medio de la problemática en torno a los saberes aritméticos, los estudiantes creen que la única forma de resolver un ejercicio o problema es la regla que el profesor dio en la clase, que la memorización es la clave para entender y aplicar las matemáticas. Por último,

no ven como recursos de justificación o argumentación de sus procesos, los axiomas, teoremas o propiedades aritméticas, más bien, asumen que no es necesario, porque ya el profesor lo dijo (Schoenfeld, citado en Barrantes, 2006).

Ahora bien, dado que gran parte de las concepciones o saberes previos de los estudiantes, dependen de la enseñanza que han recibido a lo largo de su proceso educativo, puede decirse que las dificultades que estos presentan en el uso de nociones algebraicas en la resolución de problemas, reflejan un problema de enseñanza de forma tradicional, enfocada en la repetición de tipos de problemas, generalmente algorítmico, sin caracterizar los saberes previos, creencias; sino generadores de aprendizaje memorístico y no lógico, en ocasiones, dando por sentado que los estudiantes deben tener ciertas bases disciplinares, solo porque el docente las considera naturales, intuitivas o fáciles, desde su perspectiva de experiencia y tiempo de manejo del tema, que generalmente afectan su noción de dificultad de los problemas (García, Segovia & Lupiáñez, 2012).

1.2. Evidencias del problema en relación con las estrategias metacognitivas

Otro tópico amplio dentro de la problemática de la ausencia de saberes previos al abordar un problema, es el uso poco productivo o nulo de las estrategias metacognitivas, a pesar de los esfuerzos pedagógicos desde hace varios años, para que los estudiantes sean capaces de aprender por sí mismos, resolver sus propios problemas y enfrentar diferentes circunstancias dentro y fuera de la escuela. Al respecto, Zimmerman (citado en Sanabria, Ibáñez & Valencia, 2016) manifiesta que una de las principales causas del bajo rendimiento académico es la incapacidad de los alumnos de controlar su propia conducta mientras realizan una actividad. Según este autor, lo contrario también es cierto, es decir, el rendimiento académico y ejecución exitosa de una tarea, depende de las habilidades previas de aprendizaje autorregulado o metacognición, habilidades que se adquiere mediante procesos “individuales o intrapsicológicos, sociales e interpersonales” (Zimmerman, citado en Sanabria, Ibáñez & Valencia, 2016).

De hecho, la relevancia de los procesos metacognitivos en la resolución de problemas, es destacada por Schoenfeld (citado en Barroso & Rodríguez, 2007), quien señala que

> La autorregulación de la cognición en la resolución de problemas algebraicos es responsable de las decisiones del alumno durante la resolución. Esta se refiere a la planificación; selección de las estrategias adecuadas; monitorización de la aplicación de las estrategias; evaluación de los resultados, del proceso seguido y la corrección de los errores. (p. 268)

Sin embargo, la mayoría de los estudiantes de secundaria no conocen o aplican de formas poco productivas, los procesos de seguimiento frente a resolución de un problema (Castro, Cañadas & Molina, 2010; Rodríguez, Molina, Cañadas & Castro, 2015; Lobato, 2014; Radford, 2010).

Adicionalmente, dentro del problema de las estrategias metacognitivas, Ottonello, Veliz y Ross (2011) mencionan que muchos estudiantes carecen de los esquemas relevantes para revisar, evaluar y si es preciso, modificar sus procesos cognitivos, lo que impide que, desde el comienzo, no comprendan o interpreten adecuadamente el problema (p. 15).

Numerosos investigadores refieren, que los docentes no se centran en explicar la actividad cognitiva y metacognitiva que permite llegar a la resolución de problemas algebraicos, ni en estrategias heurísticas (Sánchez, 2017; Arroyo, 2014; Lara, 2017; Benavides, 2018; Botina, 2019; Mesa, 2017; Palacio, 2013; Mena, Abraham, Rodríguez, Galindo & Golbach, 2012; Barreiro & Leonian, 2017; Quintero, 2014). Esto es evidente cuando el estudiante se equivoca en determinada concepción en el proceso de resolución, pero la actividad pedagógica se centra en mostrarle la ruta correcta, en vez de identificar sus supuestos y hacerlo autorreflexionar, de manera que el mismo, naturalmente identifique las características de sus concepciones, si contribuyen o no a solucionar el problema, y sea capaz de resignificarla. Incluso, cuando los estudiantes llevan un proceso equivocado, la mayoría de los docentes lo corrigen inmediatamente, en vez de dejarlo que avance hasta el

resultado y desde allí, pueda evaluar, si es coherente, o si conduce a la respuesta. En todo esto, se evidencia claramente una poca cultura de uso de estrategias metacognitivas de los estudiantes, causadas por el estilo pedagógico del docente (Sánchez, 2017; Arroyo, 2014; Lara, 2017; Benavides, 2018; Botina, 2019; Mesa, 2017; Palacio, 2013; Mena, Abraham, Rodríguez, Galindo & Golbach, 2012; Barreiro & Leonian, 2017; Quintero, 2014).

1.3. Evidencias del problema en relación con la transformación semiótica

Un aspecto caracterizado en la literatura como parte del problema, es la falta de rigor didáctico en relación con la transformación semiótica y la suficiencia de conocimientos de conceptos, significados, signos, que ella implica, para el éxito en la actividad de resolver problemas algebraicos (Blanton & Kaput, 2005; Booth, citado en Castro, 2012; Morales, 2013; Apud, 2014; Acosta, 2017; Guerrero, Moreno & Niño, 2015).

En el ámbito escolar, una de las dificultades que tienen los estudiantes entre 12 y 14 años, se observa cuando se les pide que escriban la expresión algebraica del término general de una sucesión, por ejemplo, la de los números impares 1, 3, 5, 7, etc. La mayoría de estos, tiene tendencia a la clausurativid ad de los términos, es decir, a asociar una expresión algebraica con un solo término, por lo que ven inacabada la expresión 2n-1, argumentando que “los términos de la sucesión presentan una forma simple y el término general debe de ser también de forma simple” (Castro, 2012, p.13). Así, la apariencia diferente entre los términos particulares y el término general es la causa de dicha dificultad. Otra dificultad, una vez llegado a encontrar un patrón como generalización, consiste en expresarlo algebraicamente, o sea, utilizar el lenguaje algebraico adecuadamente para expresar dicho patrón (Cañadas 2007; Trujillo, Castro & Molina, 2009).

Ahora bien, si es evidente la problemática en torno a procesos algebraicos, esta es más notable durante el proceso de resolución de problemas al hacer transformaciones de conversión, desde el lenguaje natural, o expresiones verbales a las algebraicas y viceversa, así como en la formulación de ecuaciones algebraicas (Rodríguez & Molina, 2013).

A continuación, se analiza el problema relacionado con la trasformación semiótica, desde el uso de la variable, de símbolos, de expresiones y estructuras.

1.3.1. Problema en el uso de la variable

El problema de los estudiantes en el uso de la variable, está relacionado con el desconocimiento de los tres usos de la variable, a saber, como incógnitas, como números generalizados y para señalar relaciones funcionales. De hecho, numerosas investigaciones muestran que en sus primeras aproximaciones al álgebra, no entienden el significado de las letras y comúnmente las interpretan como suplencia de objetos o palabras (Blanton & Kaput, 2011; Booth, citado en Castro, 2012; Morales, 2013).

Una de los posibles causantes de esta asociación de letras con objetos, es la abreviación usada para nombres comunes, por ejemplo, L, por Luis; o 7 mangos, por 7m. En esa línea, Booth (citado en Castro, 2012) sostiene que las dificultades de los alumnos, al comenzar a trabajar en álgebra, son el resultado de la utilización desigual de las letras en la aritmética y el álgebra. Por mencionar un caso, en aritmética, letras como "m" y "cm" se utilizan como etiquetas para abreviar la expresión metros y centímetros, no como la representación de cierto número de metros o de centímetros, tal como ocurriría en álgebra. Esta inadecuada relación de variables con abreviaturas de expresiones, “afecta a la trasformación de problemas orales en expresiones algebraicas aptas para obtener el resultado a través de su transformación” (Cañadas, 2007, p. 23).

De otro lado, Forigua y Velandia (2015) encontraron que solo un porcentaje muy pequeño de estudiantes de entre los 13 a 15 años podía considerar una letra como un número generalizado, mucho menos eran capaces de interpretar una letra como una variable. La mayoría de los estudiantes tomó las letras como objetos concretos o simplemente o los ignoró. Además, en el proceso contrario de asignar letras como variables, para generalizar relaciones, los estudiantes también encuentran dificultades. En la siguiente figura, Castro (2012), presenta el desempeño de un estudiante de grado octavo de secundaria obligatoria, cuya tarea consistía en generalizar, con letras, una expresión

aritmética, no sin antes, construir dos expresiones aritméticas con la misma forma estructural.

Figura 2. Evidencia del problema en la gestión de la variable

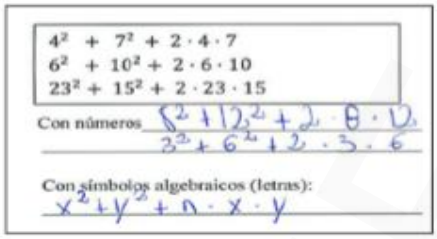


Figura 2. Desempeño del estudiante en una tarea de generalización. Fuente: Castro (2012).

A partir de lo anterior, se aprecia que una de las dificultades en el proceso de generalización, es pensar siempre, que todos los términos que componen una expresión general, deben ser generales. Por ejemplo, en el proceso de generalización, a pesar de que el estudiante identifica el 2 como constante, también le asigna una letra, pensando que todos los términos deben ser generales.

1.3.2. Problema en el uso de símbolos u operadores

Otra de las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje del álgebra y la resolución de problemas, están asociadas al uso de los símbolos +; - ; e; =; por tener en cuenta uno, de los múltiples significados que estos pueden tener. Por ejemplo, pueden indicar procesos de cálculo o situación estática de respuesta final. Por ejemplo "x + 8 indica, por una parte, la instrucción de realizar la adición de añadir 8 a cualquier número, o bien, dar una respuesta en la cual se indica que existe la relación: cualquier número sumado con 8" (Morales, 2013, p. 18). Otra ingenuidad es considerar que en "una expresión como $5x^2 - x$, el segundo término, es decir, x, representa un número negativo, en lugar del opuesto a x" (p.18).

Respecto al signo igual, algunos estudiantes no tienen en cuenta su significado de relación de equivalencia, sino como una señal que deben hacer operaciones aritméticas. Además, su concepción de verificación de igualdad se reduce a resolver operaciones, y no se enfoca en la búsqueda de la analogía estructural entre un lado de la igualdad y su opuesto. Por ejemplo, en la siguiente figura, se muestra el desempeño de un estudiante que debe verificar si la ecuación es correcta o no.

Figura 3. Evidencia del problema en relación con la interpretación de operadores

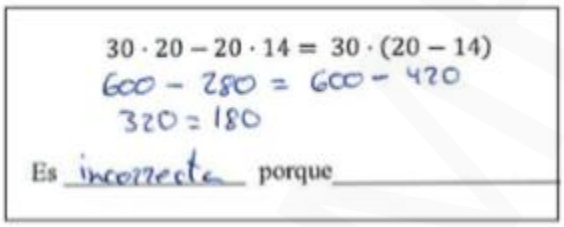


Figura 3. Desempeño de un estudiante en la identificación del valor de verdad de la igualdad. Fuente: Castro (2012).

En primer lugar, se observa que el estudiante realiza todos los cálculos para decir que es incorrecta la igualdad. En segundo lugar, no sabe cómo expresar su resultado, es decir, es posible que no sepa que significa el hecho que la relación entre dos números distintos sea de igualdad. De esta manera, pocos estudiantes aprecian plenamente el hecho de que la solución de una ecuación es encontrar el valor o valores de la variable para la cual los lados, izquierdo y derecho, de la ecuación son iguales (Forigua & Velandia, 2015).

1.3.3. Problema en el uso de expresiones

Otra de las dificultades de los estudiantes es en la manipulación de expresiones algebraicas. Estas expresiones describen operaciones, compuestas por símbolos y signos, siendo los primeros, letras y números, lo que conlleva economía en la notación pero, “dado

que las letras y los números se ajustan a diferentes reglas, causan dificultades a los estudiantes" (Blanton & Kaput, 2011, p.24).

1.3.4. Problema en el uso de estructuras

La tendencia a realizar las operaciones, o reducir de forma serial de izquierda a derecha en aritmética, hace que se aborden las expresiones algebraicas con el mismo procedimiento, dejado de lado el enfoque estructural, que puede acortar el camino entre el planteamiento de la ecuación y su solución (Naranjo, 2015). En la siguiente figura, se muestra el desempeño de un estudiante al verificar una ecuación aritmética en la que hace un uso operacional, con ánimo de cierre o reducción de expresiones para discernir sobre la corrección de la expresión dada.

Figura 4. Evidencia del problema en la manipulación de estructuras

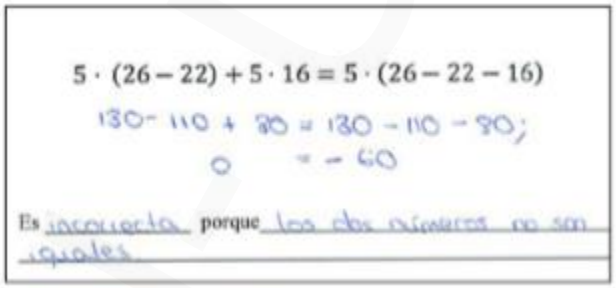


Figura 4. Procedimiento del estudiante en la verificación de una ecuación. Fuente: Castro (2012, p.19).

Una de las razones de esta dificultad es que, en el proceso de reconocer, manejar o reproducir una estructura, hay muchas demandas cognitivas que el estudiante tiene que llevar a cabo, para poder operar con símbolos algebraicos: comprender los diferentes significados de los símbolos, elección del que mejor se ajusta a la situación, reconocer lo que los símbolos representan, tanto para el resultado como para el proceso, lo cual implica la metacognición (Montealegre & Pinzón, 2015). Así, la falta de reconocimiento de esta

complejidad puede llevar a muchos estudiantes a sentir que los símbolos del álgebra son arbitrarios y por lo tanto pueden ser ignorados, o no implican manipulación razonada.

Ahora bien, en vista que toda la problemática anterior, empieza en el contexto escolar, según González (2019), la dificultad de los estudiantes en la conversión de representaciones semióticas en un momento determinado de la resolución del problema algebraico o matemático, no solo radica en el hecho de no saber, sino, de la incomprensión por parte del docente. De hecho, este autor manifiesta que

> el estudiante no tiene medios críticos ni culturales ni cognitivos y el maestro no entiende por qué y acusa al estudiante, culpándolo de algo que él no entiende, lo acusan de una incapacidad vaga, no circunstanciada y detallada: nadie sabe exactamente qué cosa, en verdad, el estudiante no sabe y que cosa no sabe hacer. (p. 12)

Entonces, es claro que hay una problemática de los estudiantes, en el reconocimiento y manipulación de un objeto matemático a través de sus estructuras semióticas, que incluyen los registros y representaciones, pero también, la forma de enseñar del docente debe empezar por la comprensión de los medios culturales y cognoscitivos de que el estudiante dispone, para establecer una didáctica pertinente que permita que los estudiantes realicen operaciones de transformación semiótica con variables, símbolos, signos, expresiones y estructuras algebraicas (Montealegre & Pinzón, 2015; González, 2019; Naranjo, 2015; Guerrero, Moreno & Niño, 2015).

Así, el problema en el aspecto de la enseñanza radica en el enfoque algorítmico, de repetición estricta y mecanizada de procedimientos, en un enfoque conductista, esperando que los estudiantes los aprendan, en vez de tener en cuenta las transformaciones semióticas que el sujeto realiza durante el proceso resolutivo. En general el problema al resolver un problema algebraico se resume en el hecho de que los estudiantes no tienen un repertorio conceptual y procedimental suficiente, para resolver problemas algebraicos, es decir, en la

ausencia de saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica (González, 2019; Naranjo, 2015; Apud, 2014; Acosta, 2017).

1.4. Limitaciones de algunos desarrollos teóricos en resolución de problemas

Para empezar, el método de Polya (1965), es uno de los desarrollos teóricos más conocidos para resolver problemas, de hecho, muchos investigadores y expertos en educación matemática, coinciden en que existen aspectos metódicos asociados a las heurísticas de Pólya (Martínez & Brendy, 2015; Reynaga & Ruiz, 2014). No obstante, argumentan que es un poco difícil que a estudiantes y en general personas que no tienen experiencia en la resolución les sea suficiente con saber dichas heurísticas, es decir, las heurísticas de Polya son macro aspectos descriptivos que "implican una serie de prescripciones que deben especificarse más, desde el punto de vista didáctico" (Nieto, 2005, p.17).

Además, según Schoenfeld (citado en Barrantes, 2006), prácticamente cada tipo de problema necesita de ciertas heurísticas particulares; el problema con las heurísticas tal como lo propone Pólya, es que son muy generales, por eso no pueden ser implementadas. Dice que "habría que conocerlas, saber cómo usarlas, y tener la habilidad para hacerlo y disponer de más elementos teóricos que permitan implementarla con éxito, para toda clase de estudiantes" (p.13).

De otro lado, Godino (2012), ha desarrollado el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática EOS en el que recoge elementos conceptuales de la Teoría de registros de Representación Semiótica de Duval (2004), de la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (2016), entre otros aportes, para estudiar "las relaciones dialécticas entre el plano personal institucional de los objetos matemáticos, es decir, lenguaje, sistemas de signos y las situaciones problemas para cuya resolución se inventan tales recursos" (Godino, 2012, p. 3). Así, este enfoque comprende la resolución de problemas, como el producto del articulado de los 3 aspectos medulares que constituyen la problemática de esta investigación, a saber, los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica.

En ese sentido, dicho enfoque plantea que en investigación de la resolución de problemas algebraicos, desde la educación matemática, debe tener en cuenta

> La clarificación de las nociones teóricas que se utilizan en el área de conocimiento, en particular las usadas para analizar los fenómenos cognitivos. No hay un consenso sobre este tema. Basta observar la variedad de nociones que se usan sin que se haya iniciado su contrastación, clarificación y depuración: conocimientos, saberes, competencias, concepciones, conceptos, representaciones internas, imágenes conceptuales, esquemas, invariantes operatorias, significados, praxeologías, etc. (Godino, 2007, p.2)

Adicionalmente, Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017) expresa que la resolución de problemas algebraicos es un proceso sujeto a la relatividad socioepistémica y cognitiva de los significados, al decir que "en el estudio de la educación matemática, más que una práctica particular ante una serie de problemas concretos, interesa considerar los sistemas de prácticas, operativas y discursivas, puestas de manifiesto por las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas" (p.5). Asimismo, además de las estrategias cognitivas, el EOS incluye las estrategias metacognitivas, tal como lo indica Gusmao (2006)

> Para interpretar con mayor detalle la complejidad de los fenómenos cognitivos asociados a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el contexto de la resolución de problemas algebraicos a través de EOS, es necesario considerar además, explícitamente, los aspectos metacognitivos. (p.3)

En este planteamiento, puede observarse que el EOS considera que la no delimitación o clarificación de dichos conceptos referidos a estrategias cognitivas y metacognitivas generan brechas o discontinuidades en la comprensión que se tiene del proceso de resolución de problemas algebraicos de los estudiantes (Godino, Aké, Etchegaray, Lasa, Neto & Wilhelmi, 2015). Frente a esta situación, Godino et al. (2015), propone que

> Se tome conciencia de las brechas en la progresión del aprendizaje del algebra. Estas brechas se refieren al uso de distintos registros de representación semiótica y su tratamiento, así como a la intervención y puesta en relación de objetos conceptuales, proposicionales, procedimentales y argumentativos de mayor grado de generalidad. (p.129)

No obstante, a pesar de realizar aportes valiosos en la identificación de los aspectos que inciden en la resolución de problemas algebraicos, y contextualizarlos desde una perspectiva ontosemiotica, el mismo autor reconoce que aún falta especificar las en los aspectos didácticos, propios de la praxis de aula, de docente a estudiante, que permita clarificar y delimitar más, "las concepciones, conceptos, representaciones internas, imágenes conceptuales, esquemas, invariantes operatorias, significados, praxeologías, en términos didácticos, que permitan su transformación curricular para el uso educativo en la educación". (Godino, Giacomone & Beltrán, 2018, p. 31; Godino, 2017, p.12).

Según este autor, el objetivo, es llegar a un nivel de clarificación racional, tal que las herramientas teóricas aportadas por cierta teoría, se convierta en un sistema de nociones necesarias y suficientes, para abordar las diversas facetas y niveles de análisis específico de los problemas didáctico matemático. En ese sentido, Godino (2017) considera que su obra "no está finalizada, sino que constituye un proyecto de investigación abierto a nuevos complementos y aplicaciones" (p.12).

Una de las clarificaciones que hacen falta son las referidas a los "presupuestos ontológicos, semióticos, psicológicos, sociológicos y pedagógicos" (Godino, Gonzato, Cajaraville & Fernández, 2012, p.21). Esto evidencia que hace falta un conocimiento más específico hacia la didáctica, de los aspectos coyunturales de la problemática ya mencionada, esto es, los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica, para ser adaptados para su uso por parte de los propios profesores de matemáticas y sea enseñado de manera que permita resolver problemas algebraicos a cualquier estudiante.

1.5. Evidencia del problema en estadísticas educativas nacionales

Respecto a las estadísticas que apoyan la delimitación del problema previamente tratado, la falta la exploración de los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica los estudiantes en la resolución de problemas algebraicos, la OCDE[1], ICFES[2] & PISA[3] (citados en Caicedo, 2014) indican que, a partir de los resultados de Colombia, en relación con la resolución de problemas algebraicos, se debe trabajar en "la producción de distintas formas de representar expresiones matemáticas", por lo que se infiere que los estudiantes tienen falencias en la transformación semiótica (p. 46).

Esta situación se evidencia en la siguiente tabla, la cual contiene el porcentaje de estudiantes que se encuentran en los respectivos niveles de desempeño, inferiores a dos y como máximo, hasta seis; de la subprueba de matemáticas de nivel secundaria, aplicada en la prueba PISA del año 2012.

Tabla 1. Porcentaje de estudiantes en cada nivel de desempeño

Area	**Matemáticas**		
Nivel de desempeño	5 y 6	2	< 2
Porcentaje de estudiantes	0,3 %	17,8 %	73,8 %

Fuente: OCDE (citada Caicedo, 2014). *XII Coloquio Regional de matemáticas y II simposio de Estadística.* Adaptado

Ahora bien, para tener claridad sobre los descriptores cualitativos de los niveles de desempeño referidos en la tabla anterior, se ha construido la siguiente tabla complementaria.

Tabla 2. Descripción de los niveles de desempeño evaluados en la prueba PISA

Nivel de desempeño	**Descripción**

[1] Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos
[2] Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación
[3] Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos

1	Responde a preguntas planteadas en contextos conocidos, donde está presente toda la información pertinente y las preguntas están definidas claramente. Identifica la información y realiza acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.
2	Reconoce situaciones en contextos que sólo requieren una inferencia directa. Extrae información pertinente de una sola fuente y hacer uso de un único sistema de representación Utiliza ocasionalmente algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales.
3	Interpreta y utiliza representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas Selecciona y aplica estrategias de solución de problemas sencillos. Ejecuta procedimientos que requieren decisiones secuenciales
4	Aplica modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar condicionantes o exigir la formulación de supuestos. Selecciona e integra diferentes representaciones, incluyendo las simbólicas, asociándolas directamente a situaciones del mundo real. Razona con flexibilidad y perspicacia, elabora y comunica explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones
5	Selecciona, compara y evalúa estrategias adecuadas de solución de problemas para abordar problemas complejos. Utiliza habilidades de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas, así como representaciones relacionadas adecuadamente, caracterizaciones simbólicas y formales e intuiciones relativas a estas situaciones. Reflexiona sobre sus acciones y formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.
6	Relaciona diferentes fuentes de información y representaciones y traducirlas entre ellas de una manera flexible. Aplica su entendimiento y comprensión, así como su dominio de las operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales y desarrollar nuevos enfoques y estrategias para abordar situaciones nuevas. Formula y comunica con exactitud sus acciones y reflexiones relativas a sus descubrimientos, argumentos y su adecuación a las situaciones originales.

PRELIMINAR

Fuente: OCDE (citada en Rico, 2006). *Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas*. Adaptado.

A partir de los descriptores cualitativos de la tabla No. 2 y el porcentaje de estudiantes en cada nivel de desempeño, del cuadro No. 1, se puede observar que el 73.8% tienen un nivel de desempeño inferior a 2%, solamente el 17.8% está en ese nivel. Si se suman ambos porcentajes, 73,18% y 17,8%, se concluye que el 91.6% de los estudiantes colombianos se ubican en el nivel de desempeño igual o menor a 2. Tras un análisis de la descripción de los niveles de desempeño, las habilidades de más del 90% de los estudiantes, según OCDE (citada en Caicedo, 2013) se reducen a

> Interpretar y reconocer situaciones en contexto que solo requieren una inferencia directa, extraer información relevante de una sola fuente y hacer uso de un único modelo de representación, utilizar algoritmos, formulas, convenciones o procedimientos elementales, realizar acciones obvias e interpretaciones literales de los resultados. (p. 43)

Dado que la descripción anterior se refiere a los niveles de desempeño iguales o inferiores a 2, se infiere que más del 90% de los estudiantes no alcanzan niveles de desempeño iguales o superiores a 3, lo que implica que no ejecutan, con suficiencia, ciertos procedimientos que requieren decisiones secuenciales, de selección y aplicación de estrategias de solución de problemas sencillos. Incluso, no interpretan y utilizan representaciones basadas en diferentes fuentes de información para razonar a partir de ellas, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas para abordar problemas complejos relativos a modelos algebraicos o matemáticos. Tampoco utilizan diferentes fuentes de información y representaciones para traducirlas entre ellas de una manera flexible a través del dominio de las operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales, mucho menos abstraen nuevos enfoques y estrategias para abordar problemas de estructura similar.

Hasta aquí, el problema, a nivel nacional es claro: la mayoría de los estudiantes colombianos solamente resuelven problemas a partir de lo explícito que problema plantea, y pueden ejecutar, con dificultad, ciertos algoritmos. Sin embargo, respecto al conocimiento de axiomas, propiedades de operaciones, conceptos aritméticos previos, así como estrategias de autorregulación, traducción entre representaciones y argumentación matemática, aún no son alcanzadas.

Ahora bien, en el contexto municipal, la situación no es diferente. De hecho, en las estadísticas liberadas por ICFES (2018), sobre cifras relacionadas con las falencias de los estudiantes de secundaria al resolver problemas algebraicos, en seis de las instituciones educativas del municipio de Chigorodó el panorama continúa idéntico. A continuación se presentan las estadísticas que corroboran esta información, no sin antes explicitar la relación entre el color, los niveles de desempeño, descriptores cualitativos y cuantitativos, como insumo para interpretar las estadísticas liberadas por el ICFES, referidas al desempeño de los estudiantes en resolución.

Tabla 3. Descriptor cualitativo y cuantitativo en función de los niveles de desempeño

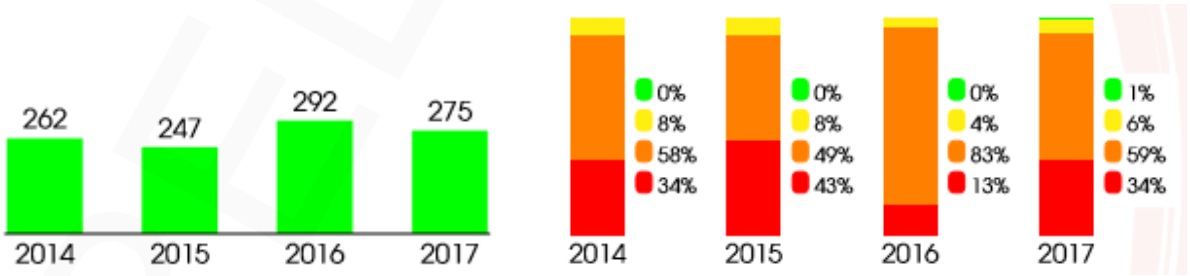
Color	**No.**	**Nivel de desempeño**	**Descriptor cualitativo**	**Descriptor cuantitativo**
Rojo	1	Insuficiente	Interpreta información que se presenta en gráficas o tablas. Identifica patrones de tipo geométrico para hallar elementos faltantes en una sucesión de datos.	100-252
Naranja	2	Mínimo	Reconoce y utiliza representaciones de funciones. Soluciona problemas utilizando las relaciones, propiedades y operaciones de los números reales. Identifica y establece relaciones entre figuras planas y sólidos.	253-344
Amarillo	3	Satisfactorio	Utiliza propiedades de la potenciación, radicación o logaritmación, expresiones algebraicas y representaciones gráficas para modelar situaciones sencillas de variación y solucionar un problema. Establece relaciones entre los sólidos y sus representaciones planas. Reconoce y aplica movimientos rígidos a sólidos en un sistema de coordenadas. Relaciona atributos medibles de uno o varios objetos o sucesos. Identifica la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de un evento según las condiciones del contexto establecido.	345-423
Verde	4	Avanzado	Deduce a partir de una representación de una función otras	424-500

	representaciones de la misma. Identifica las características de una función a partir de una representación de la misma. Establece equivalencias entre expresiones algebraicas y numéricas. Aplica propiedades relativas a determinados subconjuntos numéricos (naturales, enteros y reales). Usa criterios de semejanza y congruencia teniendo en cuenta algunas características de las formas bidimensionales o tridimensionales para realizar inferencias. Halla probabilidades de un evento utilizando técnicas de conteo así como ocurrencias esperadas de eventos

Fuente: ICFES (2018). *Guía de uso e interpretación de los resultados*. Adaptado.

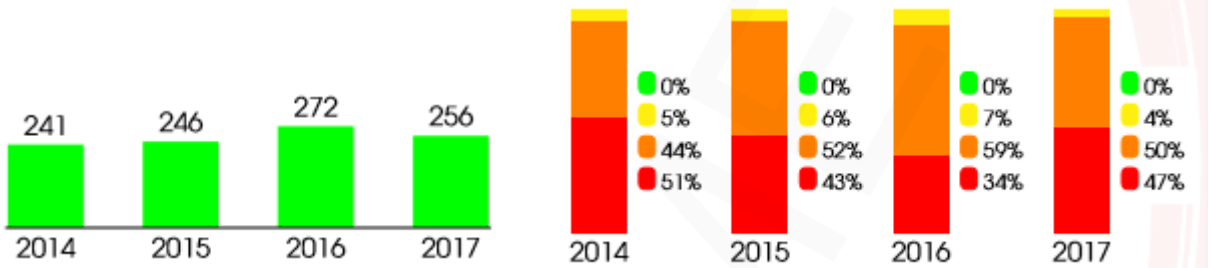
A modo de complemento de la información de la tabla No.3 se presenta el informe estadístico realizado por el ICFES en relación con la clasificación de los estudiantes según su nivel de desempeño evidenciado, para cada uno de los seis planteles educativos del municipio de Chigorodó focalizados en el presente estudio. Cada informe estadístico suministra detalles relacionados con el desempeño en el área de matemáticas en cada uno de los años del cuatrienio 2014-2017. Asimismo, en la sección izquierda del informe, se muestra los promedios de los desempeños obtenidos en cada uno de los años de cuatrienio. Por el contrario, en la sección derecha, se muestra el porcentaje de estudiantes en cada nivel de desempeño. Luego de las acotaciones anteriores, se presenta el informe estadístico por institución educativa.

Gráfico 1. Puntaje global y niveles de desempeño durante el cuatrienio 2014-2017. Institución Educativa María Auxiliadora



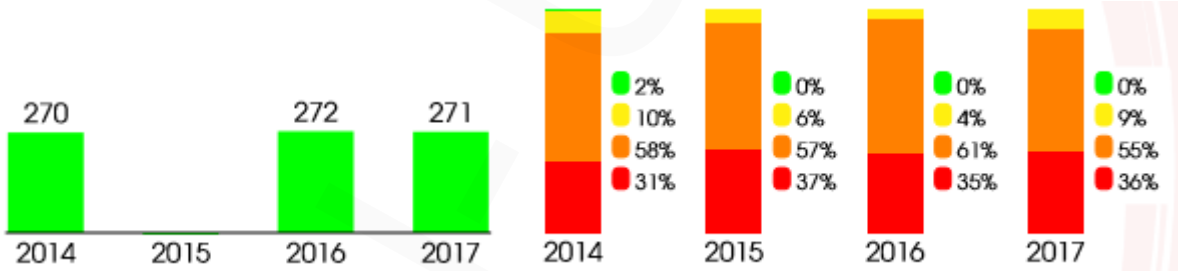
Fuente: Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2018). *Reporte de la excelencia.* Adaptado.

Gráfico 2. Puntaje global y niveles de desempeño durante el cuatrienio 2014-2017. Institución Educativa Agrícola de Urabá



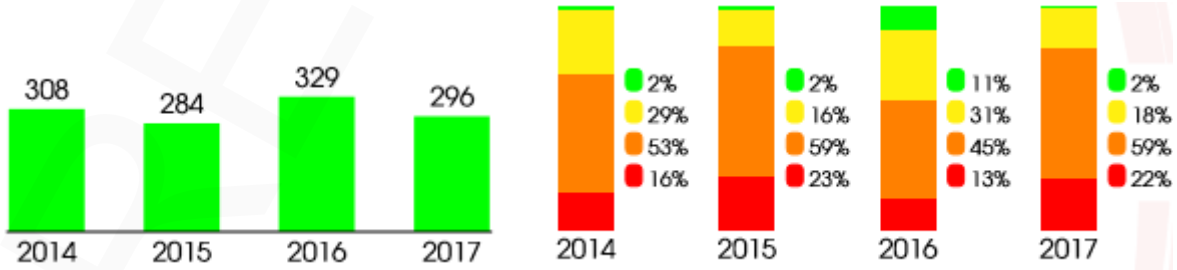
Fuente: Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2018). *Reporte de la excelencia*. Adaptado.

Gráfico 3. Puntaje global y niveles de desempeño durante el cuatrienio 2014-2017. Institución Educativa Chigorodó



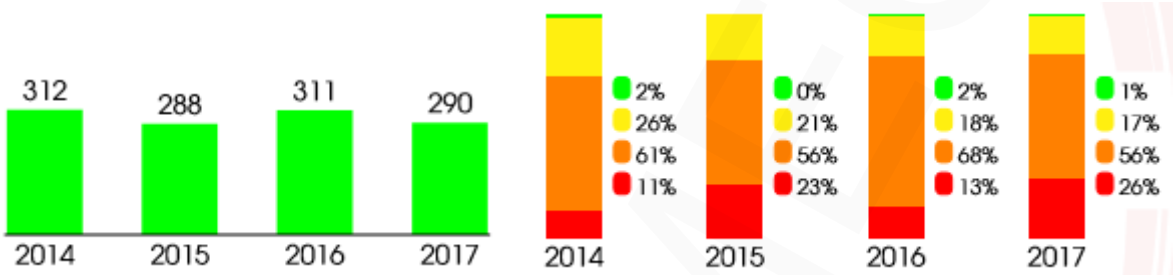
Fuente: Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2018). *Reporte de la excelencia.* Adaptado.

Gráfico 4. Puntaje global y niveles de desempeño durante el cuatrienio 2014-2017. Institución Educativa Los Andes



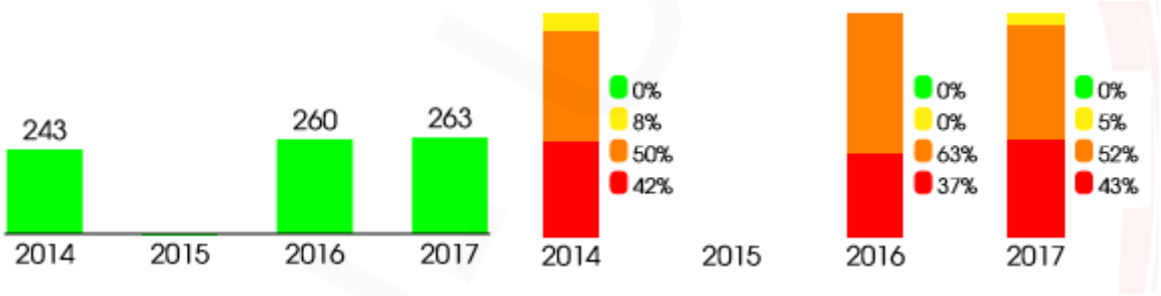
Fuente: Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2018). *Reporte de la excelencia*. Adaptado.

Gráfico 5. Puntaje global y niveles de desempeño durante el cuatrienio 2014-2017. Institución Educativa Gonzalo Mejía



Fuente: Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2018). *Reporte de la excelencia*. Adaptado.

Gráfico 6. Puntaje global y niveles de desempeño durante el cuatrienio 2014-2017. Institución Educativa Juan Evangelista Berrío



Fuente: Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2018). *Reporte de la excelencia*. Adaptado.

A partir de los descriptores del ICFES (2018) para el nivel mínimo, puede afirmarse que la mayoría de los estudiantes de grado octavo del municipio de Chigorodó solucionan problemas utilizando algunas relaciones, propiedades y operaciones sencillas de los números reales, identifican relaciones entre figuras geométricas y asocian magnitudes a su dimensión correspondiente, y relacionan limitadamente algunas variables, para comprender fenómenos de las ciencias sociales o naturales. Nótese que, en común con la descripción dada por la OCDE (2017), la mayoría de los estudiantes utilizan de manera superficial los conceptos y operaciones aritméticas, no realizan procesos sistemáticos para resolver

problemas algebraicos, solamente aritméticos y su proceso comprensivo se reduce a trabajar con lo evidente o los signos explícitos en el problema, sin implementar estrategias de autorregulación cognitiva.

Es importante señalar que los siguientes niveles a donde deben llegar los estudiantes, es decir, satisfactorio o avanzado, comprenden destrezas que les permiten utilizar propiedades de la potenciación, radicación o logaritmación para solucionar un problema, es decir, tener un mayor dominio de conceptos y procedimientos previos, estrategias metacognitivas y de múltiple representación expresión algebraica, para modelar situaciones sencillas de variación. A propósito del proceso de modelar, el MEN (2017) lo define como traducir de otros lenguajes, al lenguaje matemático, en forma de una relación analítica, en donde se torna un objeto matemático puro. De esta manera modelar implica utilizar procesos de transformación semiótica.

Llegado a este punto, las estadísticas mostradas indican que, actualmente, los estudiantes carecen de la suficiencia de definiciones, propiedades aritméticas, nociones previas, estrategias de autorregulación, modelación y construcción de representaciones algebraicas, para la resolución de problemas. De esta manera, integrando la información encontrada en la literatura y en los datos estadísticos nacionales, se acentúa la convergencia del problema: falta de exploración de los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica en la resolución de problemas algebraicos (Barroso & Rodríguez, 2007; Caicedo, 2014; ICFES, 2018; Godino, 2017; Gusmao, 2006; Osses & Jaramillo, 2008).

1.6. Evidencia del problema desde la percepción de los estudiantes

Respecto a la exploración preliminar efectuada a 6 estudiantes de las instituciones educativas focalizadas, se muestran los resultados en la siguiente tabla.

Tabla 4. Encuesta semiestructurada a estudiantes

PREPRINT

No.	PREGUNTA	RESPUESTA OBTENIDA[4]		
1	¿Cómo enseña el profesor los problemas algebraicos?	"Nos coloca un problema, nos dice cómo resolverlo, y luego nos coloca otros más difíciles, con cosas que dice que deberíamos saber de grados anteriores, pero no hemos visto ni sabemos"		
2	¿Cuándo vas a resolver un problema, en que piensas?	"Pienso en la operación que haya que hacer para encontrar la respuesta"		
3	¿Utilizas con cierta frecuencia los mismos pensamientos, como siguiendo una receta, procedimiento mental cuando vas a resolver un problema?	"No he pensado eso, pienso que cada problema es distinto, no tengo una receta, a veces no sé ni cómo empezar, no me considero bueno en eso"		
4	¿Qué grupo de palabras representa mejor tu proceso mental de resolución de problemas?	Interpretación, imaginación, pensamiento lógico	Recordación de fórmulas, operaciones aritméticas	Ambos grupos
		42%	58%	0%
5	¿Crees que comprender los significados de los conceptos matemáticos presentes en la enunciación del problema es importante para solucionarlo?	"Si es importante, pero no sé cómo utilizar los conceptos para solucionar el problema, conozco algunos conceptos pero no como usarlos para resolver un problema, de todas maneras yo hago el intento"		
6	¿Tus docentes enfatizan la interpretación y significados de conceptos de un problema antes de pensar en una solución?	SI	NO	
		14%	86%	
7	¿Dónde te enfocas más en un problema?	En el lenguaje natural (verbal)	En los datos numéricos algebraicos	Ambos
		0%	100%	0%

Fuente: Autor (2019)

Es de notar que en la encuesta los estudiantes mencionan a los saberes previos como entes obvios por los docentes, pero que no necesariamente son desarrollados por ellos, en la

[4] Las respuestas obtenidas corresponden a la conjunción de las respuestas dadas por los estudiantes

misma cantidad y calidad. En contraste con la revisión en la literatura, (Moreno, et al., 2015) señala que las tendencias docentes para la resolución de problemas son caracterizadas por el uso continuo de la exposición frontal y un solo libro de texto, su propósito es netamente informativo y el aprendizaje es memorístico, usando en ocasiones las herramientas tecnológicas simplemente con el objetivo de variar de instrumentos didácticos, pero repitiendo el mismo contenido, o mostrar la relación con el contexto de un determinado problema, sin verificar de manera rigurosa los saberes previos de los estudiantes.

1.7. Evidencia del problema desde la percepción docente

En relación con el proceso de resolución de problemas algebraicos, los docentes manifiestan que los estudiantes no conocen lo que deberían saber de grados anteriores, tienen dificultades con las operaciones básicas y propiedades elementales, tienen dificultades en pensar con lógica, se equivocan y no se dan cuenta, además, manipulan de forma indiscriminada los signos, símbolos y le restan importancia al conocimiento de conceptos. Cuando se les indagó sobre su propia responsabilidad, indican que a veces, no se tiene claridad didáctica sobre, exactamente, cuáles son los aspectos disciplinares que deben conocer, o monitorear su proceso, sin que siempre este el docente verificándole, o indicándole si va bien, así como los procesos de manipulación de expresiones simbólicas. Además, reconocen la precariedad del método conductista, de repetición de problemas, para aprender mecánicamente, en un proceso tan complejo como la resolución de problemas, que exige un mayor conocimiento de la significatividad, estrategia y manipulación simbólica que ello implica.

1.8. Síntesis del problema, pronóstico y control del pronóstico

Tras un proceso de reflexión crítica del análisis de la literatura, los datos estadísticos, la percepción docente y de estudiantes en las instituciones educativas focalizadas, se evidencia claramente un problema de la educación matemática, referente al desarrollo incipiente de saberes previos, las estrategias metacognitivas y la transformación

semiótica, en el proceso de resolución de problemas algebraicos del estudiante, y de conocimiento didáctico específico de los docentes, en la educación matemática (Barroso & Rodríguez, 2007; Caicedo, 2014; ICFES, 2018; Godino, 2017; Gusmao, 2006; Osses & Jaramillo, 2008).

De esta forma, teniendo en cuenta el análisis obtenido de las fuentes anteriormente mencionadas, se sintetiza el estado del problema, de la siguiente manera

RED-UMECIT

Figura 5. Generalidades del problema de investigación

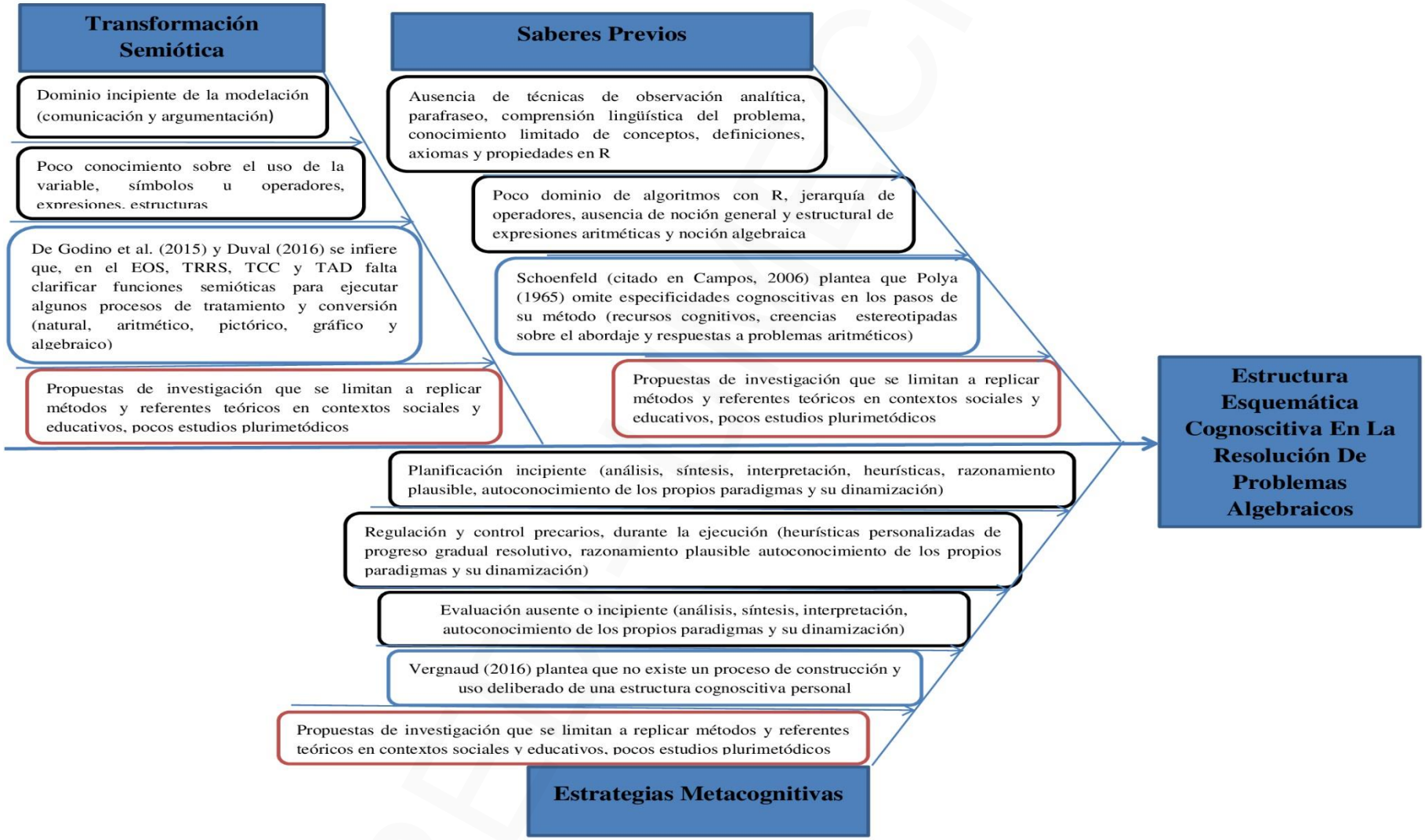


Figura 5. Síntesis del problema de investigación en relación con el uso incipiente de los componentes que se estructuran en la resolución de problemas algebraicos. Fuente: autor (2019)

Como puede observarse, la figura anterior esquematiza y desglosa el problema central, la resolución de problemas algebraicos en los ejes en que puede fragmentarse su estudio, así como sus aspectos integrantes, en profundidad.

En cuanto al pronóstico, según la información arrojada por la estadística en las 6 instituciones educativas del municipio de Chigorodó, y la encuesta aplicada a los estudiantes, y según la instrucción vertical que predomina en los docentes de hoy, mencionada por Moreno et al.(2015) la tendencia del cuatrienio es a seguir en los niveles de desempeño inferiores, desde las evaluaciones nacionales como internacionales de la educación matemática, específicamente, por la ausencia de los aspectos asociados a los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica en la resolución de problemas algebraicos.

Siguiendo la línea de análisis del problema, Ruiz & Chavarría (2003), en consonancia con Moreno et al. (2015) enfatiza que estos resultados de las evaluaciones y los niveles de desempeño de la mayoría de nuestros estudiantes no van a cambiar si "se le resta importancia al valor de los conceptos en la enseñanza de las matemáticas, a la modelización, los métodos, que implícita procesos metacognitivos frente a los procedimientos o algoritmos simples, las respuestas, eliminación casi completa de demostraciones" (p. 71). Asimismo, si los estudiantes se mantienen en los niveles de desempeño inferiores, lo que implica seguir con insuficiencia o conocimiento parcial de axiomas, propiedades, definiciones, conceptos y estrategias de resolución de problemas, tendrán dificultades para razonar lógicamente y enfrentar los retos que exigen las sociedades modernas (OCDE, 2017).

Respecto a los aportes teóricos del método de Polya y Godino, aunque ambos son reconocidos como un gran aporte a la educación matemática, en la medida en que recogen paradigmas anteriores para construir nuevo conocimiento sobre la enseñanza de la resolución de problemas y aportar a la educación matemática internacional, ellos mismos reconocen la necesidad de complementar, teórica, conceptual y didácticamente sus desarrollos, hacia la especificidad en la exploración y clarificación de los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica en la resolución de problemas matemáticos, en este caso, algebraicos (Godino, 2007; Gusmao 2006; Osses & Jaramillo,

2008). Así, una propuesta que explore los aspectos antes mencionados, seria de especial importancia, pues, como indican Schoenfeld (citado en Barrantes, 2006) y Godino (2017), permitirían avanzar progresivamente hacia el mejoramiento de la educación matemática, en la didáctica de la resolución de problemas.

En consecuencia, desde la revisión de la literatura, las evidencias estadísticas, la percepción de docentes, estudiantes y el pronóstico de la situación, se puede concluir que, si no se explora en detalle los componentes de los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica, en la resolución de problemas algebraicos con los estudiantes de grado octavo del municipio de Chigorodó, difícilmente podrán clarificarse y especificarse los procesos didáctico curriculares de la educación matemática para la enseñanza de la resolución de problemas. Si esto no ocurre, la problemática de incomprensión de las matemáticas continuará, y los estudiantes seguirán con la tendencia actual de bajo rendimiento en las habilidades de resolución. A su vez, si esto ocurre, el impacto social ocasionado será una respuesta deficiente ante las exigencias del contexto, como ciudadanos que deben desarrollar sus aptitudes plenamente para el servicio sociocomunitario y el mejoramiento continuo de esta (Godino, 2007; Gusmao, 2006; OCDE, 2017).

Por lo anterior, desde los Lineamientos Curriculares publicados por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 1998), se invita a transformar el papel esencialmente instrumental con que se ha enseñado la resolución de problemas en la escuela, dado que estos trascienden a la vida real, donde se utiliza más que algoritmos o instrucciones nemotécnicas dadas por terceros. Por ello, precisa que “las habilidades en la resolución de problemas dependen de usar y manipular el lenguaje simbólico, los procedimientos y algoritmos y, por otra, en el desarrollo del pensamiento lógico formal de manera autónoma por los estudiantes” (p. 8). Esto se constituye en un soporte adicional a las investigaciones anteriormente citadas a lo largo de la descripción del problema, donde se muestra que la estructuración de la Resolución de Problemas Algebraicos, RPA, implica el estudio de la transformación semiótica, que incluye diversos tipos de lenguajes, las reglas sintácticas y semánticas del mismo, y la metacognición, que el MEN (1998) denomina “pensamiento lógico formal” (p.9).

En consecuencia, la estrategia para controlar el pronóstico del problema consiste en estructurar la RPA a través de la exploración de los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica, que se ponen en juego, en la resolución de problemas algebraicos, clarificando nociones de tipo teórico didácticas en su aplicación fáctica.

En efecto, la exploración y análisis de la sintáctica y semántica de los distintos lenguajes en que puede enunciarse un problema, es decir el dominio de distintas representaciones, es necesario para empezar un proceso gradual de transformación de la enseñanza de las matemáticas que permita superar las limitaciones que hoy padece. El MEN (2006) apoya esta idea, al destacar que modelación de procesos y fenómenos de la realidad, es decir, la traducción desde la percepción de hechos físicos o sociales al lenguaje matemático, la comunicación y el razonamiento, la comparación y ejercitación de procedimientos y algoritmos son las competencias base de la formulación y resolución de problemas matemáticos. Incluso, va más allá cuando precisa que es necesario "estudiar con más amplitud y profundidad las relaciones dialécticas entre el pensamiento, las ideas matemáticas, el lenguaje matemático, sistemas de signos y las situaciones problemas para cuya resolución se inventan tales recursos" (Gusmao, 2006; p.17).

En esa línea, el National Council of Teachers of Mathematics[5] (NCTM, 2000) afirma que los extensos procedimientos aritméticos y algebraicos, vistos como el corazón del currículo matemático escolar, se pueden ejecutar por medio de las calculadoras. Así, se podrá dar mayor atención a la comprensión de conceptos y modelos en los procedimientos utilizados en la resolución de problemas. Por lo tanto, se reafirma la idea anterior que, como estrategia de control del pronóstico, la estructuración de la Resolución de Problemas Algebraicos, RPA, explorará la gramática o conceptualización para interpretar diversas situaciones a través de modelos y para evaluar los procesos seguidos relacionados con la metacognición, mencionados por Rodríguez (2006).

Además, desde la parte estructural de la exploración, se toma como referencia el EOS, cuyas nociones ontológicas y semióticas de objetos matemáticos, a nivel general, se constituyen en un punto de partida, para sustentar la subsiguiente exploración que se

[5] Asociación de profesores de matemáticas de los Estados Unidos

realizara en esta investigación, y clarificar ciertas nociones de la didáctica de la resolución de problemas ya abordadas por dicho enfoque, tal como lo sugirió Godino, Giacomone, Font y Pino (2018), al decir que "es necesario precisar y delimitar los objetos matemáticos para poder avanzar realmente en la didáctica de la resolución de problemas y en el progreso mundial de la educación matemática"(p. 23).

Hasta este punto y retomando lo dicho en el pronóstico del problema, si no se clarifican y especifican cada vez más, las nociones teórico didácticas referidas a los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica, la educación matemática en la resolución de problemas no podrá avanzar hacia la creación de un currículo con mayor pertinencia, lo que ocasionara, en últimas, que los estudiantes sigan con desempeños bajos en la resolución de problemas algebraicos en las pruebas externas, y su aporte social no sea el que los fines de la educación establece (OCDE, 2017). Por lo tanto, para impedir que suceda el pronóstico anterior, se explorará la estructura de los saberes previos, estrategia metacognitiva y transformación semiótica en la resolución de problemas algebraicos, desde la perspectiva del EOS, con estudiantes del grado Octavo de básica secundaria del municipio de Chigorodó Antioquia.

En síntesis, en esta sección se realizó un abordaje del problema desde la revisión de la literatura y desde el contexto o praxis pedagógica, así como el pronóstico y control del mismo. En primer lugar, luego del análisis de la literatura, se encontró que la resolución de problemas algebraicos tiene tres grandes componentes críticos: saberes previos estrategias metacognitivas y transformación semiótica. Además, se encuentra la necesidad de seguir clarificando y especificando en términos teórico didácticos, las investigaciones sobre el método de Polya y el EOS de Godino, en lo que respecta a la resolución de problemas. En segundo lugar, desde el contexto pedagógico, la información obtenida por las estadísticas de evaluación nacionales y puntualmente de las instituciones focalizadas, así como la percepción de docentes y estudiantes, coinciden en que falta una exploración de nociones previas, tales como operaciones, conceptos, definiciones, que corresponden a conocimientos previos, así como estrategias de resolución de problemas, autorregulación, que podría asociarse con las estrategias metacognitivas, así como en los procesos propiamente algebraicos de generalización, relación, generación, modelación,

argumentación, referentes a la transformación semiótica, que los estudiantes movilizan mentalmente, para solucionar problemas algebraicos.

2. Formulación de la pregunta de investigación

¿Qué componentes estructuran los saberes previos, las estrategias metacognitivas y la transformación semiótica, en la resolución de problemas algebraicos, desde la perspectiva del EOS, con estudiantes del grado Octavo de básica secundaria del municipio de Chigorodó – Antioquia?

3. Objetivos de la investigación

3.1. Objetivo general

-Analizar los saberes previos, las estrategias metacognitivas y la transformación semiótica en la resolución de problemas algebraicos, desde la perspectiva del EOS, con estudiantes del grado octavo del municipio de Chigorodó Antioquia.

3.2. Objetivos específicos

-Identificar los saberes previos en la resolución de problemas algebraicos, fundamentados en definiciones, axiomas, teoremas de las operaciones en números reales y su noción algebraica

-Describir las estrategias metacognitivas implicadas en la resolución de problemas algebraicos, desde los aspectos de la planeación, regulación o control y evaluación de tareas.

-Interpretar la transformación semiótica de registros de representación en la resolución problemas algebraicos, con base en los niveles uno, dos y tres de algebrización.

REPOSITORIO UNEFA

4. Justificación e impacto

En este apartado se argumenta la justificación para desarrollar el presente estudio, sustentada en los aportes y contribuciones que el cumplimiento de los objetivos representa para el ámbito social, teórico y metodológico.

En cuanto al aporte social, investigación permitirá un acercamiento progresivo a los procesos implicados entre el planteamiento de un problema y el proceso resolutivo mediado por el sujeto cognoscente, el estudiante, con una visión desde lo procedimental y lo psicopedagógico, útil para estudiantes de cualquier nivel educativo, en especial de básica secundaria, que deseen mejorar sus competencias en la resolución de problemas algebraicos. De manera más específica, a los estudiantes les ayudará a desarrollar mejores destrezas en la resolución de problemas matemáticos, aumentando la percepción y metacognición de procesos en la identificación, replicación de procedimientos, esquemas mentales y patrones de pensamiento exitosos, entendiendo el constructo de cada avance o paso realizado como nuevo objeto de análisis. Lo anterior cobra especial importancia, dada la actual la hegemonía de la era digital del siglo XXI, en una sociedad transcompleja que exige nuevas competencias en sus ciudadanos, tales como la metacognición.

Respecto al aporte curricular, los docentes tendrán una herramienta base para direccionar el Aprendizaje Basado en Problemas, ABP, a partir de la clarificación y reflexión sobre los procesos seguidos por ellos mismos y sus estudiantes en la resolución, para hacer más eficaz y eficiente sus prácticas formativas y resolutivas. En resumen, tanto docentes como estudiantes podrán comprender de manera más profunda cómo interactúan los componentes de sus saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica, para ser más competentes en sus procesos de resolución de problemas algebraicos.

De manera más amplia, al afectar a los dos sujetos directos del proceso educativo, docente y estudiante, esta investigación se proyecta hacia una visión institucional, local, regional y nacional, cuyos resultados del estudio sentarán las bases didácticas de un

proyecto educativo transversal basado en la instrucción controlada de saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica cómo un corpus estratégico para solucionar problemas, especialmente en álgebra, y crear a nivel interinstitucional grupos de investigación de docentes, para analizar la resolución de problemas, como objeto de estudio disciplinar propio e independiente, con el fin de esclarecer progresivamente los objetos conceptuales y procedimentales implicados en el proceso de resolución. Esto permitirá que, tal como afirma OCDE (2017), los estudiantes obtengan mejores desempeños en las evaluaciones nacionales e internacionales y lleguen a ser ciudadanos que contribuyan al desarrollo y progreso de la sociedad.

En relación con la contribución teórica, dado que uno de los intereses de la Didáctica de las Matemática es identificar el significado que los alumnos atribuyen a los objetos, conceptos, propiedades matemáticas, etc.; así como la clarificación de los objetos, conceptos y praxeologías que interaccionan en el proceso de resolución de un problema matemático, los resultados de esta investigación serán un aporte valioso que permitirá clarificar y especificar en profundidad los aspectos ecológicos de los objetos matemáticos en situaciones didácticas, relativos a las transformaciones semióticas, así como las estrategias metacognitivas y los saberes previos que son necesarios para resolver la familia de problemas algebraicos. Esto implicará una mejor comprensión de las relaciones dialécticas entre el pensamiento, las ideas matemáticas; el lenguaje matemático, sistemas de signos y las situaciones problema para cuya resolución se utilizan tales recursos, que a su vez, permitan la clarificación teórica, que a juicio de Schoenfeld (citado en Barrantes, 2006) y Godino et al. (2015) hace falta en el método de Polya y en el EOS.

Adicionalmente, permitirá reflexionar respecto a la naturaleza del procesamiento de la información en la mente humana, si es emergente, determinista, o ambos, con el fin sentar las bases para investigaciones futuras que se interesen en avanzar hacia un modelo cognitivo que explique el proceso de resolución de problemas matemáticos, con aplicación pedagógica. Incluso, el esclarecimiento de las variables, conceptos, procesos implicados en la resolución de problemas, permitirá profundizar el conocimiento desde unos cuantos postulados ya establecidos en el EOS, para establecer nuevas relaciones. Así, obtener un nivel profundo de clarificación teórico conceptual, tras el análisis de la información

recogida en la literatura y en campo, se constituye en insumo, para avanzar hacia un modelo formal, con implicación pedagógica, de resolución de problemas matemáticos.

Respecto al valor metodológico, El NCTM[6] (como se citó en Ruiz & Chavarría, 2003) afirma la necesidad de otorgar mayor atención a la comprensión de "conceptos y modelos en los procedimientos utilizados en la resolución de problemas" (p. 8). De ahí que el aporte más notable, sea sentar las bases para la creación y desarrollo de estructuras y métodos didácticos que hagan más evidente el nexo entre las representaciones mentales y los procesos observables del estudiante (Maza, citado en González, 2000).

En conclusión, esta propuesta de investigación se justifica en razón de sus aportes sociales, teóricos y metodológicos. En primer lugar, en el aspecto social, los docentes del área de matemáticas dispondrán de una estructura de objetos de aprendizaje, como base para la enseñanza de la resolución de problemas, adaptable al estilo cognoscitivo de sus estudiante, además, los estudiantes tendrán nuevas técnicas y herramientas para resolver problemas algebraicos, con el fin de obtener mejores resultados en las pruebas externas e internas. Asimismo, podrán formarse como ciudadanos que resuelvan problemas comunitarios mediante el pensamiento reflexivo-crítico. En el aspecto teórico, se complementará la estructura conceptual del EOS, TRRS, TCC y el método de Polya, clarificando objetos, conceptos, nociones personales e institucionales, representaciones mentales, praxeologías propios de los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica, así como su estructuración, en el proceso de resolución de problemas algebraicos. Por ultimo, en el aspecto metodológico se implementará un proyecto educativo, con ajustes curriculares a la forma tradicional de la enseñanza de la matemática, específicamente, en relación con la resolución de problemas, donde los aprendizajes se organicen con base en la estructura cognoscitiva derivada de este estudio y adaptada por el estudiante, con la delimitación de los componentes integrantes de las estrategias metacognitivas que posibilitan aplicar transformaciones semióticas progresivas a los saberes previos.

[6] Asociación de profesores de matemáticas de los Estados Unidos

5. Alcances y Limitaciones

En este apartado se describen los alcances y limitaciones de la presente investigación, a partir de cada uno de los objetivos previamente planteados y desde el aspecto metodológico, comprendido por la finalidad epistemológica, el tipo de población, muestra, referencias teóricas, instrumentos de recolección de datos, uso y tratamiento de la información, mencionando las fronteras teóricas y didácticas de la misma.

5.1. Alcances

Respecto al primer objetivo de esta investigación, a saber, identificar los saberes previos en la resolución de problemas algebraicos, fundamentados en definiciones, axiomas, teoremas de las operaciones en números reales y noción algebraica (variable, constante, despeje), en primer lugar, se espera precisar los recursos conceptuales y procedimentales, sin contextualizarlos en un problema específico (es decir, saberes no en acto[7]) que, como mínimo, un estudiante debe comprender y operacionalizar, como prerrequisito para la posterior puesta en contexto en problemas específicos. Para ello, este estudio se fundamentará en las nociones teorico-conceptuales de Godino (2012), Duval (2016) y Vergnaud (2016).

En cuanto al segundo objetivo, caracterizar las estrategias metacognitivas implicadas en la resolución de problemas algebraicos, desde los aspectos de la planeación, regulación o control y evaluación, se pretende desagregar un conjunto de tareas en acto (para identificar, modificar y/o transformar los recursos cognitivos o saberes previos y creencias de base, así como emergentes) que permitan el avance progresivo de un paso a otro en la resolución de un problema concreto, con base en la nociones teorico-conceptuales, planteadas por Rodríguez (2005) y Gusmao (2006).

Frente al tercer objetivo, interpretar la transformación semiótica de registros de representación en la resolución problemas algebraicos, con base en los niveles uno, dos y

[7] Es decir, no en su sentido operatorio, como medio para obtener un resultado parcial o definitivo en la resolución de un problema algebraico.

tres de algebrización, se pretende clarificar[8] y fundamentar operacionalmente las funciones semióticas (en acto y no en acto) subyacentes en la aplicación de estrategias metacognitivas, desde una perspectiva didáctica, que permitan las transformaciones de conversión y tratamiento en los registros natural, aritmético, algebraico, pictórico y figural, con el fin de lograr avances epistémicos progresivos durante la resolución de problemas algebraicos.

En relación con la metodología de investigación, en primera instancia será de alcance exploratorio descriptivo, es decir, a partir del análisis de la literatura y de la investigación en campo, se clarifican las nociones de saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica. En segunda instancia, el procedimiento metodológico será de alcance descriptivo comprensivo, esto es, se llegará hasta la recolección de información sobre las categorías de análisis, como parte y todo, para encontrar relaciones estructurales cognoscitivas de sinergia entre ellas, durante la resolución de problemas algebraicos, sin pretender formalizar un modelo de resolución de problemas algebraicos, propiamente dicho.

Por otra parte, el alcance poblacional de esta investigación se extiende a los estudiantes de las instituciones educativas públicas urbanas del municipio de Chigorodó pertenecientes al nivel de educación básica secundaria de grado octavo, con edades entre los 13 y 15 años y con los conocimientos previos esperados según los objetivos planteados. Esta población fue escogida por varias razones: en primer lugar, porque la ubicación geográfica coincide con el domicilio del investigador, lo que le facilita el transporte entre las instituciones educativas focalizadas; en segundo lugar, la carga académica del docente investigador está distribuida, precisamente en los grupos de grado octavo. En tercer lugar, el desarrollo cognitivo esperado en las edades de estos estudiantes es el idóneo para la implementación y desarrollo del área disciplinar de la investigación, el álgebra. Ahora bien, no se estudia una población más amplia, a nivel regional, departamental o nacional, por la dificultad de movilización geográfica y multigestión que implicaría una investigación de semejante extensión, con costos de desplazamiento elevados por fuera de las capacidades del investigador.

[8] Desde los vacíos teóricos del TRRS, TCC y EOS, según Godino (2012).

En cuanto a las referencias bibliográficas utilizadas, se estudian las que priorizan los aspectos relacionados con la transformación semiótica presente en el EOS de Godino et al. (2007, 2015, 2018), D´ Amore (2005), la TRRS de Duval (2016) y la TCC de Vergnaud (2016); con los componentes integrantes de las estrategias metacognitivas, abordados por Gusmao (2006), Osses y Jaramillo (2008) y Rodríguez (2005); y los elementos definitorios de los saberes previos, desglosados por Schoenfeld (citado en Barrantes, 2006) y el mismo Godino (2012), con una prespectiva didáctica orientada al modelo de estudiante estándar (con aptitudes y actitudes esperadas).

Sin embargo, esta investigación no llega al punto teórico de reducir el proceso de resolución de problemas algebraicos a un modelo puramente simbólico y relacional según Russell (citado en Montealegre, 2007). Tampoco se profundiza en los aspectos del insight o iluminación repentina emergentes la resolución de problemas, según Hadamard y Poincare (citado en Cañón & García, 2018).

Además, quedan por fuera las referencias que explican la resolución de problemas algebraicos desde una perspectiva neurológica, tales como Qin et al. (citado en Radford & André, 2009); así como las que incluyen los sistemas afectivos de Schoenfeld (citado en Barrantes, 2006), y las referencias bibliográficas o investigaciones que abordan el pensamiento algebraico para estudiantes con necesidades educativas especiales, tales como Montes de Oca, Carrillo y López (2018). Por último, debido a la extensión teórica que abarca la familia de problemas algebraicos, en esta investigación solo se abordan aquellos que se pueden modelar a través de ecuaciones de primer grado. Así, todas las referencias mencionadas en esta sección no se estudian en razón de que abarcan múltiples disciplinas en altos niveles de extensión, exhaustividad y traslape teórico, lo cual acabaría por saturar la investigación con más categorías, siendo prácticamente imposible desarrollarla en el tiempo previamente estipulado (Lozano et al. 2007).

Por último, en el marco de referencia académico de la Universidad Metropolitana de Educación, Ciencia y Tecnología, UMECIT, el presente estudio se incluye en la línea de investigación de Educación y sociedad, en el área de docencia y currículo y eje de teorías de aprendizaje cuyo énfasis del programa académico es la investigación, evaluación y formulación de proyectos educativos. Así, el alcance de esta investigación desde el énfasis

del programa académico consiste en realizar un proceso de investigación rigurosa desde la literatura especializada y el trabajo de campo, sobre la realidad concerniente a la educación matemática, para utilizar dichos resultados, como insumo disciplinar en la formación de proyectos institucionales que favorezcan el aprendizaje y la educación integral, con el fin de formar ciudadanos productivos en el ámbito personal, profesional, laboral y social.

5.2. Limitaciones

Respecto a las limitaciones obtenidas en el análisis de datos de la presente investigación, no puede asegurarse la generalización de los resultados, dada su naturaleza, metodología utilizada, la muestra empleada. Sin embargo, por tratarse de una investigación temprana, es posible que en las investigaciones sucesivas se amplíe la muestra, en diferentes sitios geográficos del país y del mundo. Quizá en los estudios posteriores se aumente la muestra e incluya diseños cuantitativos con mayor profundidad y extensión, quizá de tipo longitudinal, que permitan realizar estimaciones estadísticas con un grado mayor de generalidad.

Sobre los instrumentos de recolección de datos, desde su construcción existe una subjetividad insalvable del investigador quien se predispone a la información que será plasmada en los instrumentos de acuerdo a su propia valoración realizada de los procesos de resolución seguidos por los estudiantes. Aquí es necesario hacer énfasis en dos aspectos. En primer lugar, es posible "contaminar" la investigación con la subjetividad del investigador, quizá omitiendo o extralimitándose en la información derivada de la reflexión e interpretación crítica de los procesos seguidos por los estudiantes en la resolución de problemas, afectando así la validez de estos (Latorre, Rincón & Arnal, 2005). En segundo lugar, en los mencionados procesos construidos por los estudiantes, es difícil que estos describan o metacognicen de la forma más explícita posible todos los recursos cognitivos que han entrado en juego o han sido utilizados por él, por mínimos que parezcan, en la resolución de un problema algebraico propuesto, por lo que no quedarían registrados en los instrumentos de recolección de datos.

De acuerdo con lo anterior, la capacidad de los instrumentos para hacer visible el comportamiento de los estudiantes en los aspectos categoriales de la investigación, tienen, básicamente, dos limitaciones: la cantidad y calidad de información que el estudiante es capaz o quiere mostrar en dichos instrumentos, es decir, su poder de evidenciar el propio fenómeno interno cognitivo y metacognitivo de los saberes previos en la resolución de problemas algebraicos, y el nivel de lectura crítica del investigador que lo interpreta, para valorar y utilizar objetivamente sus datos plasmados. Lo anterior se sustenta en el argumento de Murillo (2011)

> Las características de los fenómenos humanos presentan dificultades en la observación y cuantificación. Esto quiere decir que es muy difícil valorar el mundo psíquico o interior de los sujetos ya que no es observable. Las técnicas de datos disponibles no son los suficientemente precisas y exactas por lo que se hace muy difícil llegar a conocer la realidad. (p.14)

Entonces, es evidente que la limitación de los instrumentos se explica por la dificultad que existe para caracterizar los fenómenos internos, de tipo cognitivo y metacognitivo del ser humano; lo cual afecta la exactitud y precisión de dichas técnicas e instrumentos para representar a cabalidad los componentes de los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica, que, internamente en el individuo, interaccionan sinérgicamente en la resolución de problemas algebraicos.

En lo relacionado con la muestra, dado que en cada institución por separado se conformará un grupo de control y uno de estudio, una limitación consiste en no poder tener, en general, las mismas condiciones de campo o institucionales al mismo tiempo en los grupos que conforman la muestra. Lo anterior es muy posible, debido a que existen diferencias significativas en la descripción y desarrollo del cronograma administrativo de cada institución focalizada, lo cual aumenta la probabilidad de que la información recogida de la investigación sobre la estructura ontosemiótica de las estructuras cognitivas y metacognitivas de los saberes previos en el proceso resolutivo de cada grupo de estudiantes

en instituciones distintas, presenten diferencias debidas simplemente al tiempo y circunstancias de estas y no a factores propiamente de la investigación.

CAPÍTULO II. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA DE LA INVESTIGACIÓN

RED UNEG

Este capítulo se encuentra estructurado con los siguientes apartados: antecedentes históricos e investigativos; bases teóricas y conceptuales; bases éticas y legales; sistema de categorías y su conceptualización y matriz de categorización.

En primer lugar, en los antecedentes históricos se expone la trazabilidad de concepciones y posturas de distintos autores representativos, sobre estrategias para la resolución de problemas matemáticos; desde la edad antigua, hasta la edad contemporánea. En segundo lugar, en los antecedentes investigativos se presentan diversos estudios desarrollados en el transcurso de los últimos diez años, sobre los aspectos determinantes en la resolución de problemas algebraicos, tales como los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica en un contexto educacional, clasificados según la ubicación geográfica de la respectiva investigación. Además, cada antecedente investigativo consta de la siguente estructura: autor, año de publicación, titulo, objetivo, metodología, resultado, aportes y tendencias por categoría de análisis.

En tercer lugar, en las bases teóricas y conceptuales se exponen las teorías generales y sustantivas de esta investigación. En cuanto a las primeras, se asumen desde una orientación psicológica, que, según Gangoso (2016), es inherente a toda teoría que pretenda explicar el proceso de resolución de problemas en el ser humano. Así, en las teorías generales se incluye la Teoría de la Gestalt, Teoría Conductista y la Teoría cognitiva. En esta última, se tratan por separado los enfoques artificiales y biológicos, en función de la perspectiva de analisis: en el primer caso, desde la analogía máquina y pensamiento humano; en el segundo caso, desde los procesos funcionales del pensamiento. Asimismo, en cada una de las teorías que integran dichas clasificaciones, se describe la naturaleza y rol de los conceptos que se relacionan en el proceso de resolución de problemas y se sintetiza el concepto de problema y resolución de problemas subyacente. Posteriormente, a partir del

análisis de cada teoría, nuevamente se sintetizan sus concepciones de problema y resolución de problemas, para derivar una postura ecléctica de las teorías generales. Por último, se presenta la relación existente entre las teorías generales y las categorías de análisis.

Respecto a la teoría sustantiva, se realiza una trazabilidad conceptual, desde los fundamentos de la matemática, construcción, naturaleza y conceptualización, a partir de los cuales se conciben las practicas personales del sujeto en la resolución de problemas matemáticos, como un constructo socioepistémico. En concordancia con la concepción anterior, en el presente marco teórico se adopta el Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, EOS, de Godino (1994), cuyo objeto central es el análisis de la dimensión personal y socioinstitucional, como determinantes del estilo de práctica matemática de los sujetos en la resolución de problemas matemáticos. En dicho analisis se incluyen aspectos teóricos de la Teoría Representaciones Semióticas de Duval (2004) y la Teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990), desde el ámbito matemático, hasta el contexto algebraico. Por último, se sintetiza el concepto de problema y resolución de problemas, desde la perspectiva del EOS y se muestra la relación de este enfoque con cada una de las categorías de análisis.

En cuarto lugar, en el apartado de bases éticas y legales, se incluyen los aspectos que son susceptibles de vulnerar la integridad física o emocional de los participantes del proceso de investigación, así como las estrategias utilizadas para mitigar dicho inconveniente. Adicionalmente, se desarrolla un normograma, estructurado con los documentos, leyes, decretos, ordenanzas, planes, de naturaleza legal, desde el ámbito internacional, hasta el ámbito local, caracterizando las instituciones educativas focalizadas que son objeto del presente estudio. Posteriormente, en el apartado de sistema de categorías y su conceptualización, se desarrolla la definición conceptual y operacional de cada categoría, mediante la estructura de una serie de criterios que dan cuenta de su apropiación, a la vez que constituyen un marco de referencia para la elaboración de los instrumentos de recolección de datos y la posterior valoración de los resultados.

Por último, se presenta la matriz de categorización, en la cual se clasifican las categorías de análisis de esta investigación, en función del objetivo específico que

desarrollan, de las subcategorías que las desagregan, de las fuentes de campo de donde se extrae la información y en función de las técnicas de recolección de datos.

1. Antecedentes históricos e investigativos

Desde los comienzos de la historia de la humanidad la resolución de problemas matemáticos, sea con el objetivo de cuantificar, encontrar una cantidad desconocida, explicar fenómenos, construir modelos operacionales para fines puros y aplicados; ha sido un tema central en la actividad matemática. Sin embargo, el asunto concerniente a identificar y precisar los métodos utilizados para resolver problemas, como área de estudio independiente en la educación matemática, es relativamente reciente. Así, en este apartado se presentan los resultados de la revisión bibliográfica que a manera de antecedentes dan cuenta de las estrategias y técnicas empleadas para resolver problemas matemáticos, de acuerdo con el grado de significación y relevancia para el presente trabajo investigativo. En primer lugar, se realizó una revisión histórica de estudios orientados a la instrucción específica de estrategias de resolución de problemas matemáticos, donde se abordan los trabajos de René Descartes, Henri Poincaré, Hadamard, Polya, Bloom, Mayer, Schoenfeld y Godino. En segundo lugar, se realizó una revisión de investigaciones modernas, las cuales, partiendo de los enfoques históricos de la resolución de problemas matemáticos, incluyen los saberes previos, las estrategias metacognitivas y la transformación semiótica, como elementos clave en la resolución de problemas matemáticos, especialmente los de tipo algebraico.

1.1. Antecedentes históricos

En este apartado se realizó una trazabilidad histórica de los estudios desarrollados en torno a las estrategias de resolución de problemas matemáticos desde la época antigua, hasta la época contemporánea. Para ello se efectuó un rastreo bibliográfico de recopilaciones de estudios e investigaciones históricas, en bases de datos científicos reconocidas, tales como Scielo, Dialnet, Google Académico, Researchgate y Redalyc. Los

tópicos utilizados para la búsqueda en las mencionadas bases de datos fueron: historia de la resolución de problemas matemáticos, resolución de problemas matemáticos en la antigüedad y trazabilidad histórica de resolución de problemas matemáticos.

En relación con el asunto de identificar y precisar estrategias para resolver problemas matemáticos, en la edad antigua, Sócrates utilizó la mayéutica como herramienta para ayudar a sus "estudiantes" en la resolución de problemas matemáticos, sin embargo, no hubo mayor reflexión en torno a que procesos cognitivos estaban implicados en las respuestas que daban los estudiantes a los cuestionamientos pedagógicos planteados por su mentor, ni en la clase de preguntas que podrían utilizarse recurrentemente en situaciones problema de la misma naturaleza, para orientar el proceso de resolución con cierto nivel de generalidad (Morales, 2017).

En esa misma época, Platón aportó a las estrategias de resolución de problemas, y en general, al estudio de las matemáticas, desde su posición de idealismo objetivo. A él se le debe la concepción actual de los objetos matemáticos, al señalar que "los razonamientos que hacemos en geometría no se refieren a las figuras visibles que dibujamos, sino a las ideas absolutas que ellas representan" (Boyer, citado en Sigarreta, Rodríguez & Ruesga, 2006, p. 3). Así, esta concepción temprana sobre estrategias de resolución de problemas, se constituye en una primera referencia al concepto de representaciones semióticas de los objetos matemáticos, propia de la Teoría de Registros de Representación Semiótica, TRRS, de Duval (2016).

Ahora bien, a modo de técnica de evaluación del procedimiento seguido durante la resolución de problemas, Aristóteles desarrolló el método deductivo, por el cual se infieren conclusiones particulares, a partir de principios o leyes universales, mediante reglas de inferencia, que regulan los pasos válidos para pasar de un punto al siguiente, tales como el modus ponendo ponens, tollendo tollens, etc. (Puig, 2019). En esa línea, Euclides, utilizó el método deductivo en la geometría, partiendo de un número finito de definiciones y axiomas, como verdades universales, para deducir conocimientos particulares en dicha área de conocimiento. De esta manera, estableció un mecanismo que permite garantizar la validez de los procesos terminados, durante la resolución de problemas matemáticos (Anacona, 2003).

Además, Pappus de Alejandría, a quien se le atribuye la noción de heurística, propone la rama de estudio denominada Analyomenos, que significa el arte de resolver problemas (Embus & Reyna, 2014). Una de sus estrategias consiste en asumir que la solución está dada y se trabaja desde la solución hipotética hacia el inicio, hasta encontrarse con algo ya conocido o que se sabe verdadero. La otra, es comenzar desde el inicio hacia el final, considerando el conocimiento matemático, axiomas y teoremas ya probados, para avanzar hacia el final, es decir, hacia el resultado. A estos dos métodos se les denomina análisis y síntesis respectivamente (Embus & Reyna, 2014). En esa línea, el matemático Arquímedes, utilizo la heurística, la analogía, los argumentos, contraargumentos, casos particulares, casos generales, para la resolución de problemas geométricos, con técnicas algebraicas (Cantoral, 2014).

Más tarde, en la edad media, los matemáticos árabes Al Juarismi, Al Battani, Aryabhata, Brahmagupta y Bháskara, aportaron a la resolución de problemas matemáticos, a través de la utilización de técnicas algebraicas (Sigarreta et al., 2006).

Siglos después, ya en la edad moderna, René Descartes desarrolló la geometría analítica para transformar problemas geométricos en algebraicos, planteando que el cambio de representación de un problema, puede conducir a su solución. Esta concepción sobre el proceso de resolución, al igual que el método platónico, y el método algebraico de los matemáticos árabes, son referencias que se constituyen en precedentes teóricos de la TRRS de Duval (2016).

Además, Descartes publicó en 1637 un método para resolver problemas algebraicos al que llamó “Discurso del método” donde aparecen los siguientes cuatro pasos:

1. No aceptar nada como cierto hasta no haber reconocido claramente que lo es.
2. Dividir cada dificultad por examinar en tantas partes como sea posible.
3. Llevar a cabo mis reflexiones en el orden debido, comenzando con los objetos más simples y fáciles de entender.
4. Hacer las enumeraciones tan completas y las revisiones tan generales que pueda tener la seguridad de no haber omitido nada. (Moreno, Rubí & Pou, 2015, p.63)

En esta misma época, se destaca el trabajo de Euler, quien mostraba explícitamente sus heurísticas, entre las que destacan la analogía y el análisis, aplicadas en la actividad de resolución de problemas. Este matemático fue tan prolífico, que, a menudo, es considerado como "el matemático más hábil para la creación de algoritmos y estrategias generales para la solución de problemas, que jamás haya existido" (Castro, citado en Sigarreta et al., 2006, p.7).

Asimismo, la heurística, como estrategia de resolución de problemas matemáticos; y, ampliamente, como estudio de las reglas y métodos de construcción de nuevo conocimiento, recibió contribuciones de grandes científicos como Leibniz y Bolzano (citado en Quispe, 2020). Estos autores tomaron como referencia su actividad introspectiva en recursos obtenidos de su experiencia, con el fin de crear un método que condujera a la solución de problemas, a partir de las operaciones mentales que utilizaban en dicho proceso. Es de notar que estos autores manifiestan que los resolutores talentosos los aplican conscientemente, pero pocas veces los explicitan, en vez de eso, se centran en la exposición formal de la solución del problema, como producto acabado de las heurísticas inicialmente utilizadas (Quispe, 2020).

Hasta este punto, desde la edad antigua, hasta la edad moderna, se puede decir que, para resolver problemas matemáticos, se concebían heurísticas estructuradas con técnicas generales, aplicables a cualquier problema, no algorítmicas; así como técnicas específicas, de tipo algorítmico. En una perspectiva actual, estos aspectos, bien pueden incluirse como componentes de las estrategias metacognitivas y transformaciones semióticas (Soto & Vallori, 2011).

Continuando con la trazabilidad histórica, ya en la edad contemporánea, el matemático Henri Poincaré analiza cómo ocurre la resolución de problemas matemáticos en su publicación de 1908 "*Science et Methode*", Ciencia del Método, en la que destaca cuatro fases:

REPOSITORIO

1. Saturación, actividad consciente que implica trabajar en el problema hasta donde sea posible;
2. Incubación, el subconsciente es el que trabaja
3. Inspiración, la idea surge repentinamente, "como un flash"
4. verificación, chequear la respuesta hasta asegurarse de su veracidad. (Arreaza & Valencia, 2015, p. 18)

Sin embargo, se debe precisar que la idea repentina sobreviene si hay saberes previos, como materia prima, para realizar procesos cognitivos. Por ello, a pesar que al principio la habilidad de razonar, es decir, de hacer la ruta cognitiva procedimental de forma consciente, tenga mayor demanda cognitiva y sea la actividad mental predominante, con el tiempo se automatizan pasos y podrán llegar las "iluminaciones" de las que habla Poincaré, para crear atajos teóricos que permitan ver de golpe la solución o un camino hacia ella (Arreaza & Valencia, 2015).

En esta perspectiva de Poincaré, se observa un enfoque cognitivo y metacognitivo en la resolución de problemas matemáticos, donde implica técnicas generales y específicas. De hecho, su obra puede entenderse como un complemento paradigmático en torno a la reflexión sobre los aspectos implicados en la resolución de problemas, desde donde se orienta la acción de las técnicas específicas, implicando procesos de razonamiento y verificación para un problema dado.

Otra importante contribución fue realizada por J. Hadamard en su libro "*An essay on the psychology of invention in the mathematical field"*, publicado en 1945 en la época contemporánea. Hadamard prosigue y profundiza el punto de vista de Poincare, resaltando la actividad consciente, la reflexión y el trabajo inconsciente. De manera similar, este matemático propone un esquema algo más exhaustivo para explicar el proceso de creación matemática en las siguientes fases

1. Documentación: informarse, leer previamente, escuchar, discutir.

REPRINT

2. Preparación: realizar un proceso de ensayo-error sobre diferentes vías e hipótesis, considerando un cambio eventual de actividad en caso de no obtener ningún progreso.
3. Incubación: al cambiar de actividad;
4. Iluminación: ocurre la idea repentina;
5. Verificación: la idea debe someterse al análisis y comprobación, al juicio crítico;
6. Conclusión: ordenación y formulación de los resultados. (Sigarreta, Rodríguez & Ruesga, 2006, p.60)

Analizando las concepciones de este autor relativamente reciente, se observa una continuidad paradigmática en torno a la búsqueda de estrategias metacognitivas para enfrentar exitosamente los problemas matemáticos y un avance metodológico. Al igual que Hadamard (1945), incluye aspectos cognitivos no observables que ocurren en la resolución de problemas matemáticos tales como la incubación e iluminación que ocurren mientras conscientemente se aplican estrategias. Sin embargo, incluye aspectos cognitivos nuevos, tales como la documentación previa, que podría interpretarse como un acervo de conocimientos o saberes previos con que debe contar el resolutor antes de resolver un problema, además, sugiere la heurística de ensayo y error, que es una estrategia metacognitiva, así como un último paso luego de verificar la solución, a saber, la organización y presentación de esta. Así, el hecho que un individuo utilice este set list y pueda seleccionar y aplicar sus pasos, conscientemente, se constituye en una estrategia metacognitiva.

Continuando con las estrategias de resolución de problemas, George Polya, en la época contemporánea, en su publicación “How to solve it” en 1945 condensa su método en las siguientes heurísticas

1. Comprender el problema
2. Concebir un plan
2.1. Determinar la relación entre los datos y la incógnita.
2.2. De no encontrarse una relación inmediata, se consideran problemas auxiliares.

2.3. Obtener finalmente un plan de solución.

3. Ejecución del plan

4. Examinar la solución obtenida. (Moreno et al., 2015, p.61)

Del análisis del método de Polya en ese momento histórico, se observa una concepción de problema y estructura del mismo, previamente establecidas, las cuales se toman como fundamento explicito para proponer estrategias de resolución de problemas matemáticos. Todo lo anterior, que recibió el nombre de heurísticas, impulsó procesos posteriores de adaptación y clarificación didáctica de las estrategias resolutivas en los estudios investigativos posteriores. Así, Polya marcó un antes y un después en la historia de las estrategias de resolución de problemas matemáticos, pues su enfoque tuvo una intencionalidad claramente educativa (Sigarreta et al., 2006).

En relación con las estrategias metacognitivas, como aspecto que influye en la resolución de problemas matemáticos, en la época contemporánea, Bloom y Broder (citado en Navas, Aragones & Payares, 2015) en 1950, en la Universidad de Chicago; y Mayer (citado en Barraza, 2019) en 1987, hicieron contribuciones fundamentales en este terreno, pues al hacer "pensar en voz alta" a expertos mientras solucionaban problemas matemáticos, descubrieron que "para resolver con éxito un problema en un campo dado son necesarios tanto los procedimientos generales como un conocimiento específico" (p. 387).

Continuando ese recorrido histórico, en la época contemporánea, pero cada vez más reciente, a mediados de la década de los años 80, se destacan los trabajos del profesor Allan Schoenfeld, quien estudia y reflexiona sobre el método heurístico de G. Polya, perfeccionándolo, al derivar estrategias aún más asequibles al trabajo con los estudiantes. De esta manera, publica en 1985 su obra más importante, Mathematical Problem Solving, en la que establece cuatro aspectos del conocimiento y comportamiento que caracterizan adecuadamente las formas de solucionar problemas, a saber, "los recursos cognitivos, los recursos heurísticos, los recursos metacognitivos, y el sistema de creencias del sujeto que resuelve el problema" (Sigarreta et al., 2006, p.35).

Para especificar aún más los aspectos característicos de la resolución de problemas matemáticos, Schoenfeld menciona que los recursos cognitivos y heurísticos se refieren al acervo de conocimientos del dominio del problema con que cuenta el resolutor. De esta forma, incluye los saberes previos, al igual que Bloom y Mayer, en su caracterización de aspectos que influyen en el proceso resolutivo. Además, los resultados de Schoenfeld (citado en Barrantes, 2006) concuerdan con los mencionados en la trazabilidad histórica de investigaciones en el área, descrita en los párrafos anteriores, pues nuevamente encuentra que los aspectos metacognitivos son factores decisivos en la resolución de problemas matemáticos algebraicos.

Hasta este punto, a partir de los antecedentes históricos en la resolución de problemas matemáticos, se pueden definir claramente dos tópicos en el proceso resolutivo, que en esta investigación son tomados como categorías de análisis: los saberes previos que debe poseer el resolutor, así como las estrategias metacognitivas, que incluyen los procesos cognitivos y heurísticos.

Ahora bien, ya en nuestros días, a partir de 1992, Godino, Batanero y Font, desarrollan el Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática que integra los estudios propuestos por Chevallard, Bruno D´ Amore, Vergnaud, Duval, relacionados con el proceso de gestión de saberes previos a través de las estrategias cognitivas y metacognitivas, para resolver problemas algebraicos, teniendo en cuenta sus registros de representación, la variedad de significados de estos, según su registro, y los aspectos personales e institucionales de los objetos matemáticos implicados (Godino, Batanero & Font, 2007).

Respecto al razonamiento algebraico, el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática, EOS, se fundamenta en “el análisis de la naturaleza de los contenidos matemáticos, el desarrollo cultural y personal en el seno de las instituciones escolares” (Godino et al., 2007, p.1) donde se logran constituir “ las relaciones dialécticas entre las ideas matemáticas, el sistema de signos, y las situaciones problema para cuya resolución se inventan tales recursos” (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi, 2012, p.3).

Aunque el EOS actualmente está en desarrollo, se puede decir que es un antecedente histórico de amplitud teórica superior a los anteriores en torno a la exploración de los

aspectos subjetivos que influyen en la resolución de problemas algebraicos, en la medida que integra y articula los conocimientos previos, referidos como desarrollo personal de los contenidos matemáticos; las estrategias metacognitivas, y el sistema de signos, propio de la transformación semiótica. No obstante, los anteriores aspectos serán tratados con mayor profundidad en el marco teórico.

1.2. Antecedentes investigativos

Como instrumento auxiliar para la construcción de este apartado, se diligenció una matriz de rastreo bibliográfico, estructurada con los siguientes ítems: referencia, país, año, objetivo, metodología, enfoque metodológico, enfoque disciplinar, resultados y aporte a la investigación, la cual se encuentra en el apéndice No. 1. Con base en esta, se exponen los desarrollos de 50 investigaciones en torno a la resolución de problemas algebraicos, en su mayoría, realizadas entre los años 2010 y 2020, teniendo en cuenta el objetivo general de este estudio, a saber, explorar la estructura de los saberes previos, estrategias cognitivas, metacognitivas y ontosemiótica en la resolución de problemas algebraicos con estudiantes del grado octavo de básica secundaria del municipio de Chigorodó - Antioquia.

En ese sentido, para el rastreo de las investigaciones relacionadas, se recurrió a las siguientes bases de datos científicos reconocidas: Scielo, Dialnet, Google Académico, Researchgate y Redalyc, a través de expresiones clave tales como: ontosemiótica de la resolución de problemas algebraicos, estrategias metacognitivas en la resolución de problemas matemáticos y saberes previos en la resolución de problemas algebraicos. En cuanto a la forma de presentación en este apartado, las investigaciones encontradas aparecen clasificadas, en primera instancia, de acuerdo a las siguientes categorías: Saberes previos Estrategias metacognitivas y Transformación semiótica. En segunda instancia, se clasificaron según su ubicación geográfica: Internacionales, nacionales y regionales, en estricto orden temporal.

1.2.1. Antecedentes en la categoría Saberes previos

A nivel internacional

López (2009) publicó un artículo de investigación titulado: La importancia de los conocimientos previos para el aprendizaje de nuevos contenidos. Innovación y Experiencias Educativas en España. El objetivo fue mostrar que para aprender nuevos contenidos matemáticos es necesario tener en cuenta los conocimientos previos del estudiante en la planeación y ejecución de la praxis pedagógica. La metodología fue cualitativa, de tipo documental, con alcance descriptivo a partir de bases teóricas de Ausubel (1983), Coll (1990) y Pozo et al. (1991), con un enfoque disciplinar educativo. Como resultado, se mostró que para enseñar un nuevo objeto de aprendizaje matemático, es necesario partir de los conocimientos previos de los alumnos, diseñando situaciones en las que estos saberes se activen. Es preciso enfrentar a los alumnos con sus propias ideas, explícitas o implícitas, para reflexionar sobre ellas y confrontarlas con las de los demás. Las ideas de los alumnos, aunque "erróneas", no constituyen obstáculos sino vehículos a partir de los cuales se edificarán los nuevos conceptos. El aprendizaje de conceptos en la resolución de problemas algebraicos es un proceso gradual que requiere de la transición de conceptos y procedimientos aritméticos a un enfoque algebraico. Esto requiere una resignificación paulatina de estructuras aritméticas hacia el pensamiento algebraico. Como aporte a la investigación, estos resultados muestran que el esquema ontosemiótico debe contemplar en su estructura la movilización y gestión de conocimientos previos del estudiante, desde conceptos y procedimientos aritméticos en el proceso de resolución de problemas algebraicos. Así antes y durante la intervención se debe considerar valioso las preconcepciones de los estudiantes, pues el trabajo de exploración de esta investigación debe propiciar la significatividad en el aprendizaje.

Molina (2014) desarrolló su tesis de maestría titulada: Aprendizaje significativo y resolución de problemas de ecuaciones de primer grado, en Perú. Su objetivo fue mostrar que el aprendizaje significativo o basado en los conocimientos previos de los estudiantes facilita los procedimientos y la resolución de problemas de ecuaciones de primer grado. La

metodología utilizada fue mixta, con dominancia cualitativa cuantitativa. Su diseño fue cuasi-experimental, con 38 estudiantes de primero básico del Instituto Experimental Fray Francisco Jiménez, de Santa Cruz del Quiché. Se aplicó un pretest y un post test, con enfoque disciplinar educativo. Como resultado, se corroboró que después de obtener notas de 30 % del valor de la prueba pre-test se logró conseguir notas en el post-test de 80 %, 90 % y 100 % del valor asignado a la prueba, deduciendo de esta manera que los conocimientos previos interactúan con los nuevos conocimientos y ayuda a construir el propio aprendizaje como el de los demás en relación con los problemas algebraicos modelados por ecuaciones de primer grado. Esto representa un valioso aporte, ya que destaca la necesidad de articular apropiadamente los conocimientos previos requeridos en la resolución de problemas algebraicos, con el nuevo objeto de aprendizaje. Así, el esquema ontosemiótico debe contemplar en su estructura la movilización y gestión de conocimientos previos del estudiante en el proceso de resolución de problemas algebraicos.

López y López (2014) publicaron un artículo de investigación titulado: Problemas de comprensión sobre el planteamiento y solución de problemas en algebra, en México. El objetivo fue caracterizar las dificultades conceptuales y procedimentales asociados a los conocimientos previos en la resolución de problemas algebraicos. La metodología de investigación fue cualitativa, se realizó una revisión documental de autores como Díaz Barriga (2006), Gagné (1991), Newell y Simon (1958), articulada con un análisis empírico de un grupo de estudiantes, a los que se les aplico una prueba distinta, que consistía en dos partes, a dos grupos distintos. Una llamada de procedimiento clásico, PC, y otra de planteamiento de problemas independiente, PPI. Posteriormente se realizó una entrevista a dichos estudiantes, con un enfoque educativo. Como resultado, se pudo establecer que los problemas de comprensión del algebra para plantear problemas, principalmente se traducen en el predominio de la tradición pedagógica que produce, entre otras cosas, una incapacidad en el estudiante para plantear problemas, no sólo por la dependencia intelectual hacia las indicaciones del profesor, sino también por los problemas propios del algebra como son los de contenido, procedimiento y conocimientos previos no consolidados. Respecto a los estudiantes, presentan dificultades en la comprensión sobre lo que indican algunos símbolos o lenguajes algebraicos son ignorados, en conocimiento de operaciones básicas poco consolidadas, en la utilización incorrecta y poco dominio de las leyes de los exponentes, de

comprensión del concepto de reducción de términos semejantes, en problemas en el proceso de la multiplicación y en operaciones básicas, así como en la resta términos con diferentes literales. Como aporte a la presente investigación, se resalta la necesidad de garantizar la totalidad de los conocimientos previos necesarios antes de explicar cómo resolver problemas de tipo algebraico, específicamente, los conocimientos asociados a la ejecución de algoritmos y significados relacionales y transformacionales de estos.

A nivel nacional

Popayán (2016) desarrolló una disertación doctoral titulada: Situaciones didácticas en el aprendizaje de las expresiones algebraicas para la conversión del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico en Colombia. El objetivo fue promover el aprendizaje de las expresiones algebraicas para la conversión del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico en estudiantes de grado noveno de la institución educativa Isaías Gamboa de la ciudad de Cali. Asimismo, la metodología utilizada fue cualitativa con un diseño de tipo cualitativo-cuasi experimental con enfoque educativo. La observación de la investigación se hizo a través del diseño de las situaciones didácticas de Chevallard (1999), tal como se planteó en el marco teórico con estas situaciones: acción, formulación y validación. Además, se realizó la evaluación diagnostica del objeto matemático con relación a los saberes previos. Como resultado, hay que señalar que el aprendizaje de la conversión del registro verbal al algebraico, fue posible gracias a que los estudiantes tenían bases previas tales como las operaciones básicas de la aritmética, procesos relacionales, transformacionales, fundamentalmente, en la comprensión lectora. Además, la competencia matemática de planteamiento y resolución de problemas implica que las situaciones didácticas propuestas por el profesor a los estudiantes movilicen procesos matemáticos de complejidad creciente. Así, en esta investigación, antes de empezar la intervención didáctica con los estudiantes, se debe poner en evidencia los saberes previos adquiridos fuera y dentro del ámbito escolar de estos.

Paniza y David (2018) desarrolló una tesis de maestría titulada: Práctica Pedagógica Innovadora Apoyada por TIC Fundamentada en la EPC para trabajar Ecuaciones de Primer Grado con Estudiantes de Noveno Grado en la IED Bosanova en Colombia. Su objetivo fue analizar el grado de comprensión obtenida por parte de los estudiantes de noveno grado del colegio Bosanova acerca de las ecuaciones de primer grado con una incógnita con números enteros de acuerdo a los estándares básicos de competencias matemáticas del MEN. La metodología utilizada fue cualitativa, siendo un estudio de caso. La muestra de estudiantes se realizó por conveniencia, se conformó con los seleccionados para representar al colegio en una de le las pruebas externas aplicadas por el MEN y por la singular problemática que se presentó detalladamente en el planteamiento del problema, además por ser un grupo heterogéneo en cuanto a los niveles de comprensión de las matemáticas. Como resultado, se observa una importancia mayúscula en la precisión de los saberes previos necesarios para el abordaje didáctico, así como en la necesidad de evidenciarlos en los alumnos a través de instrumentos. Esta información fue clave para que el docente pudiera estructurar e implementar su práctica innovadora, lo cual facilitó y motivó a los estudiantes permitiéndoles la apropiación de conceptos y procesos algorítmicos y variacionales relacionados con el lenguaje algebraico, así como la conversión entre registros en el proceso de resolución de problemas. Además, en el proceso de comprensión, al emplear el modelo concreto o simulador balanza de ecuaciones, fue necesario analizar, aprender y reflexionar sobre los pasos ejecutados al interactuar con ella, descubrir los elementos de sintaxis simbólica inherentes; abstraer operaciones, liberar procesos de comprensión de las mismas a un nivel sintáctico, es decir, pensando, actuando flexiblemente, desarrollando competencias de lo comprendido y resolviendo problemas con ecuaciones de primer grado con una variable en otros contextos. Como aporte para esta investigación, el tratamiento pedagógico de la enseñanza de la resolución de problemas debe ser objeto didáctico de formación, debe existir un inventario de saberes previos que los estudiantes requieren saber previamente, incluyendo procedimientos algorítmicos, de comprensión textual de los enunciados, así como los conceptos que están implicados en un objeto matemático de forma previa a la resolución de problemas algebraicos.

A nivel local

Ruiz (2016) desarrolló una tesis titulada: Diseño de una propuesta metodológica que contribuya al lenguaje algebraico, su precisión e importancia para la enseñanza-aprendizaje del álgebra, en la ciudad de Medellín, Antioquia. Su objetivo fue mejorar la comprensión del lenguaje algebraico mediante el diseño e implementación de una propuesta metodológica con miras a favorecer la interiorización de los conceptos propios del grado octavo de la I.E. Barrio Paris. La metodología utilizada fue cualitativa, de tipo investigación acción. Se realizó una caracterización y diagnóstico, donde se evidenciaron las principales dificultades a las que se enfrentan algunos estudiantes con respecto a la comprensión del lenguaje algebraico. Para la recolección y análisis de la información se seleccionaron 10 estudiantes de cada uno de los grupos (cuatro octavos), para un total de 40 estudiantes. Como resultado, se evidenció una dificultad reiterativa, cuando dentro de los instrumentos se involucraban situaciones geométricas, logrando identificar vacíos conceptuales respecto a las expresiones que permiten calcular perímetros, áreas y volúmenes. Por lo cual se recomienda que dentro del proceso de aprendizaje se incluya una explicación clara de los conceptos previos que serán requeridos para la aplicación de la propuesta y a partir de ellos estructurar el programa formativo principal. Así, el aporte a la presente investigación consiste en mostrar la necesidad de garantizar antes de la implementación didáctica, es decir, de forma previa, los estudiantes tengan un dominio algorítmico de las reglas de operación en conjuntos numéricos, así como de los significados de los conceptos y procedimientos implicados en los procesos de transformación numérica.

Valencia y Díaz (2019) desarrollaron un trabajo de grado de licenciatura titulado: Estrategia didáctica para fortalecer el Razonamiento Algebraico fundamentada en la Etnomatemática en el municipio de Chigorodó, Antioquia. El objetivo de la investigación fue evaluar la implementación de una estrategia didáctica basada en la Razonamiento Algebraico, RA, de Godino (2012) y Etnomatemática en la resolución de problemas algebraicos. La metodología utilizada fue, en primer lugar, de tipo documental, pues desarrollaron procesos referentes a rastreo bibliográfico de los teóricos sobre el RA y Etnomatemática con el fin de identificar fuentes de información. En segundo lugar, se

realizó una investigación empírica, a través de la intervención en el aula con estudiantes grado 8° de la Institución Educativa los Andes del municipio de Chigorodó con una metodología cualitativa, siguiendo el enfoque disciplinar educativo. Se utilizaron técnicas de recolección tales como la observación participante, encuesta y entrevista semiestructurada y pruebas. Como resultado, la implementación de actividades en referencia al RA desde el EOS, permitió el aprendizaje significativo en los estudiantes en cuanto al reconocimiento, percepción, identificación y caracterización de las variaciones y los patrones de cambio, y de esta manera originaban expresiones algebraicas a partir de las generalizaciones que construían. Como aporte a esta investigación, se debe tener en cuenta como indicadores de razonamiento algebraico el reconocimiento e identificación de variables en la enunciación de problemas y su modelación, como uno de los pasos iniciales en la resolución de problemas algebraicos y como evidencia que los estudiantes poseen parte de las bases teórico practicas necesarias para resolver problemas algebraicos con éxito.

Tendencia de las investigaciones en la categoría de saberes previos

Tras el análisis de los antecedentes internacionales, nacionales y locales, en la categoría de saberes previos, se encontró que se desarrollaron con la metodología cualitativa, orientados al ámbito educativo, utilizando como instrumentos principales, pruebas escritas y grabaciones audiovisuales. Asimismo, en su primera fase realizaron un proceso de investigación documental, sobre el estado del arte, que contrastaron con los resultados obtenidos en su implementación práctica. Como resultado, las investigaciones revelan que los estudiantes tienen poco dominio de aspectos de los saberes previos, referidos al dominio de operaciones aritméticas, axiomas y propiedades, así como nociones referidas a objetos algebraicos, tales como variable, incógnita, despeje, ecuación, los términos que la componen; en relación con sus significados y procedimientos que las demandan. Finalmente, como aporte a este estudio, antes de un proceso de implementación didáctica cualquier estrategia, se debe controlar o definir cada uno de los conocimientos, que refieran al manejo conceptual y procedimental de procesos aritméticos, así como la

significación de objetos algebraicos, verificando que hayan sido aprehendidos en su totalidad por los estudiantes, y luego, constituirlos como un marco de referencia axiomático y significativo, a partir del cual sustentar todo proceso dialógico con los aprendices.

1.2.2. Antecedentes en la categoría Estrategias Metacognitivas

A nivel internacional

Rodríguez (2005) desarrolló una tesis doctoral titulada: Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de matemáticas una propuesta integradora desde el enfoque antropológico en España. Su objetivo fue explorar la explicitación de conocimiento metacognitivo en el ámbito de la resolución de problemas de matemáticas. La metodología fue mixta, con dominancia cualitativa cuantitativa. En primer lugar se realizó una revisión documental de las investigaciones de otros autores, en segundo lugar, se aplicaron pruebas escritas para evidenciar el proceder metacognitivo a ciertos estudiantes, con un grupo de control y experimental, con enfoque educativo. Como resultado, desde el rastreo bibliográfico, se infiere que los alumnos no tienden a adquirir el sentido de la matemática, no son conscientes de la forma en que la matemática se construye, reduciéndose ésta a un recetario de procedimientos a aplicar. Además, Se ignora el razonamiento matemático plausible o conjetural, los "patrones" que rigen dicho razonamiento (Pólya, 1954) y, por tanto, su función complementaria del razonamiento deductivo. Por esta razón, las fases exploratorias de la actividad matemática, formulación de hipótesis, búsqueda de contraejemplos, elaboración de estrategias, tanteo de técnicas, etc., quedan muy debilitadas. Por su parte, como resultado de la aplicación de la prueba escrita, se evidencia que los estudiantes asumieron su responsabilidad como protagonistas en la construcción de la respuesta a la cuestión sobre aspectos del proceso de estudio que normalmente quedan bajo la responsabilidad única del profesor relacionada con la aparición de la regulación metacognitiva, presentando las falencias descritas en el rastreo bibliográfico previamente realizado. Como aporte a la presente investigación, en la construcción de referentes metacognitivos del esquema didáctico de resolución, debe tenerse en cuenta los procesos de

planeación, autorregulación y control del mismo estudiante, utilizando técnicas de razonamiento plausible, que permita ver los problemas matemáticos llenos de significado y no como un resultado de aplicación de reglas rígidas.

Gusmão (2006) desarrolló una tesis doctoral titulada: Los procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: una perspectiva ontosemiótica en España. Su objetivo fue describir los procesos cognitivos y metacognitivos en el marco del EOS en la resolución de problemas matemáticos en los estudiantes de grado octavo. Para ello, trabajo con Metodología mixta, en la que estructuró un marco de referencia de la siguiente manera, según la configuración epistémica: para el EOS en lo cognitivo: situación, interpretación a partir del lenguaje de la misma, conceptos previos, procedimientos, proposiciones y argumentos. Para la metacognicion, se establecieron criterios primarios: lectura comprensiva, observación y conciencia, argumentación; y secundarios: de supervisión, de regulación y evaluación, transferencia. Basado en ello, se tomó una muestra de 185 estudiantes y se les aplico los instrumentos: pruebas metacognitivas, entrevistas orales y semiestructuradas, debate en grupo, con enfoque disciplinar educativo. Como resultado, los estudiantes presentaron falencias en los criterios establecidos en el marco de referencia establecido en la metodología para los procesos cognitivos y metacognitivos. Es de notar que cuando los resolutores presentan carencias significativas en su configuración cognitiva también se presentan paralelamente carencias en sus configuraciones metacognitivas. Recíprocamente el poseer una configuración cognitiva desarrollada hace paralelamente aflorar una configuración metacognitiva que a su vez se aproxima a la configuración metacognitiva de referencia. En general, se mostró que EOS y la Metacognición tienen una proximidad epistémico-didáctica. Como aporte a esta investigación, se debe construir un marco referencia del EOS que integren la cognición y metacognicion de conocimientos previos para la construcción de un esquema didáctico.

Txabarri (2017) desarrolló una tesis doctoral titulada: La resolución de problemas aritmético-algebraicos y las estrategias de aprendizaje en matemáticas. Un estudio en educación secundaria obligatoria, en la república de España. El objetivo fue determinar la influencia de las estrategias de aprendizaje de tipo metacognitivo en la resolución de

problemas algebraicos. La metodología fue cuantitativa, con una muestra de 565 sujetos de tres cursos de Educación Secundaria, bajo un enfoque disciplinar educativo. Como resultado, se estableció que el entrenamiento en el aula en heurísticos, tales como el ensayo - error, reglas empíricas, diagramas, etc.; integrados a las estrategias de aprendizaje metacognitivas resulta efectivo para los estudiantes en la resolución de problemas algebraicos. De hecho, los resultados logrados en la estrategia de elaboración y las de metacognición en la resolución de problemas algebraicos son más significativos en la flexibilidad posibilidades de elección y de transformación semiótica del problema. Como aporte a la presente investigación, se debe contemplar heurísticas de resolución articuladas a la metacognicion como estrategias de aprendizaje de la resolución de problemas algebraicos.

Lara (2017) desarrolló una tesis doctoral titulada: Aprendizaje autorregulado y metacognición para potenciar la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico en escolares de secundaria, en la república de México. El objetivo fue potenciar en los estudiantes de secundaria su conocimiento metacognitivo y el aprendizaje autorregulado para ayudarlos a ser autónomos en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico en problemas verbales. La metodología fue mixta, con dominancia cualitativa cuantitativa, los participantes de estudio fueron 18 adolescentes, siete mujeres y once hombres, de tercer grado de secundaria de la escuela particular Colegio Internacional Puebla S.C., ubicada en la ciudad de Puebla. El rango de edad de los estudiantes comprende de 14 a 16 años. Se aplicó el cuestionario evaluación metacognitiva, MAI; cuestionario de estrategias de motivación y aprendizaje, MSQL; y la prueba de razonamiento lógico y el tercer instrumento fue un test con 20 preguntas el cual se utilizó como pre-test y posttest, con enfoque disciplinar educativo. Como resultado, en el aprendizaje autorregulado en sus tres fases: planificación, desempeño y autorreflexión; el desempeño de la mayoría de los estudiantes fue mejorando significativamente, ya que en esta intervención didáctica se diseñaron actividades que incluían problemas verbales y, con base en ellos, los estudiantes tenían que traducirlos a una expresión algebraica o ecuación de primer grado, enteras y fraccionarias, sistemas de ecuaciones en dos variables y ecuaciones de segundo grado que los explicara. Los procesos de autocontrol, como la auto instrucción, la imaginación, la atención enfocada las estrategias de tarea, ayudaron a los estudiantes a centrarse en la tarea

y a optimizar su esfuerzo. La investigación mostró que las verbalizaciones en torno a la auto descripción del proceso de traducción de un problema, del lenguaje verbal a lenguaje algebraico en la resolución de problemas de álgebra, mejoraron significativamente. En este proceso, los estudiantes manifestaron que la imaginería o la formación de imágenes mentales fueron técnicas de autocontrol utilizadas por los estudiantes. Como aporte a la presente investigación, es preciso tener en cuenta los siguientes criterios en el establecimiento de competencias metacognitivas: conocimiento metacognitivo, conocimiento declarativo, procedimental y condicional, procesos de planificación, monitoreo y evaluación, y su control metacognitivo, planificación, ejecución o desempeño y autorreflexión, incluyendo las imágenes mentales que puedan concebir, con el fin de ayudarlos a ser autónomos en la gestión de recursos metacognitivos en la resolución de problemas algebraicos.

Huaynaso, Verónica y Mendoza (2018) desarrollaron su tesis de maestría titulada: Procesos metacognitivos para la resolución de problemas en el área de matemática en alumnos de segundo grado del nivel secundario de la Institución Educativa "Coronel Gregorio Albarracín" en la república de Venezuela. El objetivo fue determinar la influencia de los aspectos cognitivos y metacognitivos en la resolución de problemas matemáticos. La metodología utilizada fue cualitativa, con enfoque disciplinar educativo, de tipo cuasi-experimental, la muestra estuvo formado por 56 alumnos del segundo grado de secundaria, se conformó un grupo experimental con 28 alumnos y otro grupo control de 28 alumnos, se aplicó el pretest y postest a ambos grupos para evidenciar el nivel de logro de los alumnos al resolver problemas de matemática. Como resultado, la aplicación del módulo de procesos metacognitivos influyó significativamente en la resolución de problemas de matemática con un nivel de confianza del 95% para el tratamiento estadístico aplicando la prueba de normalidad Shapiro-Wilk. Para ello, el profesor debe facilitar discusiones después de terminada la tarea para permitir que los estudiantes aprendan la eficacia de varias estrategias: los problemas a los que se enfrentaron, cómo resolvieron esos problemas, cómo evitar problemas en el futuro. El docente debe manifestar una conducta metacognitiva que les sirva a los estudiantes como modelo, por medio de diversas técnicas como pensar en voz alta durante la resolución de un problema, verificar la respuesta final, etc. Algunos de los procesos que se pueden moldear más fácilmente son: el aprendizaje cooperativo y el

manejo de grupos pequeños también pueden facilitar este proceso, los estudiantes pueden hacer que los pensamientos sean explícitos y analizables a la vez que propicien discusiones metacognitivas entre sus compañeros. Como aporte a la presente investigación, en el proceso instruccional de enseñanza del esquema ontosemiótico se debe realizar actividades en grupo que permitan la evidencia de estilos de metacognición que permita el crecimiento mutuo. Además, el investigador docente debe explicitar en voz alta lo que sucede en la mente mientras resuelve el problema, lo cual permitirá a los estudiantes captar más allá de lo que se plasma en el instrumento. Posteriormente, se debe tener un conversatorio general para tomar nota de sus procesos metacognitivos.

Martínez, Sánchez, y Pizarro (2020) desarrollaron una tesis doctoral titulada: La representación en la resolución de problemas matemáticos: un análisis de estrategias metacognitivas de estudiantes de secundaria, en la republica de España. El objetivo fue caracterizar los procesos representativos y de metacognición en la resolución de problemas matemáticos verbales en estudiantes de octavo grado en colegios del centro de Madrid. La metodología fue cualitativa, de tipo documental, con alcance descriptivo a partir de bases teóricas de los RRS de Duval (2016), Flavell (1999), Rodríguez (2005) y Silva (2004) principalmente. Se establecieron competencias cognitivas y metacognitivas a evaluar como criterios de evaluación y se escogió una muestra no aleatorizada de 99 estudiantes de secundaria, de varios colegios del centro de Madrid, con enfoque educativo. Como resultado, se tiene que las estrategias metacognitivas utilizadas por los estudiantes durante la resolución del problema se enfocan en la planeación. En la estrategia de control siguen de manera general los pasos para la resolución y consideran que no tienen obstáculos durante el proceso. Sin embargo, aunque relacionan la respuesta con la pregunta en su mayoría, no justifican la respuesta; esto contrasta al relacionarla con el enunciado, que señala una incomprensión del problema. En cuanto a sus sistemas de representación, los alumnos no la evidencian procesos comprensivos al relacionar la representación con el enunciado del problema. Tras la lectura del enunciado, dado en el lenguaje de la lengua natural, es necesario integrar las estrategias cognitivas y metacognitivas al proceso en la enseñanza del proceso de conversión de un registro a otro registro ontosemiótico, ya sea numérico, figural, geométrico, etc., incluso trabajar de forma simultánea con más de un registro, lo que pone de manifiesto el tipo de comprensión que ha realizado sobre el propio

problema. Como aporte a esta investigación, permite establecer que la comprensión e interiorización que los alumnos desarrollan acerca de un determinado objeto matemático, se verá fortalecida si se establece un mayor número de conexiones entre los múltiples registros de representación que permiten trabajar con dicho objeto aplicando estrategias progresivas de autorregulación y reflexión de procesos personales. La propia práctica docente debe trascender el enfoque en el trabajo numérico, aritmético y algorítmico, y favorecer los distintos registros que permitan la resolución comprensiva de problemas algebraicos.

A nivel nacional

Pupo (2011) desarrollo una tesis doctoral titulada: Desarrollo de la competencia resolución de problemas desde una didáctica con enfoque metacognitivo. Su objetivo fue determinar los aspectos cognitivos y metacognitvos que debe tenerse en cuenta en las estrategias didácticas para la resolución de problemas matemáticos. La metodología fue mixta, con dominancia cualitativa cuantitativa, con enfoque disciplinar educativo. Su diseño metodológico cuasi-experimental se desarrolló con cuatro grupos; además, la intervención se realizó en cuatro fases, poniendo en práctica la instrucción directa, el modelado metacognitivo, la práctica guiada y el aprendizaje cooperativo. Se realizaron comparaciones intragrupos e intergrupos. Como resultado, se observó que en la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos se debe tener en cuenta parámetros tales como: contextualizar el problema planteado, sea desde la matemática o desde la vida cotidiana, dándose entonces un aprendizaje significativo; aplicar métodos de enseñanza en los cuales se haga explícito el o los modelos de resolución de problemas que se aplican, con el fin de que no quede de manera implícita, sino que se explicite el proceso cognitivo y metacognitivo que se desarrolla en el tiempo que se le dedica a resolver el problema; diseñar diferentes tipos de materiales didácticos y construcciones de ambientes de aprendizaje que permitan que el estudiante seleccione, organice y controle diferentes procedimientos a la hora de enfrentarse a la resolución de problemas matemáticos contextualizados. Así, como aporte a esta investigación, el docente que enseña la resolución de problemas debe asumir el rol de modelo y guía de la actividad cognitiva y metacognitiva

del estudiante, llevándolo poco a poco a participar de un nivel creciente de competencia y, al mismo tiempo, retirando paulatinamente el apoyo que proporciona hasta dejar el control del proceso en manos del estudiante, esto es, la aplicación de la propuesta mediante las fases de Instrucción directa, modelado metacognitivo, práctica guiada y aprendizaje cooperativo o práctica cooperativa.

Troncoso (2013) desarrolló una tesis doctoral titulada: Estrategias metacognitivas en el aprendizaje de las matemáticas: una intervención en el aula para determinar las implicaciones de la implementación de estrategias metacognitivas en el aprendizaje de las matemáticas. Su objetivo fue establecer la influencia de la incorporación de estrategias metacognitivas en la resolución de problemas algebraicos. La metodología fue mixta, con dominancia cualitativa cuantitativa de tipo cuasi experimental. Se utilizó la metodología planteada por Mateos (citado en Heit, 2011), en la que se proponen cuatro momentos a partir de los cuales se cede de manera progresiva el control del aprendizaje, para que el estudiante cree sus propias formas de resolver problemas matemáticos. La población está conformada por estudiantes de grado octavo, a los que se les aplico una prueba diagnóstica; y otra de referencia (postest), para establecer el progreso y mejora de los estudiantes, con enfoque disciplinar psicoeducativo. Como resultado, en cuanto al aspecto cuantitativo de la investigación, de determino que la implementación de estrategias metacognitivas, sí ejerce un impacto importante en el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes. Con relación al aspecto cualitativo, se encontró que los estudiantes después de los cuatro momentos para la aplicación de la estrategia metacognitiva, desarrollan procedimientos con más orden y aunque se presentan errores en la ejecución del algoritmo o la elección de la información para resolver los problemas. el proceso realizado ayudó, de acuerdo a los autoinformes, a comprender qué dificultades tuvieron y en qué momentos del proceso tuvieron que replantear su proceso resolutivo. Como aporte a esta investigación, ofrece una propuesta para ceder progresivamente el control de la resolución de los problemas a los estudiantes, dando una guía inicial y pasando a empoderarlos de sus propios procesos de aprendizaje. Así se puede llegar a generar autonomía en los estudiantes y procesos de reflexión sobre el trabajo que realicen.

Moreno y Daza (2014) desarrollaron una tesis de maestría titulada: Incidencia de estrategias metacognitivas en la resolución de problemas en el área de la matemática. El objetivo fue determinar el impacto de diferentes estrategias metacognitivas en la resolución de problemas matemáticos en tres estudiantes de 8º grado del Colegio Gimnasio Los Portales de Bogotá. La metodología fue cualitativa, con un alcance correlacional, con enfoque disciplinar cualitativo. La recolección de la información se realizó a través de una prueba de entrada y de salida y de una serie estandarizada de problemas que permitieron determinar la influencia de las diferentes estrategias metacognitivas en la habilidad de las estudiantes al resolver problemas de matemáticos durante ocho sesiones de 40 minutos aproximadamente cada una. Como resultado, los estudiantes desarrollaron de manera significativa procesos de planeación, los cuales les permitieron la toma de conciencia necesaria para poner en acción diversos mecanismos de solución de los diferentes problemas, entre ellos la supervisión regular del proceso. De igual forma, se destacó la importancia de la mediación, adulto o par, para poder llegar paulatinamente al desarrollo de tareas de manera autónoma. Las estrategias metacognitivas más utilizadas por las estudiantes en la resolución de problemas en el área de matemáticas, es la planeación, ya que esta impacta positivamente en el Control y la evaluación de la tarea abordada, pues al tener la claridad en la meta a obtener el sujeto se hacen más consciente de la situación a resolver, la manera de abordarlo, establece las estrategias adecuadas a la misma teniendo en cuenta los datos, los procesos que requiere. Se sugiere implementar estudios relacionados con los conocimientos previos de los estudiantes, pues en la presente investigación las estudiantes no lograron ser conscientes de sus procesos, de sus pre-saberes y se les dificultó su verbalización, aun cuando se desarrolló la mediación y se les indagó constantemente por los mismos, se presume que es porque se consideran obvios para la resolución de una situación, por eso evitan escribirlos y expresarlos oralmente. Como aporte a la presente investigación, se debe trabajar a partir de un proceso mediacional basado en acciones didácticas como la instrucción explicita, la práctica guiada y cooperativa, donde se promueva la implementación de las estrategias en la resolución de problemas se puede establecer que la acción de mayor incidencia en dicho proceso es la basada en la práctica cooperativa. Además, es necesario establecer explícitamente los conocimientos previos de

los estudiantes antes del proceso de formación con los estudiantes en el esquema ontosemiótico producto de esta investigación.

Gutiérrez y Vargas (2020) desarrollaron una tesis de maestría titulada: Metacognición y Aprendizaje de las Matemáticas: El Caso de la Función Lineal. Su objetivo fue explorar la explicitación de conocimiento metacognitivo en el ámbito de la resolución de problemas algebraicos de función lineal. La metodología utilizada fue cualitativa, con tipo de diseño Investigación Acción, la cual constituye un proceso continuo de búsqueda de explicaciones del oficio docente, integrando la reflexión y el trabajo intelectual en el análisis de las experiencias, bajo un enfoque disciplinar educativo. Se tomó una muestra de 21 estudiantes, a los que se les aplico los siguientes instrumentos: prueba y diario de campo. Como resultado, las respuestas de los estudiantes en torno a la retrospectiva de su proceso resolutivo y la evidencia de las ideas clave que ayudaron a solucionar el problema, en su mayoría, fueron subjetivas, expresaban sentimientos y agradecimientos. Lo anterior permite evidenciar que los estudiantes no demostraron la competencia matemática de la argumentación. La mayoría de los estudiantes realizaron evaluación, pero desde un aspecto no matemático, por lo que se infiere que los estudiantes no son fuertes para hacer retrospectiva de la planeación (evaluar la planeación), de las ideas y las acciones. Los estudiantes del perfil planeación y control monitorearon principalmente los errores de cálculo, ignorando el control del plan o estrategia. Como aporte a la presente investigación, es importante fraccionar la tarea metacognitiva en diferentes sesiones de clase para mejorar la evidencia de las habilidades metacognitivas, implementar tareas en situaciones donde el estudiante se enfrente por primera vez a problemas de un tema en específico, lo cual asegura que la metacognición sea visible y no se convierta en procesos mecánicos. Es adecuado colocar problemas algebraicos con varias opciones de respuestas, dado que estimulan la búsqueda de distintas rutas de solución, pues, cuando se tiene un procedimiento determinado es poco lo que la imaginación puede hacer. En la recolección de información, por parte de los estudiantes, se obtiene mejores evidencias si se cuestiona al estudiante verbalmente que por escrito, puesto que se expresan mejor y el investigador tienen más posibilidad para indagar más en caso de que el estudiante no sea claro.

A nivel local

Zambrano (2008) publicó un artículo de investigación titulado: Preguntas cognitivas y metacognitivas en el aprendizaje y la generación de estrategias de resolución de problemas matemáticos, en la ciudad de Medellín, Antioquia. Su objetivo fue establecer la incidencia de las preguntas cognitivas y metacognitivas en el aprendizaje de la Función Cuadrática entre dos Grupos, uno que activa preguntas cognitivas y el otro que activa preguntas metacognitivas. La metodología es de corte cuantitativo: un diseño experimental con un grupo experimental y otro de control, con enfoque disciplinar educativo. Al comparar los resultados obtenidos por los estudiantes que dispararon los dos tipos de preguntas, cognitivas y metacognitivas, frente al grupo que no las utilizo, se puede determinar que su proceso de resolución mejora con el tiempo y es más representativo cuando el activador es metacognitivo. Además, los resultados obtenidos en la prueba de comprensión conceptual, mostraron que la utilización de activadores cognitivos determinan un mayor grado de comprensión conceptual en el primer momento de aplicación de la prueba, sin embargo, aunque la entrada es cognitiva, el proceso llevado a cabo antes de dar respuesta a la pregunta es metacognitiva. Las preguntas metacognitivas ejercen en el estudiante mayor incidencia en la determinación de estrategias que lo que hacen las preguntas cognitivas. Como aporte a la presente investigación, si bien es importante enseñarle al estudiante estrategias cognitivas, estas deben ser reguladas, por lo que debe enseñarse con más profundidad el control metacognitivo de actividades cognitivas concretas, más que la simple reflexión sobre sus procesos de resolución de problemas algebraicos.

Klimenko (2009) publicó un artículo de investigación titulado: La enseñanza de las estrategias cognitivas y metacognitivas como una vía de apoyo para el aprendizaje autónomo en los niños con déficit de atención sostenida en la Revista Virtual Universidad Católica del Norte, en la ciudad de Medellín, Antioquia. El objetivo fue describir las estrategias cognitivas y metacognitivas en la resolución de problemas matemáticos en estudiantes con déficit de atención sostenida. La metodología utilizada fue cualitativa, se realizó un análisis crítico a partir de la interacción de investigadores con los desarrollos

teóricos de la didáctica de la Matemática, y los aportes de Johnson (1992) sobre estrategias cognitivas y metacognitivas, con un enfoque disciplinar educativo. Como resultado, se puede decir que para llevar a cabo la enseñanza de estrategias de aprendizaje, tanto cognitivas como metacognitivas, es importante contar con algunos principios metodológicos: La enseñanza de estrategias debe estar vinculada directamente con el currículo, las estrategias cognitivas y metacognitivas deben ser ampliamente explicadas e ilustradas en base del material de estudio, deben ejercitarse permanentemente, pues el perfeccionamiento, afinamiento e interiorización de las estrategias enseñadas se logra por la práctica continuada y consciente. Además, el docente debe explicar detalladamente a los estudiantes cómo se procede en los tres pasos principales de realización de una tarea: planeación, control de la ejecución y evaluación. Por ejemplo, el docente puede ejemplificar la planeación de la realización de una tarea, la priorización de actividades por hacer, organización del lugar y elementos de trabajo. Muestra cómo se puede ir verificando si la tarea se está haciendo bien mediante preguntas, revisión de resultados parciales, identificación de dificultades y de estrategias que pueden emplearse, así como instrucciones de autorreforzamiento, por último, el docente puede utilizar la estrategia metodológica de la discusión metacognitiva (Johnson & Johnson, 1992). Como aporte a la presente investigación, es necesario incluir progresivamente en el trabajo de campo, la estrategia de discusión metacognitiva como cultura de clase durante los procesos de resolución. Además, se debe explicitar las actividades de planeación, regulación y control. En ese proceso, se puede llevar al estudiante a formular una serie de interrogantes antes, durante y después de la realización de una tarea. Esta autointerrogación realizada con frecuencia y durante un tiempo suficientemente prolongado, permite establecer un hábito de autorregulación del proceso de resolución de problemas algebraicos.

Tendencia de las investigaciones en la categoría de estrategias metacognitivas

Luego de analizar las tendencias en los ámbitos internacional, nacional y local, puede concluirse que la metodología predominante, es la mixta, con dominancia cualitativa cuantitativa, con una orientación claramente educativa y utilizando un grupo experimental y

otro de control. Asimismo, los instrumentos utilizados consisten en cuestionarios ya validados y estandarizados por autores expertos en metacognición, estructurados con los componentes de planeación, regulación y control, sometiéndolos al análisis con técnicas estadísticas. Además, como resultado, se evidencia que la tendencia es que los estudiantes no desarrollan habilidades metacognitivas de manera natural, de hecho, aun en instrucción, les cuesta similar, más aun, aplicar dichas estrategias en la resolución de problemas algebraicos. No obstante, aquí hacen un aporte interesante a esta investigación, pues destacan que el uso de trabajos colaborativos, donde un estudiante escucha al otro, y lo graba, luego discuten sobre las concepciones; así como la técnica individual de pensamiento en voz alta, el uso de heurísticas, tales como esquematiza, fraccionar información, construir preguntas autorreguladoras, el uso de razonamiento plausible, desglose lingüístico, etc y aplicarlas cuando se esté atascado, mejoran significativamente los resultados en la resolución de problemas algebraicos.

1.2.3. Antecedentes en la categoría Transformación Semiótica

A nivel internacional

Guzmán (2010) desarrollo una investigación titulada: Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes, que fue publicada en la Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa de la república de México. El objetivo de dicha investigación fue determinar el sentido que cobran las nociones relativas a funciones lineales respecto a la conversión de registros gráfico, algebraico, o formal, en los estudiantes de secundaria. La metodología aplicada fue cualitativa, mediante la cual se constató la presencia de los siguientes registros: gráfico, algebraico o formal y natural, en las respuestas de estudiantes de secundaria respecto a nociones relativas a funciones lineales y el sentido que estas nociones cobran para ellos, a través de un cuestionario de 16 ítems, aplicado a 75 estudiantes, siguiendo un enfoque disciplinar educativo. Como resultado, en las respuestas de los estudiantes se evidencia, en general, monorregistros, es decir, están dadas en un solo registro, sin coordinar

explícitamente dos o más. Las respuestas se quedan en el registro en el cual está planteada la pregunta, o recurren al registro algebraico, con frecuencia privilegiado en las clases. La ingenuidad de la redacción de las respuestas, cuando en forma espontánea recurren al registro gráfico, queda de manifiesto por la descripción en lenguaje natural de visualizaciones a veces implícitas y otras veces de una lectura explícita de un gráfico. De esta manera, el aporte a esta investigación radica en mostrar la necesidad de lograr que los alumnos lleguen a articular diferentes representaciones semióticas; para lo cual es necesario enfrentarlos a suficientes problemas de traslados entre las distintas representaciones semióticas para favorecer el desarrollo del pensamiento conceptual. Esto requiere de la creatividad del docente, pues este tipo de problemas, hasta ahora, son poco frecuentes en los textos escolares y en las clases de matemática.

Bobadilla y Chavarría (2010) presentaron su tesis de maestría titulada: Dificultades que presentan los estudiantes de primer año de enseñanza media en la resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado, en la república de Chile. Su objetivo fue evidenciar el tipo de dificultades que presentan los estudiantes de Primero Medio en la resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado. La metodología utilizada fue mixta, con dominancia cuantitativa cualitativa de carácter descriptivo. Los sujetos de estudio fueron 95 estudiantes de primer año de enseñanza media de establecimientos educacionales de la ciudad de Chillán. Se aplicaron 2 pruebas, una al inicio y otra al final de la investigación, siguiendo un enfoque disciplinar educativo. Como resultado, se observó que los alumnos no establecen las relaciones que existen dentro de un mismo enunciado con la variable, por ejemplo, cuando se les pregunta ejercicios en donde deben considerar las edades actuales de ciertas personas pero a su vez deben considerar el paso del tiempo, por ejemplo para poder plantearse la ecuación correcta, los estudiantes no asimilan que con el paso del tiempo, las edades ya no son las mismas, y por ende las variables se deben modificar. En definitiva, los alumnos tienen dificultades para interpretar los enunciados más complejos, que involucran un pensamiento cognitivo más avanzado. Además, no saben interpretar cuando una cantidad dentro de un enunciado es negativa o positiva; por ejemplo, si el enunciando dice hace 10 años, o dentro de 10 años, los alumnos se confunden y no hacen la diferencia al momento de plantearse alguna ecuación por lo que muchas veces incluso, los lleva a encontrar cantidades o específicamente edades negativas,

es decir, no se tiene en cuenta la pertinencia de la solución. Por último, deben aprender a resolver ecuaciones de primer grado, ya sea con fracciones o con números, para poder plantear una ecuación representativa ante un enunciado en particular. Entonces, el aporte a esta investigación es comprender que la resolución de problemas algebraicos implica incluir en el esquema didáctico, una técnica para que el estudiante identifique las variables existentes, las formas en que se manifiestan, y los cambios algebraicos que sufren en el desarrollo del enunciado para realizar correctamente el cambio de registro de representación del que habla Duval (2016) y Godino (2012). Además, se debe trabajar aspectos de la metacognición tales como la regulación y control de los pasos intermedios en la resolución de problemas.

Godino (2012) publicó un artículo de investigación titulado: Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática en la república de España. El objetivo fue mostrar la necesidad de estudiar la resolución de problemas matemáticos a partir de la ontología y semiótica presentes en los objetos matemáticos y las acciones cognitivas del individuo puestas en juego en la actividad resolutiva. La metodología utilizada es de corte cualitativo, desarrollada a través de un análisis crítico a partir de la interacción de investigadores teóricos de la didáctica de la Matemática, y la revisión documental de artículos y enfoques científicos sobre la instrucción y cognición matemática, desde un enfoque disciplinar educativo. Como resultado, sostienen que se debe elaborar una ontología suficientemente rica para describir la actividad matemática y los procesos de comunicación de sus producciones. Así mismo, es importante incluir las nociones de significado institucional y personal de un objeto matemático, entendidos ambos en términos de sistemas de prácticas en las que el objeto es determinante para su realización, y su relación con la noción de comprensión, la clarificación de las nociones teóricas que se vienen utilizando en el área de conocimiento, en particular las nociones usadas para analizar los fenómenos cognitivos, lo cual hace referencia a los niveles dos y tres de algebrización. El aporte que hace a esta investigación es mostrar la necesidad de articular los procesos personales de comunicación matemática de los estudiantes, con el significado institucional o académico del mismo objeto matemático utilizado en la resolución de un problema algebraico, con el fin de facilitar la comprensión

del alumno y al docente, asociar las configuraciones epistémicas personales a la configuración epistémica institucional.

Ricaldi (2013) desarrolló una tesis doctoral titulada: Análisis del tratamiento del álgebra en el primer año de secundaria: su correspondencia con los procesos de algebrización y modelización, en la república de Perú. El objetivo fue mostrar la relación entre los procesos de justificación y nociones previas en la resolución de problemas algebraicos. La metodología utilizada fue cualitativa y utiliza como marco teórico fundamental la Teoría Antropológica de lo Didáctico, TAD, además de algunos aportes del Enfoque Ontosemiótico para el análisis de la idoneidad didáctica del proceso de estudio. El estudio fue realizado con 63 estudiantes del primer año de secundaria de un colegio privado en la ciudad de Lima, con un enfoque disciplinar educativo. Como resultado, se observó que en el aula tradicionalmente no se proponen actividades que refuercen el desarrollo de la capacidad de argumentación o justificación de procedimientos. Para las interpretaciones de las letras y, en general, de las expresiones algebraicas, el estudiante trae como sistema de referencia el aritmético y desde este contextualiza el uso de la letra como una generalización del número; es decir, las técnicas algebraicas usadas por los estudiantes y la habilidad para asignarle significado al álgebra escolar son influenciadas por la experiencia previa que el estudiante ha tenido con el manejo de expresiones numéricas en la escuela. Como aporte, para desarrollar los niveles de algebrizacion en la resolución de problemas, es necesario que se priorice el reconocimiento y usen las relaciones que se plantean, las cuáles van más allá de la búsqueda de soluciones aritméticas. Esto se puede trabajar proponiendo a los estudiantes que construyan o creen situaciones sobre la base de modelos previamente formulados y expliciten los distintos usos de las letras que, en general, constituyen la manifestación simbólica de las variables, para que sean reconocidas por los estudiantes y le asignen significado a su trabajo algebraico.

Di Barbaro, Olmedo, Galíndez y Peralta (2015) expusieron su investigación titulada: Errores y concepciones de los alumnos en álgebra, en la XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática realizada en Argentina. Su objetivo fue visualizar las debilidades o aspectos a superar de los estudiantes, estudiar los errores que cometen, dificultades que poseen, las causas y motivos que los provocan y las posibles concepciones

que subyacen en torno a los niveles de algebrización. Para ello se utilizó la metodología cualitativa y la recolección de datos se obtuvo de los cuadernos de seguimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje de los docentes y de entrevistas a alumnos y un profesor, bajo un enfoque disciplinar educativo. En los resultados fue evidente que los errores que cometen los alumnos se deben en su mayoría a que los conceptos previos son insuficientes entonces realizan asociaciones o inferencias incorrectas. Como desconocen o "desatienden" las propiedades de las operaciones, tanto con números reales como con polinomios, los alumnos "inventan" sus propias reglas y las trasfieren a nuevas situaciones. Por ejemplo: confunden los significados del signo menos (como signo o símbolo de la resta), el uso de los paréntesis (para jerarquizar operaciones o para denominar un par ordenado), la simplificación con la cancelación. Otros errores provienen de la utilización del signo igual como operador cuando resuelven ecuaciones, sin tener en cuenta el significado de equivalencia, y en consecuencia descuida la relación de simetría entre los miembros de la igualdad. Se podría expresar que consideran a los objetos matemáticos, como lo son las operaciones, ecuaciones y las letras, de manera aritmética. El aporte que hace a esta investigación es la sugerencia que en las categorías de análisis que integran el esquema didáctico, debe incluirse técnicas para articular la interpretación del lenguaje natural y algebraico con la operacionalización para resolver problemas algebraicos. Además, en ese nivel de algebrización, se debe lograr que los alumnos alcancen una concepción del álgebra como estructura y como lenguaje, donde cada objeto algebraico es parte de una estructura, y sepan construir ejemplos y contraejemplos.

Núñez (2017) desarrollo una tesis de maestría titulada: Representación semiótica como estrategia didáctica y competencias matemáticas en estudiantes del segundo grado de secundaria de la Institución Educativa Privada Educare de Chosica, en la ciudad de Lima. Su objetivo fue determinar la influencia de las representaciones semióticas en las competencias matemáticas en estudiantes del segundo grado de secundaria del I.E.P. Educare, Chosica. Asimismo, la metodología seguida tuvo dominancia cuantitativa. El tipo de investigación fue experimental. La muestra consta 56 estudiantes del segundo grado de secundaria del Colegio Educare, seleccionados en dos grupos, un grupo experimental y un grupo control con un enfoque educativo. A partir de los resultados obtenidos, se concluye, al 95% de nivel de confianza, que influye significativamente la aplicación de

representaciones semióticas en la mejora de las competencias matemáticas en los estudiantes del segundo grado de I.E.P. Educare Chosica. Así, para esta investigación esto significa que se debe poner énfasis en la conversión entre registros como parte sustancial del desarrollo de los niveles de algebrización, es más, puede diseñarse una secuencia didáctica que estimule eficientemente la realización de estas conversiones.

Castro (2017) publicó un artículo de investigación titulado: Abordaje didáctico de la comprensión de los problemas algebraicos en el nivel secundario de la República Dominicana. Su objetivo fue desarrollar una estrategia metodológica a partir de la caracterización de la situación actual que presentan los estudiantes del nivel secundario de las escuelas de la República Dominicana en la representación de los problemas, el pensamiento relacional, el análisis reflexivo y la comprensión de los problemas matemáticos. La metodología utilizada fue cualitativa, con el empleo de métodos del nivel teórico, en particular el análisis síntesis y la revisión documental, así como métodos empíricos. Se utilizaron los informes de los supervisores de los distritos de la capital del país, los resultados de tres estudios regionales comparativos explicativos de la calidad en la Educación en América Latina y el Caribe (Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación, 2013). Se aplicó una prueba pedagógica de entrada y de salida y se entrevistó a una muestra aleatoria de 80 estudiantes de cuatro escuelas públicas de Santo Domingo, Higüey y Hato Mayor, con un enfoque disciplinar educativo. Se propuso tres ejercicios en el nivel de algebrización dos, según el EOS

> 1. Represente algebraicamente: a) Dos números naturales consecutivos cualesquiera. b) Tres números naturales impares consecutivos. 2. En el siguiente problema, proponga la representación algebraica de la cantidad de naranjas de cada cesto: tres cestos contienen 575 naranjas. El primer cesto tiene 10 naranjas más que el segundo y 15 menos que el tercero. ¿Cuántas naranjas hay en cada cesto? 3. Represente gráficamente el siguiente problema: El mayor de dos números es 6 veces el menor y ambos suman 147. (p.3)

En los resultados, solo nueve estudiantes introdujeron variables para responder correctamente a las exigencias de las preguntas. Resultó muy común la respuesta errónea de seleccionar, en la pregunta 1, a números particulares con la condición exigida; por ejemplo, 15 y 16 para números naturales consecutivos y 3, 5, 7 para el caso del inciso b. En la pregunta 2 se manifestó igualmente dificultades en la comprensión del enunciado, el trabajo con las variables y los significados prácticos de las operaciones. La pregunta 3 fue la de mayor dificultad al no ser respondida por ningún estudiante. Se pretendía conocer el nivel de comprensión gráfica del enunciado del problema. En cuanto a la estrategia metodológica, consistió en fortalecer la unidad de lo instructivo con lo afectivo-motivacional al ir superando gradualmente los obstáculos de los estudiantes en cuanto a su imposibilidad para aprender a resolver problemas por sí solo, sin la ayuda directa del docente y también, por el contexto dialógico cooperativo en que se realiza la actividad de comprensión en la solución de los problemas algebraicos. El aporte a la investigación consiste en mostrar la necesidad de hacer una caracterización de los niveles de algebrización que el estudiante va utilizar en la familia de problemas algebraicos a abordar, que incluyan los cambios de registro, desde el natural, hasta su conversión al algebraico, de forma que los estudiantes puedan aprehenderlo significativamente y utilizarlo eficazmente en la resolución de problemas algebraicos.

A nivel nacional

Erazo y Muñoz (2014) publicaron un artículo de investigación titulado: La conversión en la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Diseño y validación de una metodología de análisis para libros de texto. Su objetivo fue describir las dificultades que presentan los estudiantes en torno a la conversión en registros de representación ontosemiótica, en problemas planteados en libros de texto La metodología utilizada fue cualitativa cuantitativo, de alcance exploratorio, descriptivo e interpretativo. Se tomaron problemas del algebra de Baldor y se aplicaron a un grupo de 10 estudiantes previas nociones de conceptos algebraicos, desde una perspectiva disciplinar educativa. De los resultados obtenidos, se desprende que los problemas asociados con la iniciación al

álgebra escolar, están relacionados con el cambio de convenciones respecto del referente aritmético, la interpretación de las letras y el reconocimiento y uso de estructuras. El primer inconveniente por parte de los estudiantes es reconocer la información que va a ser designada por una letra que representa la cantidad desconocida del problema, esto debido a que el usuario del libro de texto cuando lee la información presentada por el enunciado, designa como incógnita al primer dato que aparece en la información, por lo que es necesario trabajar el nivel 2 de algebrización del EOS. Se recomienda trabajar la conversión del lenguaje natural al algebraico, que permita mejorar la comprensión personal, esto es, leer detenidamente el problema, con el fin de identificar que dato es el desconocido y cuales depende de él, para obtener correctamente la designación de la variable como incógnita. En algunas ocasiones, es necesario parafrasear el registro inicial con el fin de esclarecer la información que este presenta y por otro se hace necesario recurrir a conceptos o propiedades matemáticas externas al enunciado que permitan obtener la ecuación del problema. Como aporte a la investigación, se resalta el hecho de involucrar la conversión a nivel intraregistro, de tipo transformacional, por ejemplo, en el lenguaje natural que representa el enunciado del problema. Esto permitirá que sea efectivo el parafraseo y la interpretación dentro del mismo lenguaje natural como paso intermedio a la transformación algebraica o a otro registro. Así, es importante fragmentar en pasos intermedios el proceso de conversión del lenguaje natural a otros registros.

Duval (2016) publicó un artículo titulado: Un análisis semiótico de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas, en Colombia. Su objetivo fue analizar el papel de la semiótica desde un punto de vista cognitivo para la resolución de problemas matemáticos. La metodología fue Cualitativa, de tipo documental y se realizó una revisión bibliográfica de la literatura concerniente al rol de los registros de representación semiótica en la resolución de problemas algebraicos en estudiantes de primaria y secundaria, con un enfoque disciplinar psicoeducativo. Como resultado, Duval cuando analiza el papel de los registros de representación semiótica para la resolución de problemas algebraicos desde un punto de vista cognitivo, afirma que se debe tener en cuenta tres características específicas estrechamente conectadas

> 1. Los pasos de resolución de problemas transcurren a través de una transformación de representaciones semióticas que involucra el uso de algún sistema semiótico. 2. Para llevar a cabo esta transformación, se pueden usar registros bien diferentes de representaciones semióticas. 3. Los objetos matemáticos nunca se deben confundir con las representaciones semióticas utilizadas, aun si no hay acceso a ellos, diferente del uso de una representación semiótica. (p.12)

Como aporte a esta investigación, se tiene en que los niveles de algebrización a desarrollar en el marco del EOS, los estudiantes deben utilizar diferentes registros de representación semiótico de un mismo objeto matemático y lo puedan articularlo en al menos un paso determinado en el proceso de resolución.

Ospina (2012) desarrolló una tesis de maestría titulada: Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto funcional lineal. Su objetivo fue comprender las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas que realizan los estudiantes cuando se enfrentan a la solución de situaciones propias del concepto de función lineal. La metodología tuvo un enfoque cualitativo interpretativo, el cual se hizo comprensible a partir del diálogo con la teoría, dando sentido a lo que cada estudiante desea expresar. La muestra se conformó con un grupo de estudiantes, con edades que oscilan entre 13 y 15 años que cursan grado octavo de la Institución Educativa Eugenio Pacelli del municipio de Manizales departamento de Caldas. Los instrumentos utilizados fueron: cuestionario escrito y grabación de video. Como resultado, no se hace explícito el registro de llegada para reconocer las representaciones que exteriorizan espontáneamente los estudiantes en sus respuestas, las características de estas conversiones, así como las articulaciones que establecen entre diferentes registros de representación. Como aporte a esta investigación, se puede trabajar la primera conversión al registro gráfico y a partir de esta, se realizan las conversiones en los otros registros, pues esto puede facilitar el tránsito a otros registros de representación, ya que es un registro que permite una mayor visualización de la función lineal, mostrando elementos que en otros registros no son visibles, en el dominio disciplinar de los niveles de algebrización.

Núñez, Hernández y Contreras (2017) publicaron un artículo de investigación titulado: Representación semiótica de la noción de función: concepciones de los estudiantes de instituciones educativas. Su objetivo fue evaluar la habilidad de los estudiantes para articular diversos registros de representación semiótica con relación a la noción de función. La investigación toma como marco de referencia la articulación de los trabajos de diversos investigadores, especialmente los de Duval (2016). La metodología utilizada es cualitativa, de tipo cuantitativo y es de naturaleza descriptiva. Los datos fueron recolectados mediante un test de ocho ítems, en los que se utilizan diversos registros de representación en torno al concepto de función, bajo un enfoque disciplinar educativo. Como resultado, en lo que concierne a los registros semióticos, se evidencia el predominio de las representaciones algebraicas. Los estudiantes, en la mayoría de los casos presentan muchas dificultades al intentar transferir la función desde la forma verbal, tabla y/o gráfica, a la algebraica, e igualmente se les dificulta establecer la relación entre los diferentes sistemas de representación. Esto genera como aporte a esta investigación, la necesidad de abordar conceptos algebraicos como función, debe hacerse en sus distintos registros de representación para una comprensión más completa y profunda. Esto de partir desde procesos iniciales como la traducción de un problema desde el lenguaje natural al lenguaje algebraico.

Ordóñez (2017) publicó una investigación titulada: Representaciones Semióticas del Concepto de Ecuación Lineal con una Variable a partir de la implementación de un juego didáctico en la revista Amazonia Investiga. El objetivo fue identificar qué tipos de representación utilizan los estudiantes, las conversiones y tratamientos que hacen de ellas. La metodología utilizada fue cualitativa, de alcance interpretativo que obedece a la descripción y análisis de la información recolectada a través de cuestionarios, fotografías, vídeos, observaciones, participación en clase, referenciado en los Registros de Representación Semiótica, RRS de Duval(1999) y Godino (2014) con diez estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Técnica Miguel Zapata, ubicada en el corregimiento de El Plateado, municipio de Argelia Cauca, bajo un enfoque disciplinar educativo. Como resultado, se pudo observar que todos los estudiantes representaron algebraicamente los elementos que hacen parte del objeto de estudio, tales como la variable; el coeficiente; los operadores, suma, resta, multiplicación o división; y las

constantes, es decir las “unidades significantes” Duval (1999, p.74), las cuales se ven reflejadas en las preguntas consignadas dentro del tablero de cada parqués. Además, la elaboración de los parqués da cuenta del uso de más de un registro, del algebraico al gráfico, lo cual indica la coordinación rápida y espontánea que realizaron los estudiantes en sus conversiones cada vez que pasan de un registro a otro, relacionando el objeto con sus propiedades o características. Como aporte a esta investigación, es importante que sea objeto de reflexión didáctica la enseñanza del uso de registros distintos al algebraico para que el estudiante avance en sus procesos de aprendizaje, teniendo como opción los registros gráficos que posiblemente ayudan a entender o relacionar el objeto matemático y su función en el estudio de las ecuaciones y de otros objetos matemáticos. Se debe permitir que el estudiante explore, analice, relacione, escriba y represente sus ideas, desde situaciones contextuales que le sean familiares, como el juego, para involucrarlo activamente.

A nivel local

Ospina y Reyes (2018) desarrolló una tesis de maestría titulada: Nociones conceptuales de función en los estudiantes de noveno grado en la ciudad de Medellín, Antioquia. Su objetivo fue describir las nociones conceptuales de función poseen los estudiantes del noveno grado de la Institución Educativa Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo y del Colegio Colombo Británico. Esta investigación se desarrolló con la metodología cualitativa, desde una perspectiva holística donde se busca una interpretación detallada sobre la realidad de los estudiantes frente al estudio del concepto de función. Asimismo, se realizó por medio de un estudio descriptivo y exploratorio con el propósito de establecer elemento de valoración sobre los posibles logros y dificultades de los estudiantes. El instrumento a utilizar fue diseñado por los investigadores de acuerdo a su experiencia en el aula y los aspectos de interés a observar en su investigación, bajo un enfoque disciplinar educativo. Como resultado, existe poca claridad que los estudiantes frente al concepto de función, así como limitaciones de los usos de dicho concepto para identificar relaciones funciones. De tal forma que dichas dificultades se extienden a la

confusa asociación de representaciones con el objeto, desencadenando así, una ausencia de articulación entre distintos registros de representación del mismo objeto. Además, poseen a una noción reducida de función, a la ausencia de asociación en las diferentes representaciones del objeto, a la desconexión entre lenguaje natural y algebraico y a un tratamiento de las funciones predominantemente aritmético, correspondiente al nivel de algebrización tres. Es aporta a la presente investigación lo siguiente: además del tratamiento de la situación problema con reglas algorítmicas, es sumamente importante incluir los niveles dos y tres de algebrización, mediante la explicación de antemano a los estudiantes los significados alrededor de las expresiones algebraicas y sus diferentes formas en que pueden ser representadas, verificando su habilidad de conversión antes de avanzar a otro objeto de aprendizaje.

Gil y Mercado (2019) desarrolló una tesis de maestría titulada: Interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita a partir del trabajo cooperativo en el municipio de Barbosa, Antioquia. Su objetivo fue posibilitar la interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita, a partir del trabajo cooperativo, a través de una secuencia didáctica para estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Luis Eduardo Arias Reinel. Se planteó una metodología a partir del paradigma de investigación cualitativo, mediante el método de investigación acción pedagógica y una secuencia didáctica como estrategia, como técnica principal de recolección de datos se utilizó la observación participante. Se realizaron registros fotográficos, videos y cuestionarios como instrumentos para obtener suficiente información, organizada por medio de unidades de análisis, bajo un enfoque disciplinar educativo. Como resultado, se evidenciaron algunos errores relacionados con el tratamiento algebraico, despeje de incógnitas y operaciones algebraicas, procesos que requieren de un tratamiento especial como el que se realizó con la interpretación de problemas, a través de la actividad relacional, de transformación e interpretación inherentes al algebra. Por ello, como aporte a esta investigación, es necesario trabajar con los estudiantes la conversión entre los registros de representación y la transformación, generalización y relación de variables, como actividad inherente a los niveles de algebrización establecidos en el EOS.

Tendencia de las investigaciones en la categoría transformación semiótica

Luego del análisis de la categoría transformación semiótica, en el ámbito internacional, nacional y local, se observa que la tendencia metodológica es mixta, con enfoque educativo, utilizando como instrumentos, las pruebas escritas, orales, así como el uso de registros audiovisuales para la recolección de la información, a través de los cuales se interpreta el comportamiento de los estudiantes. En esa línea, con frecuencia se encuentra que los estudiantes no tienen claridad del sistema de signos que se utiliza en algebra, sus significados, lo que ocasiona dificultades en la resolución de problemas algebraicos, específicamente en la representación semiótica de registros verbales, operaciones de transformación con el modelo construido, y la contextualización del resultado obtenido. Cabe destacar que la tendencia en el tipo de problemas algebraicos abordados en estas investigaciones, son los modelables a través de ecuaciones de primer grado. Asimismo, la tendencia referente a los aportes de dichas investigaciones al presente estudio, se orienta a la construcción de ambientes de aprendizaje que fragmenten los procesos implicados de conocimiento del significado de signos y en las transformaciones de conversión y tratamiento, para resolver problemas algebraicos, en un entorno colaborativo.

2. Bases teóricas y conceptuales

En este apartado se exponen las teorías generales y sustantivas que sirven de soporte al trabajo de investigación que se desarrolla, describiendo sus conceptos estructurantes y la forma en que se interrelacionan, para explicar el fenómeno de la resolución de problemas en los sujetos. Además, tanto en las teorías generales como sustantivas se finaliza con una definición sintética de los conceptos de problema y resolución de problemas, la representación esquemática ecléctica del proceso resolutivo, así como la relación con las categorías de análisis.

REPOSITORIO

2.1. De la Resolución de problemas: Importancia y algunas tendencias teóricas

En el marco teórico de esta investigación, se establece como teoría general, la resolución de problemas, por ser el contexto conceptual donde cobran sentido las categorías de análisis predeterminadas, a saber, saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica. Durante el proceso de rastreo bibliográfico a investigaciones sobre la resolución de problemas, se evidencia que existen diferentes teorías en torno a dicho tópico, todas ellas con un aspecto en común: su clara orientación psicológica. No obstante, este hecho no debería causar sorpresa, dado que, la resolución de todo problema implica procesos de pensamiento (Gangoso, 2016).

Concretamente, las teorías de resolución de problemas que en el desarrollo de este apartado se describen son: Teoría de la Gestalt, Teoría del conductismo y Teoría cognitiva. En cada una de estas, se expone su enfoque frente al concepto de problema y lo que implica la resolución de problemas, finalizando con una síntesis, al respecto. Con base en dichos enfoques, se propone una definición integral del concepto de problema, tipos de problemas, resolución de problemas, así como un esquema ecléctico del proceso de resolución de problemas, culminando con la contextualización de las teorías abordadas, en el marco de cada una de las categorías de análisis.

2.1.1. Teorías psicológicas

2.1.1.1. Teoría de la Gestalt

La teoría de la Gestalt tiene como premisa fundamental, la siguiente afirmación:

> la percepción humana no es la suma de los datos sensoriales, sino que pasa por un proceso de reestructuración que configura a partir de esa información una forma, una Gestalt, que se destruye cuando se intenta analizar, y esta experiencia es el problema central de la psicología. (Antón, 2011, p.11)

Así, desde la teoría de la Gestalt, la concepción de un concepto o unidad de análisis como la suma de un conjunto de partes atómicas, es insuficiente para aprehender dicha unidad como un todo, toda vez que esta, es de naturaleza holística, cuya realidad se modifica cuando es desglosada. Para esta escuela, la psicología debe estudiar el significado y éste no puede dividirse en elementos o partes atómicas de forma lineal, más bien, las unidades de análisis deben estudiarse como totalidades significativas (Antón, 2011).

Con todo esto, puede decirse que para la Gestalt, un problema es "una estructura, cuya solución es un proceso de búsqueda de relaciones para reorganizar y transformar dicha estructura" (Gordon & Arellano, 2014, p.198). Así, en una primera aproximación puede decirse que, resolver un problema implica descubrir los conceptos, las relaciones esenciales, las condiciones y las restricciones entre ellos, desde la estructura inicial, para transformarla y lograr la meta o la respuesta al problema.

Dicha reorganización o transformación ocurre cuando una determinada estructura percibida por el sujeto no permite la solución del problema, por lo que es necesario reconfigurar los elementos del mismo, de modo que se pueda generar soluciones exitosas (Guevara, 2013). La forma en que los procesos de comprensión estructural y reorganización ocurren, responde a las leyes de la teoría de la Gestalt, que son las siguientes: "ley de la dialéctica, ley de cierre, ley de semejanza, ley de proximidad, ley del contraste, ley de continuidad y ley de simetría" (Barrachina, 2015, p. 37).

Respecto a la ley de la dialéctica, esta analiza la tendencia de separar la figura de una imagen y su fondo, teniendo en cuenta que figura y fondo pueden intercambiar papeles, de modo que la figura puede constituirse en el fondo y viceversa. A su vez, la ley del cierre, señala que el cerebro tiene la tendencia a completar los espacios de una composición, cuando algunos de sus elementos no están completos, de hecho, el inconsciente genera los detalles que faltan y da uniformidad a las figuras, eliminando a su vez los detalles innecesarios (Velasco, 2012).

Asimismo, la ley de semejanza indica que la mente agrupa los elementos que comparten características visuales, como la forma, tamaño, color y los unifica. Además, la ley de proximidad plantea la tendencia a percibir los objetos y las formas que están cerca

las unas de las otras como si pertenecieran a un mismo grupo, independiente de su color y forma, para facilitar nuestra percepción de los objetos y crear contornos dónde en principio no existen. También, la ley del contraste menciona que la posición relativa de los diferentes elementos en el todo, incide sobre la atribución de cualidades de los mismos, siendo el tamaño una de ellas. Adicionalmente, la ley de la continuidad sostiene que los elementos que mantienen un patrón o dirección, o apuntan en un mismo sentido, se perciben de forma continuada. Por su parte, la ley de la simetría, argumenta que el cerebro persigue estructurar la información visual, de manera simple, estable y ordenada para facilitar la comprensión (Barranchina, 2015).

Además, la percepción puede interpretarse en dos sentidos: uno, como la organización de los elementos dentro de un patrón global; y dos, como la "toma de conciencia" de que un elemento o una situación particular determinan la solución del problema sin importar tanto la organización global (Velasco, 2012, p.65). Lo anterior indica que la percepción determina la adopción, en cada problema, de la integralidad de sus elementos constitutivos, o de un elemento particular, del que se va descubriendo su valor funcional en la totalidad del problema. En esa línea, Perls (2013) menciona que existen problemas, cuya resolución avanza por estadios, desde las soluciones más generales hasta las específicas.

Ahora bien, durante los procesos perceptivos anteriormente mencionados, es susceptible de desarrollar la técnica de pensamiento en voz alta, para la recogida de la información, con el fin de hacer consciente ciertos procesos que normalmente pasan desapercibidos mientras se resuelven problemas. En esa línea, se encuentra el aporte de Wallas (citado en Martínez, 2017), quien propone los siguientes pasos explícitos: “preparación, acumulación de información; incubación, marginación transitoria del problema; iluminación, un darse cuenta; verificación, hallazgo de la solución” (p. 15).

Adicionalmente, durante las fases de resolución de problemas mencionadas por Wallas, entran en acción otros aspectos relevantes desde la perspectiva gestalista: el principio de discernimiento, insight, la transferencia y el pensamiento productivo y reproductivo. Estos principios se fundamentan en que los seres humanos cuando resuelven problemas, no suelen realizar ensayos ciegos o al azar, por el contrario, guían su conducta

en función de intuiciones e hipótesis, de manera condicionada por las características del sujeto y la estructura de la situación problema (López, 2016).

En la siguiente sección, se explican dichos aspectos relevantes del presente enfoque de resolución de problemas de la Gestalt, iniciando con el insight.

Insight

El discernimiento o insight es un concepto clave que implica un acto de revelación interior acerca de la solución de un problema y donde existe comprensión de las relaciones medios-fines (Kernberg, 2012). Aunque el término difícil de conceptualizar, existen algunas características propias de este tipo de comportamiento tales como

> El examen persistente de la situación problema; titubeo, pausa, atención concentrada; ensayo del modo de la respuesta más o menos adecuada; ensayo de otras respuestas cuando alguna haya sido inadecuada; atención persistente o reiterada a la meta y a la motivación; aparición del punto crítico donde el organismo de pronto y directamente, ejecuta el acto adaptativo requerido; repetición de la respuesta adaptativa y notoria habilidad para atender aspectos y relaciones esenciales de la situación problemática y para descuidar, las variaciones no esenciales. (Kernberg, 2012, p. 11)

Con relación a la reestructuración perceptiva del sujeto, la Gestalt señala que ésta permite la emergencia del proceso de "comprensión súbita" o insight (Velasco, 2012, p. 63). Esto implica que el sujeto sabe que ha encontrado la solución, antes de ponerla en práctica, es decir, desde el principio, puede visualizar el final (Sanz, 2016).

El mencionado autor también sostiene que el desarrollo cognoscitivo alcanzado por el organismo es otro factor que afecta el discernimiento. Por eso, cuanto mejor desarrollo

intelectual tenga el individuo, mejor preparado se encontrará para ejecutar comportamientos tipo insight. Por ejemplo, las habilidades de planificación, regulación y evaluación del sujeto, pueden favorecer la producción de soluciones por discernimiento (Sanz, 2016). Además, la práctica es otro condicionante importante, porque, por lo general, el insight o discernimiento ocurre, cuando de antemano se ha comprendido la situación problema y se ha estado ensayando o practicando procesos de solución (Kernberg, 2012).

Respecto al proceso de ensayo y práctica sobre la resolución del problema, de manera más específica, Cáceres y Munevar (2017) señalan que el eventual insight se ejemplifica, tomando el contexto de un estudiante que tras varios intentos frustrados por resolver algún problema, quizá bajo un tipo de pensamiento circular, con cansancio cognitivo, es decir, que recurre al uso de las mismas estructuras cognoscitivas y procedimientos de solución no adecuados; decide abandonar la tarea durante cierto tiempo, sean horas, días o semanas. Luego de tomar un descanso, el estudiante intenta nuevamente solucionar el problema, encontrando quizá, que la tarea es más fácil y rápida (Cáceres & Munevar, 2017).

De lo anterior, puede decirse que el cansancio obstaculiza las vías alternas, así como el reemplazo de esquemas antiguos por nuevas ideas o pensamiento divergente, que permitan abordar los problemas desde las perspectivas anteriormente relegadas. Para explicar el fenómeno anterior, algunos autores sostienen que durante el periodo de descanso, cierta actividad inconsciente es desarrollada permitiendo la gestación o incubación de la solución. Aunque este hecho no se ha comprobado experimentalmente, existen reiteradas confesiones e introspecciones que demuestran la probabilidad del fenómeno (Sanz, 2016).

Finalmente, en el marco de la teoría de la Gestalt, el proceso cognitivo implicado en la resolución de al menos un problema, es susceptible de ser transferido a otras situaciones similares. En la siguiente sección se analiza con más detalle en que consiste la transferencia, cuál es su influencia en la actividad de resolución, así como los conceptos de aprendizaje productivo y reproductivo, propios de la Gestalt.

Transferencia

La transferencia se refiere a la “habilidad para movilizar conceptos, procedimientos, relaciones o actitudes, de cierta experiencia o problema resuelto, a otras situaciones similares, que potencialmente se consideran pueden tener la misma efectividad, si se aplican íntegramente o con ciertos ajustes” (Robine, 2013, p.45).

Ahora bien, de acuerdo a la forma de implementarse, esta transferencia puede ser un recurso a favor o en contra a la hora de resolver problemas. Por ejemplo, puede suceder que la experiencia anterior en la resolución de determinado problema genere una actitud de mecanización, habituación, fijeza funcional o predisposición, que actúe como impedimento en la comprensión de problemas nuevos (Duncker & Mayer, citado en Soto, 2019). Esta fijeza funcional se refiere a la estandarización de uso de ciertos aprendizajes anteriores de una determinada experiencia y no a una experiencia general, amplia y no específica, que sí es necesaria para la reorganización (Mayer, citado en soto, 2017). El punto central del aspecto negativo que puede tener la transferencia, consiste en que el valor funcional asignado a determinado objeto inhibe la posibilidad de pensar que dicho objeto pueda tener usos diferentes, como ensayar alternativas procesuales en problemas nuevos (Robine, 2013).

Para ejemplificar lo anterior, Sánchez (2013) plantea lo siguiente: “si un determinado problema frecuentemente se resuelve invocando una fórmula, por lo general se recurre a dicha fórmula y se olvida explorar otras alternativas que pudieran ser incluso más sencillas y rápidas” (p.78). Es decir, los sujetos tienden a transferir en forma negativa las fórmulas viejas a problemas cuyas soluciones deben ser otras. En cuanto a los efectos positivos, se tiene la posibilidad de encajar dichos aprendizajes de experiencias anteriores que ponen a disposición del sujeto elementos favorecedores para la reorganización, en la medida en que permiten la integración y articulación de saberes, siempre que se haga con los ajustes y apertura paradigmática, que la situación nueva demande (Martínez, 2017).

Pensamiento productivo y reproductivo

REPOSITORIO

Uno de los aspectos relevantes de la Gestalt es la distinción entre pensamiento reproductivo y productivo (Assuero, 2020). Una forma clara de presentar la distinción entre estos dos conceptos es que corresponden, respectivamente, a los métodos de memorización y comprensión. Por citar un caso, el primero enfatiza la fórmula y los pasos al aplicarla para el cálculo del área del paralelogramo. El segundo subraya la propiedad geométrica estructural del triángulo que hay en un extremo de la figura que puede ser llevado al otro extremo formando así un rectángulo. Así, en la mencionada comprensión estructural se muestran las partes y el estudiante debe realizar procesos de abstracción inducción para solucionar el problema, lo cual le permite transferir, con alto grado de éxito, su aprendizaje a situaciones nuevas, caso contrario a los que aplican mecánicamente las formulas (Ruiz, Luque & García, 2015).

Además, para Greeno (citado en Gangoso, 2016), el pensamiento productivo y reproductivo se diferencian en función del papel que juega la memoria en cada uno de ellos. Para este autor, la solución de problemas obedece a una estructura de cinco niveles: "1. Lectura del texto, 2. Interpretación de conceptos y elementos, 3. Obtención de la información relevante, 4. Estructuración de un plan de solución, y 5. Desarrollo de las acciones necesarias" (p.10).

En esa línea, la información recuperada de la memoria a largo plazo permite desarrollar una concepción o representación del problema y establecer redes de relaciones entre las distintas variables y características del problema (Velasco, 2012). En este punto, hay que destacar que el pensamiento reproductivo es útil cuando el plan de solución es un algoritmo almacenado en la memoria a largo plazo; mientras que el pensamiento productivo es eficaz, cuando los procedimientos requeridos para resolver el problema implican que las propiedades de la estructura deben ser reorganizadas o deben añadirse nuevos elementos (Soto, 2010).

Sin embargo, según Greeno, se debe tener cuidado con esta clasificación, pues los tipos de problemas y la naturaleza del pensamiento requerido para resolverlos, productivo, reproductivo o creativo, es relativa a la experiencia del sujeto en relación con el problema. Por ejemplo, un problema puede estar bien estructurado para una persona que posea los conocimientos necesarios y pertenecer a otra categoría diferente si quien los resuelve es un

novato (Greeno, citado en Gangoso, 2016). Así, el tipo de conocimiento en cualquier de las situaciones es asunto de grado y no de clase (Sanz, 2016). Por lo tanto, la distinción entre pensamiento productivo y reproductivo no parece estar claramente definida; depende de la relación conocimientos del sujeto y conocimientos necesarios para resolver un problema. De esta manera, es necesario entrenar con heurísticas de solución de problemas a cada sujeto, para orientarlo en la solución de problemas, implicando conocimientos generales y específicos (Gangoso, 2016).

En síntesis, con base en la teoría de la Gestalt, un problema es un entramado conceptual, que un determinado individuo enriquece a partir de su reestructuradción. En esa línea, resolver un problema implica para el sujeto la búsqueda de relaciones entre conceptos de la estructura de partida del problema, hasta obtener una nueva configuración, que se constituye en la solución del mismo. En la trazabilidad de este proceso, se tiene que el individuo, siguiendo las leyes de la Gestalt, tales como ley de la dialéctica, ley de cierre, ley de semejanza, ley de proximidad, ley del contraste, ley de continuidad y ley de simetría, capta la estructura del problema, y en un proceso articulado de discernimiento, transferencia y pensamiento reproductivo y productivo, genera avances progresivos en su reestructuración, a partir de la construcción de relaciones conceptuales, ya sea desde la globalidad del problema, o desde cierto concepto o grupo de conceptos clave, teniendo en cuenta que se necesita más que el análisis o tratamiento fraccionado de estos, para su comprensión y adaptación en la globalidad del problema. Finalmente, la solución es la estructura del problema ya reconfigurada o reorganizada (Antón, 2011; Kenberg, 2012; Velasco, 2012; Guevara, 2013; Cáceres & Munevar, 2016; Gangoso, 2016; Martínez, 2017).

2.1.1.2. Teoría del conductismo

La teoría del conductismo está basada en los estudios de aprendizaje mediante condicionamiento, según los cuales “el aprendizaje puede estudiarse y comprenderse a partir del comportamiento observable del sujeto, siendo innecesario el estudio de los procesos mentales superiores” (Pellón, 2013, p. 390).

Desde un contexto filosófico, esta teoría proviene de la concepción empirista realista de Hume, que, al igual que Aristóteles, asume que inicialmente no sabemos nada, o somos como una "tabula rasa" y todo el conocimiento lo adquirimos del medio por mecanismos asociativos a través de los sentidos. Así, la estructura de la conducta, la forma en que actuamos, sería una copia isomórfica de las contingencias o hechos ambientales (Peña, 2010).

De forma general, los modelos conductistas más relevantes son: el condicionamiento clásico de Pavlov, el condicionamiento operante de Skinner y el condicionamiento vicario de Bandura (Viñoles, 2013). Con relación al condicionamiento clásico de Pavlov, Watson (citado en Pellón, 2013) establece el paradigma experimental del conductismo con las siguientes premisas: "se aprende asociando estímulos con respuestas, el aprendizaje está en función del entorno; el aprendizaje no es duradero, necesita ser reforzado; el aprendizaje es memorístico, repetitivo y mecánico y responde a estímulos" (p. 390).

En consonancia con lo anterior, el entorno tiene un papel activo en el aprendizaje, es decir, el contexto influye contundentemente en el proceso de aprendizaje asociativo, evidente en la acción del individuo. Así, el conductismo al que se refiere esta teoría, no niega la conciencia del sujeto, simplemente omite su estudio introspectivo, por uno totalmente empirista, basado en la conducta observable del sujeto (Pellón, 2013).

El aspecto central de la teoría conductista, es su concepción asociacionista del conocimiento y del aprendizaje, es decir, "toda conducta por compleja que sea, es reductible a una serie de asociaciones entre elementos simples" (Ardila, 2013, p. 317). Además, desde esta perspectiva, el conocimiento humano está constituido exclusivamente de impresiones e ideas recibidas a través de los sentidos, siendo las ideas, copia de las impresiones.

Dicho lo anterior, el conductismo tiene en cuenta las siguientes leyes del condicionamiento del proceso asociacionista: ley del ejercicio, ley del efecto, principio del ensayo error, ley de correspondencia (Peña, 2014). Según este autor, "la ley del ejercicio establece que las respuestas más practicadas serán más probables que ocurran en situaciones idénticas o similares. La ley del efecto sostiene que las respuestas más

reforzadas serán igualmente más probables de ocurrir" (p.3). Es decir, tanto la ley del efecto como la ley del ejercicio tienden a consolidar la asociación estímulo respuesta y determinan la mayor o menor predominancia de una respuesta sobre otras.

Asimismo, la ley del ensayo y error significa que el sujeto va explorando dentro de su repertorio conductual hasta ensayar aquella respuesta que se asocie exitosamente con un estímulo o patrón de estímulos (Peña, 2014). En cuanto al principio correspondencia, se basa en el isomorfismo de las variables que median entre el estímulo y la respuesta, a través de una relación uno a uno. El estímulo, proveniente de la realidad, provoca una respuesta en la mente, que se constituye en una copia de la primera. En esta concepción subyace la idea de que la mente, si existe, es una copia o reflejo de la realidad y no al revés (Quezada, 2013).

Otra característica del conductismo muy ligado al principio anterior es su ambientalismo. Ello se debe a que el conductismo, como enfoque asociacionista y mecanicista, sitúa el principio motor de la conducta fuera del organismo. Así, presuponen que el aprendizaje siempre es iniciado y controlado por el ambiente (Cadena & Saucedo, 2016). Además del ambientalismo, la equipontecialidad es otra faceta del conductismo. Según Watson (citado en Cadena & Saucedo, 2016), las leyes del aprendizaje son igualmente aplicables a todos los ambientes, especies e individuos. Se postula que existe una única forma de aprender: la asociación. El principal objetivo es predecir la conducta humana, asumiendo que el aprendizaje estará controlado únicamente por las leyes formales de la asociación, reglas sintácticas, sin que el contenido de los términos asociados afecte el aprendizaje (Cadena & Saucedo, 2016).

En cuanto a la resolución de problemas, según Skinner (citado en Pellón, 2013) ocurre cuando el sujeto selecciona aquella respuesta que es apropiada dentro de la jerarquía, más que crear una nueva. Este proceso se da mediante un proceso continuado de resolución, en el que cada respuesta recibe un valor para el sujeto, en función del resultado que obtenga de aplicarlas, es decir que le ayuden a resolver el problema. Así, hay respuestas que se fortalecen o debilitan, en función de su efectividad. Marcar una vía correcta es, técnicamente hablando, construir un estímulo discriminativo, al que puede llamársele una ley de asociación dentro del conductismo (Skinner, citado en Pellón, 2013).

De manera puntual, un estímulo discriminativo “expresa relaciones confiables entre los estímulos y las consecuencias reforzantes de las respuestas emitidas ante ellos” (Gallardo, 2018, p. 78). Cuando un sujeto en sus intentos por resolver un problema descubre la respuesta correcta es frecuente observar cómo el sujeto señaliza un determinado estímulo o rasgo como indicador que debe tener presente para resolver el problema en situaciones futuras (Morales, 2018). Particularmente, el ser humano evidencia sobre todo, el uso de estímulos discriminativos verbales, más que cualquier otro estímulo. Skinner (citado en Morales, 2018) lo muestra con el siguiente ejemplo: "Las manzanas rojas son dulces, la palabra "roja" identifica una propiedad del estímulo que normalmente nos indica que la manzana es comestible y estará dulce” (p.17).

A partir del ejemplo anterior, puede explicarse la activación de asociaciones a partir de estímulos, para solucionar problemas, entendiendo que ciertos aspectos de un estímulo o patrón de estímulos pueden ser indicadores que permiten recordar confiablemente las vías para resolver problemas. El enfoque asociacionista supone que para cualquier situación problema o estímulo, existen asociaciones o vínculos con muchas respuestas posibles, R1, R2, R3, etc., que se pueden presentar mayor o menor asociación y esto determina la probabilidad de escoger una asociación específica como respuesta (Morales, 2018). Esto significa que en el enfoque asociativo se dan tres elementos fundamentales: el estímulo, representado por la situación problema; las asociaciones mediadas entre el estímulo y la respuesta, y la respuesta representada por el comportamiento o conducta adoptada por la persona que resuelve el problema.

En esa línea del proceso de asociación, la variación del nivel de las asociaciones y respuestas genera un hábito o grupo de hábito para quien resuelve el problema. Aunque ante un nuevo problema, hay un acervo de posibles asociaciones y respuestas, como se dijo en el párrafo anterior, pueden encontrarse jerarquizados o tienen diferente probabilidad de ser elegidos. Esta elección depende de la práctica, el reforzamiento, el estado motivacional y el cansancio, los cuales pueden incidir en el proceso de resolución, unos en forma directamente proporcional, tales como la práctica, e reforzamiento y un estado emocional óptimo; mientras la fatiga o la inhibición reactiva y condicionada actúa en forma inversamente proporcional, tendiendo a debilitar la fuerza del hábito.

Hasta este punto, puede decirse que en la teoría conductista, fundamentalmente asociacionista, un problema

> es un estímulo *E*, que evoca una respuesta interna en miniatura, llamada respuesta de mediación *rm*, la cual a su vez crea un nuevo estado interno *sm*, puede evocar otra *rm* distinta y así sucesivamente hasta que un *sm* finalmente evoque una respuesta abierta *R*. (Pellón, 2013, p. 390)

Lo anterior indica que un estímulo externo produce una cadena de respuestas mediacionales, antes de obtener una respuesta final observable. De hecho, Berlyne (citado en Suarez, 2013) llamó a este fenómeno el tren de pensamiento que puede representarse formalmente, de la siguiente manera: "Situación Problema---Mecanismo Mediacional S - - - rm 1 - - - sm 1 - - - rm2 - - - sm2 - - - rm3 - - - sm3 - - - R Conducta final o Solución" (p. 394).

En esa línea paradigmática entre el estímulo y la respuesta, Dewey (citado en Fernández, 2010), propuso cinco etapas mediacionales distintas para la resolución de problemas, que son: "identificación del problema, definición del problema, producción de hipótesis sobre posibles soluciones, desarrollo de estas hipótesis, deducción de sus propiedades, comprobación de las hipótesis" (p. 37).

Posteriormente, Polya (citado en Gangoso, 2016), a partir de su experiencia como matemático y de las observaciones como profesor, elaboró una propuesta similar, para lo cual propuso el fraccionamiento en problemas más simples con solución accesible. Sugirió las siguientes etapas: "comprensión de problema, elaboración de un plan, puesta en marcha del plan y visión retrospectiva" (p. 18). La idea implícita de Polya es la existencia de problemas equiparables, cuyos procesos de solución son similares. Bajo esta perspectiva, la dificultad básica está en el reconocimiento del estímulo por parte del resolutor, que en algunos casos se refiere a una expresión matemática, concepto, relación o procedimiento a utilizar.

Respecto al condicionamiento operante de Skinner, en este se asume la teoría conductista como una forma de aprendizaje mediante recompensas y castigos, bajo la concepción de que cierta conducta y su consecuencia, sea un premio o castigo, se relacionan estrechamente con el aprendizaje (Iñesta, 2012).

Con el planteamiento anterior, el condicionamiento operante niega la creencia de que los pensamientos y motivaciones internas son los causantes del comportamiento. De hecho, para Skinner, sólo las causas externas de comportamiento deben considerarse en la explicación del mismo.

Este autor introduce el concepto de refuerzo, el cual se refiere a la frecuencia de aparición de cierta conducta o comportamiento, luego que el sujeto que la manifiesta, haya sido sometido a un estímulo ambiental. En ese sentido, la frecuencia puede aumentar, si eventualmente, aparece un estímulo con la característica de ser reforzador. Estos estímulos reforzadores pueden ser positivos o negativos (Guerrero, 2013).

Por un lado, los reforzadores positivos son estímulos que el sujeto percibe como favorables, como consecuencia de mostrar cierta conducta particular. Así, dicho refuerzo, posibilita que el sujeto manifiesta dicha conducta con más frecuencia. Por ejemplo, frente a un problema particular, si el razonamiento analógico ha dado buenos resultados en la resolución de problemas anteriores, es muy probable que, en este nuevo problema, nuevamente vuelva a ser utilizado (Viñoles, 2013).

Por otro lado, los reforzadores negativos hacen referencia a la ausencia de estímulos desfavorables para el sujeto, como resultado de la manifestación de cierta conducta. Así, en el refuerzo negativo, el comportamiento o respuesta se intensifica por la eliminación de un estímulo no favorable. Por ejemplo, frente a un problema particular, es posible que, al tratar de resolver el problema, seguir el método de resolución de cada operación básica, haya producido atascos. Entonces, el sujeto tratará de evitar dicho método en futuros problemas, es decir, la conducta intensificada podría ser cualquiera que le evite operar una a una cada expresión. De esta manera, tanto con los refuerzos positivos como con los negativos, el comportamiento es incrementado (Guerrero, 2013).

Ahora bien, en contraposición a los reforzadores, tanto positivos y negativos, cuyo objetivo es aumentar la frecuencia de manifestación de una conducta, Skinner, en su condicionamiento operante, introduce el concepto de castigo, con el cual busca que disminuir la frecuencia de aparición de un comportamiento, dado que después de la presentación de este ocurre un estímulo desfavorable para el sujeto. Tal como los reforzadores, también pueden ser positivos y negativos (Iñesta, 2012).

En el caso de los castigos positivos, dada la aparición de una conducta, se aplica un estímulo que causa la disminución de la repetición de dicha conducta. Por ejemplo, siempre que el estudiante decide realizar el proceso a priori y mentalmente, sin apoyarse en razonamientos reflexivos, la resolución del problema posee incorrecciones y el profesor le pone una mala nota. Como resultado, la conducta de resolver los problemas a priori, sin reflexión o racionalización disminuye su frecuencia (Iñesta, 2012; Dahab, 2015).

Por el contrario, en el castigo negativo, con la manifestación de un comportamiento o conducta del sujeto, se deja de aplicar cierto estímulo, para que este disminuya su frecuencia. Por ejemplo, un estudiante al que la ha funcionado cierto método para resolver problemas, pero al abordar una determinada clase de problemas, se atasca y no llega satisfactoriamente a su resolución, en consecuencia, no le colocan la nota que él esperaba. Esto hace que el estudiante deje de usar progresivamente dicho método para enfrentar esa familia particular de problemas (Iñesta, 2012; Dahab, 2015).

En síntesis, la siguiente tabla sintetiza los refuerzos y castigos, desde la perspectiva del condicionamiento operante de Skinner:

Tabla 5. Tipos de castigo y refuerzo

	Disminución de la frecuencia de comportamiento	Aumento de la frecuencia de comportamiento
Adición	Castigo positivo	Refuerzo positivo
Eliminación	Castigo negativo	Refuerzo negativo

Fuente: Fuentes (2011). Adaptado.

Respecto al condicionamiento vicario de Albert Bandura, en el proceso de aprendizaje, existen cuatro procesos o fases, tales como atención, retención, reproducción y motivación (Bandura, citado en Suriá, 2010).

En primer lugar, la atención, se refiere a la manifestación de una respuesta mediante la observación del modelo original y la relevancia que el sujeto considere para dicha situación de aprendizaje (Suriá, 2010). En segundo lugar, la retención se refiere a la capacidad del observador de imitar la conducta una vez la ha observado, sin necesidad de la presencia inmediata del modelo. Esto es posible una vez que el sujeto a codificado la información mediante palabras, imágenes, sea en su imaginación o de forma observable. En tercer lugar, la reproducción implica la ejecución, previo conocimiento de habilidades para ello. Esta es más amplia que la retención, por cuanto implica la construcción de modelos y esquemas de actuación, la posterior ejecución de la conducta y la evaluación entre lo esperado y los logros obtenidos, para realizar los ajustes a que haya lugar en la trazabilidad del proceso anterior (Fernández, 2010).

Por último, la motivación se refiere a los aspectos actitudinales que influyen en la calidad de la respuesta del individuo (Prieto, 2015). Es decir, no solo entran en juego aspectos disciplinares, sino, emocionales referidos a los incentivos suficientes como para sentirse impulsado a llevarla a cabo. En ese sentido, Bandura se refiere al papel del refuerzo positivo como factor motivante en su proceso de aprendizaje (Fernández, 2010; Prieto, 2015). En conclusión, para Albert Bandura, la resolución de problemas es un proceso que ocurre por imitación de un modelo, ya prefijado por el docente, cuya función del estudiante es observarlo o prestar atención, retenerlo, reproducirlo, en futuros problemas similares. En cuanto al docente, a este le corresponde asignarle un refuerzo al estudiante, que lo motive a realizar el proceso resolutivo.

En síntesis, con base en la Teoría conductista, un problema es un estímulo externo al que se le asocia una respuesta del individuo. En esa línea, resolver un problema implica responder a un estímulo exterior, con base en asociaciones almacenadas, en orden de prioridad, según la fortaleza de cada respuesta previa, asociada para dicho estímulo. En la

trazabilidad de este proceso, las impresiones e ideas recibidas a través de los sentidos, son almacenadas como fiel copia de la realidad en la mente del sujeto, el cual, cuando se enfrenta a cierto estímulo o problema, empieza a seleccionar una serie de respuestas intermedias no observables o asociaciones de su esquema, para lo cual utiliza reglas formales y marcadores sintácticos, evidentes en la ley del ejercicio, ley del efecto, principio del ensayo error y ley de correspondencia, en un proceso continuo y sistemático a lo largo de una cadena de respuestas mediacionales hasta obtener una respuesta final observable, que es la solución del problema (Peña, 2010; Pellón, 2013; Gangoso, 2016; Gallardo, 2018; Morales, 2018).

2.1.1.3. Teoría Cognitiva

Según Rivière (citado en Otero, 2016), "las teorías cognitivas se refieren a la explicación de la conducta a partir de entidades mentales, estados, procesos y disposiciones de naturaleza mental, para los que reclama un nivel de discurso propio" (p. 97).

Partiendo de la descripción anterior, la teoría cognitiva engloba un amplio espectro de enfoques en su concepción de aprendizaje, desde posturas computacionales en su versión más pronunciada, en las que el corazón asociacionista del conductismo se encuentra reforzado, orientadas al pragmatismo, hasta versiones con enfoque fuertemente semántico, orientadas al constructivismo (Gangoso, 2016). Estos enfoques tienen en común el concepto de imagen mental, planes y estrategias. Bajo ese criterio, en este apartado se incluyen posturas cognitivas, referidas a los desarrollos clásicos de la teoría del aprendizaje computacional, del procesamiento de la información, de los esquemas, de los modelos mentales, de la teoría cognitiva de Piaget y aprendizaje significativo de Ausubel (Zapata, 2013).

En esta investigación, dichas posturas son clasificados en dos enfoques: artificial y biológico. No obstante, esta categorización se explica, únicamente, por la relación entre el conocimiento y la acción del sujeto, adoptada por las posturas pertenecientes a cada categoría, no porque ambas no compartan aspectos teórico conceptuales en común.

2.1.1.3.1. Enfoque artificial

Al interior de las posturas clasificadas como artificiales, se mencionan los desarrollos de las siguientes teorías: teoría del aprendizaje computacional, teoría del procesamiento de la información, teoría de los esquemas y teoría de los modelos mentales. Respecto a su premisa fundamental, estas teorías se basan en la analogía entre el hombre y el ordenador, consistente en concebir a ambos como sistemas de procesamiento de propósito general, que codifican, retienen y operan con símbolos y representaciones internas (Franco, 2014). Por último, al final de la exposición conjunta, se presenta una definición sintética de los conceptos de problema y resolución de problemas, en el enfoque artificial.

2.1.1.3.1.1. Teoría del Aprendizaje Computacional

En la teoría del aprendizaje computacional, se destaca la estructura cognitiva diseñada por Anderson (Citado en De Souza, 2015), a la cual denomina *Adaptative Control of Thought*, ACT; cuya premisa central es: "todos los procesos cognitivos superiores, como memoria, lenguaje, solución de problemas, imágenes, deducción e inducción son manifestaciones diferentes de un mismo sistema subyacente" (p.119). Con relación a sus partes fundamentales, la ACT está compuesta por tres memorias relacionadas: memoria declarativa, memoria procedural o de producciones y memoria de trabajo. Las primeras almacenan tipos distintos de conocimiento que interactúan en la memoria de trabajo. Por su parte, el conocimiento declarativo es estable, normalmente inactivo y el conocimiento procedural es el responsable de las acciones (Anderson, citado en De Souza, 2015).

En cuanto a la interacción entre el sujeto y el problema, esta teoría se centra en el análisis detallado de la secuencia de pasos o movimientos que debe realizar el sujeto en la resolución de un problema. Así, desde la ACT, el resolutor parte de un estado inicial y trata de llegar a un estado final o meta, mediante la aplicación de operadores que transforman el estado inicial en otros intermedios (Lotero, 2012).

Para Anderson (citado en De Souza, 2015), el tránsito entre el estado inicial y final en la resolución del problema está caracterizado por las siguientes etapas: "direccionalidad, planificación e implicación cognoscitiva" (p. 121). Respecto a la primera etapa, direccionalidad hacia una meta, las acciones deben orientarse hacia "la búsqueda de una meta que el sujeto conoce o supone" (p.122). En este punto, cabe agregar que en los problemas bien estructurados o formales, la meta es conocida, mientras que en los problemas menos estructurados, la meta, generalmente, es supuesta (Anderson, citado en Otero, 2016). Por su parte, la planificación, consiste en anticipar los elementos conceptuales y procedurales necesarios, es decir, un conjunto de operaciones organizadas en secuencia con el propósito de transformar un estado actual y lograr uno deseado. Por último, la implicación cognoscitiva, significa que el sujeto al enfrentarse a un problema debe ejecutar acciones con cierto esfuerzo cognoscitivo en términos de activación de la información almacenada en la memoria, reestructuración de la experiencia y análisis de varias acciones como un proceso de interpretación y reestructuración a partir de esquemas, conceptos, ideas, que están en la memoria de quien resuelve el problema (Pozo, 2016).

Esta última etapa, implicación cognoscitiva, esta mediada por el proceso de establecimiento de relaciones entre el problema y los esquemas disponibles que se ajustan a la situación específica. Asimismo, la mencionada búsqueda de relaciones implica pasos como: "definir con exactitud lo que se quiere y buscar cuál es el medio más apropiado para conseguido, descomponer una meta en submetas, un problema en subproblemas y establecer analogías entre el problema por resolver y otros resueltos anteriormente" (Anderson, citado en Pozo, 2016, p. 115).

Así, la manera como se resuelven problemas depende de la forma como se ha organizado el conocimiento dentro de la memoria, específicamente de las relaciones entre el enunciado del problema y las estructuras de conceptos y procedimientos que el sujeto puede aplicar al problema.

Continuando en la misma línea, Ernst y Newell (citado en Montealegre, 2013), crearon un programa para la instrucción en resolución de problemas, llamado *General Problem Solver*, GPS, el cual trabaja a partir de "un sistema de memoria de gran capacidad que almacena, entre otras cosas, estrategias complejas, programas, que son evocados por

los estímulos" (p.77). Además, estos sistemas de procesamiento fueron dotados de gran capacidad sintáctica para enfrentarse a cualquier tarea con escasos conocimientos específicos.

De esta manera, las teorías computacionales conciben la resolución de problemas como un proceso que puede ser analizado o puede estudiarse, a partir de su fraccionamiento y las representaciones en cada subproceso. Para ello, se asume que el sujeto, al igual que el ordenador, toma un problema establecido en lenguaje natural, input, lo convierte en una representación interna sobre la cual él puede operar, y, de acuerdo al conocimiento personal, en relación con la información dada en el problema, lleva a cabo las operaciones apropiadas necesarias y luego responde, generado outputs (Pozo, 2016).

2.1.1.3.1.2. Teoría del Procesamiento de la Información

En la misma línea de la ACT, Newell y Simon (citado en Fernández & Vidal, 2010) desarrollaron la teoría del procesamiento de la información, en la que asumen que el aprendizaje se produce en las siguientes fases: atención, codificación, relación, almacenamiento y recuperación. Así, el sujeto presta atención a los sucesos del medio, codifica la información que debe aprender, la relaciona con el conocimiento que ya tiene, almacena la nueva información en la memoria y la recupera cuando la necesita (Shuel, citado en Ballesteros, 2014). Además, en este enfoque se establecen tres componentes principales a estudiar en la resolución de problemas: "el que resuelve el problema, al que denomina sistema de procesamiento de información, el problema denominado entorno de la tarea y la representación del problema denominado espacio del problema" (Ballesteros, 2014, p. 13). De estas tres componentes resulta especialmente útil la noción de espacio del problema, que definen como la representación interna de quien resuelve el problema y que va desde un estado inicial, condiciones dadas, hasta el estado final pasando por estados intermedios del problema por la aplicación de operadores (Fernández & Vidal, 2010).

Así, el supuesto fundamental de la Teoría del procesamiento de la Información, TPI, es la llamada "descomposición recursiva de los procesos cognitivos, por la que

cualquier hecho informativo puede describirse de un modo más completo en un nivel más específico" (Hurtado, García, Rivera & Forgiony, 2018, p. 18). En otras palabras, según esta corriente, cualquier proceso o ejecución cognitiva puede ser comprendido y reducirlo a las unidades mínimas de que está compuesto. Esas unidades más pequeñas se unen entre sí hasta constituir un programa.

Adicionalmente, esta teoría plantea, que para moverse en el espacio problema, se debe llevar a cabo un análisis de medios y fines, es decir, trabajar siempre en un objetivo a la vez, y concebir cada estado intermedio como un estado final. Para ello, se requiere información acerca del estado inicial y de la meta, información relacionada con los operadores y los posibles movimientos e informaciones tácitas, es decir, axiomas, definiciones, hechos, postulados etc. (Echeverry, 2010).

En consonancia con lo anterior, la resolución se halla desde un principio circunscrita a unas condiciones y requisitos que demarcan los atributos o propiedades básicas de todo problema, y que por tanto, son independientes de su contenido, a saber, la estructura del medio, o ambiente, de la tarea. Dicha estructura comprende las propiedades objetivas, neutrales e impersonales del problema, tal cual como son expresadas por el enunciado (Best & John, citado en Gangoso, 2016). Entonces, se entiende que el medio de la tarea carece de elementos subjetivos, y por tanto no está sujeto a la forma idiosincrática o particular de interpretación, que de él realice el marco de representación interno de la persona.

Ahora bien, en dicho ambiente de la tarea, la TPI establece de manera más precisa, algunos conceptos que permiten caracterizar el proceso resolutivo, tales como: espacio del problema y los operadores (Jara, 2012).

En primer lugar, el espacio del problema se refiere a la representación del conjunto de los diferentes estados de conocimiento que la persona construye del problema, representación que se puede corresponder en mayor o menor medida con el medio de la tarea, según la capacidad y la eficacia del solucionador (Echeverry, 2010). Además, la construcción del espacio del problema no obedece únicamente a la "libre" actividad, ni al ingenio creativo del solucionador, sino, a la estructura del medio de la tarea, la cual constriñe las estrategias, programas, secuencia lógica de acciones, a efectuar por el solucionador (Fernández & Vidal, 2010).

En segundo lugar, los operadores se refieren a operaciones cognitivas que permiten convertir o adaptar un concepto o procedimiento del acervo cognitivo, para avanzar cognoscitivamente en respuestas intermedias observables o no observables, en el trascurso de la resolución, y el estado del problema sería la configuración en que tome el problema, luego de la aplicación del operador (Otero, 2016). En ese sentido, con cada aplicación de un operador, el mundo del problema cambia de un estado a otro.

Entonces, el espacio del problema se constituye en el conjunto de estados del problema y los operadores que median entre ellos hasta llegar a la solución del mismo. Esta configuración es análoga a una red de nodos, es decir, un espacio abstracto donde convergen vectores de haces de información expresados por cada uno de los estados inicial, final e intermedios que se interceptan entre sí, interconectados unos con otros formando redes de campos, sobre los cuales se operan transformaciones continúas sucedidas de forma lineal, dándole así al proceso de resolución un carácter predominantemente serial (Chávez, 2012). El resultado de ello, es una estructura de datos consistente en el registro secuencial de una sucesión ordenada de nodos, susceptible de ser decodificada en códigos abiertos que simbolicen las cadenas enlazadas de operadores y estados (Gangoso, 2016).

2.1.1.3.1.3. Teoría de los esquemas

El eje central de la teoría de los esquemas es el contenido o semántica de las representaciones mentales. Uno de sus autores es Rumelhart (Citado en González, 2013), quien define los esquemas como “paquetes de conocimiento en los que, además del propio conocimiento, hay información sobre cómo debe usarse ese conocimiento” (p.250). En ese sentido, los esquemas son tanto declarativos como procedurales. Esta teoría sostiene que los esquemas contribuyen a que el aprendizaje ocurra a través de ciertos procesos adecuados de procesamiento, comprensión y retención de información en Esto permite partir de lo conocido y emprender desde allí la construcción de nuevos conceptos (Samamé, 2018).

De otro lado, al interior del tema semántico central de este enfoque teórico, se desarrollan sistemas expertos en áreas temáticas específicas, programas denominados

semánticamente ricos, dotados de gran cantidad de conocimientos en determinadas áreas, para resolver problemas muy complejos, siempre que pertenecieran a ese dominio de conocimientos (González, 2013).

Respecto al papel de los esquemas en el aprendizaje, los esquemas del individuo son como un puente que nos permite pasar de un estado de conocimiento a otro, a través de relaciones significativas Rumelhart (citado en Veloz, Rodríguez & Aguirre, 2020). Otra ventaja del aprendizaje mediante este método es que propicia el aprendizaje de la metacognición, pues el sujeto aprende a aprender, permitiendo que su capacidad para establecer nuevas relaciones e interconexiones en situaciones posteriores se incremente gradualmente y que podamos generar significados nuevos cada vez (Coll, citado en Veloz, Rodríguez & Aguirre, 2020). Para promover el aprendizaje en el sujeto, Rumelhart (citado en Giudici, 2019) postula tres modos básicamente diferentes de aprender tales como acumulación, afinamiento y reestructuración.

En relación con el proceso de acumulación, según Rumelhart (citado en Giudici, 2019), en nuestra experiencia con el mundo, cada vez que activamos un esquema para interpretar una situación determinada "quedan incorporadas en nuestra memoria ciertas pistas o huellas del esquema originalmente activado, que son como fragmentos o aspectos particulares de ese esquema y esto seda como efecto colateral del proceso de comprensión de la situación particular" (p. 38). Cuando se enfrenta a una situación nueva para la cual el esquema activado en la situación original es también adecuado, se llega a reconstruir una interpretación de la experiencia original a partir de estas pistas o huellas que son fácilmente recuperables y llegar así a una interpretación de la situación nueva (Giudici, 2019). Ahora bien, se podría asumir que esas pistas o huellas en la memoria, es lo que conocemos como acumulación de información, adicional a la ya contenida en nuestros esquemas, sin modificarlo estructuralmente, es decir, dichas huellas no implican, por sí solas, ningún cambio cognitivo sustancial (Veloz, Rodríguez & Aguirre, 2020).

De otro lado, el proceso de afinamiento consiste modificar los esquemas existentes para procesar la información. Al respecto, la teoría de los esquemas propone tres modos de cambio posibles: "a) Generalización, b) Especialización, c) Refinamiento" (Fernández, 2019, p. 52). En el primer caso, se tiene un esquema particular, al que se le realizan ciertos

cambios, para responder a aplicaciones de carácter general, es decir, se hace flexibles las restricciones iniciales del esquema para ampliar su cubrimiento. En cuanto a la especialización, sería el caso opuesto al anterior, por el cual una variable del esquema se convierte en un rasgo constante o fijo, con la consecuente particularización o especificidad del esquema. A su vez, el refinamiento, consiste la evolución que se le aplica al conocimiento incluido en el esquema para precisar sus rasgos y variables continuamente (Fernández, 2019). Este proceso se va dando gradualmente y los contenidos del esquema llegan a ser, cada vez más, una mejor representación de las posibles situaciones en las que se puede aplicar este esquema.

Por último, la reestructuración tiene que ver con el desarrollo de conceptos nuevos que llevan a la creación de esquemas nuevos (Giudici, 2019). Esta construcción supone la existencia de cierto conocimiento previo. Según Rumelhart (citado en Reyes & Toro, 2016), el proceso de reestructuración ocurre, cuando se copia un esquema existente y se le hacen algunas modificaciones como las siguientes

> Algunos rasgos antes constantes se convierten en variables en el nuevo esquema, es decir, es una generalización del antiguo esquema, algunas antiguas variables se convierten en rasgos constantes en el nuevo, es decir, es una especialización del antiguo y alguna variable o rasgo constante se sustituye por una nueva variable o un nuevo rasgo en el nuevo. (p. 45)

Estos procesos dan lugar a lo que se conoce como aprendizaje por analogía y los esquemas generados de esta manera se van modificando a través del uso continuo, en un proceso de afinamiento (Samamé, 2018). Dado que tanto en la reestructuración como en el afinamiento, que son procesos diferentes, se habla de la generalización y de la especialización de esquemas como evolución de los mismos, debe aclararse que el esquema antes de reestructurar y el reestructurado coexisten, solo que el segundo permite un cubrimiento más general o más restringido que el antiguo.

2.1.1.3.1.4. Teoría de los modelos mentales

La teoría de la representación del conocimiento mediante los modelos mentales fue desarrollada por Johnson Laird (citado en Otero, Papini & Elichiribehety, 2016), quien plantea que los sistemas cognitivos construyen modelos de las situaciones con las que interactúan, que les permiten no sólo interpretarlas, es decir, saber su causa, consecuencias, efectos, y reaccionar; sino también hacer predicciones a partir de ellas. La diferencia esencial con los esquemas es que además de estar dotados de sintaxis, los modelos mentales se resignifican en función de cada interacción.

Según Johnson Laird (citado en Otero, Papini & Elichiribehety, 2016),

> Los modelos mentales son análogos estructurales de estados de cosas, eventos u objetos, del mundo. Las personas operan cognitivamente con modelos mentales. Entender un sistema físico o un fenómeno natural, por ejemplo, implica tener un modelo mental del sistema que le permite a la persona que lo construye explicarlo y hacer previsiones respecto a él. (p. 52)

Entonces, estos modelos mentales están compuestos de representaciones mentales que, como su nombre lo indica, son formas de re presentar interna o mentalmente, el mundo externo o de nuestro mundo interior, prescindiendo de la presencia física del objeto (Gutiérrez, 2016). Asimismo, estas representaciones mentales pueden ser analógicas, si provienen de la información captada por los sentidos físicos, aunque generalmente se le asocia a la imagen mental; y proposicionales, referidas a un lenguaje codificado. Dichas imágenes "son representaciones mentales concretas, formas de ver las cosas, los fenómenos, a las que se recurre para recuperar y captar la esencia de las mismas, relevantes al individuo que las construye" (Mondino, 2014, p.35).

En relación con las representaciones proposicionales, estas son discretas, individuales, organizadas por reglas de combinación del mentales y abstractas; y admiten

más de una representación posible. Por ejemplo, una frase, un principio, un discurso, etc., se representa de diferentes maneras en distintas personas (Johnson, 2010).

Este autor postuló en un principio al menos tres tipos de representaciones mentales: representaciones proposicionales, modelos mentales análogos estructurales del mundo e imágenes, como perspectivas de un modelo mental, necesarias para explicar las maneras en las que las personas razonan, hacen inferencias, comprenden a los demás y el mundo.

En la óptica de Johnson (2010),

> Las representaciones proposicionales no están formadas por palabras; sin embargo, captan el contenido abstracto, ideativo de la mente que estaría expresado en esa especie de lenguaje universal de la mente, que es el mentalés. Es decir, por ejemplo, en la frase: el libro está sobre la mesa, no estarían expresadas así mentalmente, pero con susceptibilidad de ser expresadas verbalmente. (p. 43)

De esta manera, los modelos mentales son análogos estructurales del mundo; y no de su aspecto. Un modelo mental representa un estado de cosas, y consecuentemente su estructura no es arbitraria, tal y como lo es la de una representación proposicional (Garnham & Oakhill, 2013). Por ejemplo, en la frase: el libro está sobre la mesa, "puede referirse a cualquier libro, abierto, cerrado, nuevo, viejo, sobre cualquier mesa, en la medida en que es abstracta y puede representarse de maneras diversas; por lo que el modelo mental desempeña un papel representacional analógico estructural y directo" (Garnham & Oakhill, 2013, p.26).

Además, la estructura de los modelos mentales refleja aspectos relevantes del estado de cosas correspondiente en el mundo real o imaginario. Esta permite interpretar la representación proposicional, para determinar si es verdadera o falsa de acuerdo con la realidad. Dichos modelos pueden ser básicamente analógicos, proposicionales o parcialmente analógicos y parcialmente proposicionales. Es más, estos no tienen estructura

sintáctica; su estructura es análoga a la que tienen los estados de cosas del mundo, tal como los percibimos o concebimos. Así, los modelos mentales, por su carácter dimensional, pueden ser manipulados más libremente, de manera controlada, sólo por las propias dimensiones del modelo (Mondino, 2014).

En esa línea, los modelos mentales pueden tener dos o tres dimensiones, pueden ser dinámicos e, incluso, pueden tener un número mayor de dimensiones en el caso de determinados individuos talentosos en cierta área. Este asunto es ejemplificado por Aliberas, Gutiérrez & Izquierdo (2017), a través de cierto "modelo mental de un molécula de grafito, que puede tener dos o tres dimensiones, y puede ser dinámico, permitiéndole al sujeto explorar, por ejemplo, las deformaciones que sufre el material cuando es afectado por altas presiones" (p. 24). Asimismo, el mencionado autor indica que

> Un modelo mental de célula puede representarla en el plano o con volumen y puede atribuirle su funcionamiento característico o sólo abordar y dar cuenta de su estructura. Por el contrario, las representaciones proposicionales pueden ser exploradas solamente en las direcciones permitidas por la sintaxis y por las codificaciones propias de estas representaciones. (p. 25)

De esta forma, Johnson Laird que la flexibilización del conocimiento construido a partir de las representaciones al interior de los modelos mentales está determinada por la naturaleza semiótica de la representación misma. En cuanto a las imágenes, según Johnson (2010), son producto tanto de la percepción como de la imaginación y representan aspectos perceptibles de los objetos correspondientes en el mundo real. Al respecto, menciona que "las imágenes representan cómo algunas cosas son vistas desde un punto de vista particular" (Johnson, 2010, p 124).

En cuanto al nivel de generalidad de las imágenes, así como los modelos mentales, son altamente específicas. Por ejemplo, no se puede formar una imagen de un plano inclinado generalizado, sino de planos inclinados específicos. No obstante, si existiera un modelo subyacente, éste tendría todas las relaciones necesarias para definir plano inclinado

y decidir si alguna afirmación relacionada es verdadera o falsa (Aliberas, Gutiérrez & Izquierdo, 2017)). Además, las imágenes son susceptibles de continuas transformaciones, tales como rotaciones, traslaciones o expansiones.

Estas tres formas de representación, proposición, modelo imagen, son ejemplificadas por Johnson (2010) así: "los seres vivos se nutren" puede ser una simple proposición o frase, se puede representar como un modelo mental que atribuya significado a dicho fenómeno o como imagen: un animal concreto cualquiera más frecuentemente que un vegetal que esté comiendo" (p. 126).

Adicionalmente, en este enfoque se acepta que el cerebro humano, en su nivel básico, puede procesar las imágenes y modelos en algún código proposicional, al que llama mentalés, análogo en función al de los ordenadores pero de naturaleza distinta, a la que no tenemos acceso. Este mentalés determina las características del modelo mental y le permite hacer inferencias lógicas sin explicitar todas las proposiciones, como es el caso de los programas humanos (Mondino, 2014).

De esta manera, a través de los modelos mentales puede razonarse lógicamente para probar cualesquiera conclusiones a las que se llegue usándolos, teniendo en cuenta el carácter compacto y agregado de la información que se encuentra en ellos. No obstante, este proceso no se realiza mediante lógica formal, donde las premisas deben estar explicitas, sino con premisas dispuestas de forma implícita y con formas de razonamiento, un tanto flexibles (Otero, Papini & Elichiribehety, 2016).

Cabe agregar que estos modelos mentales se constituyen, a su vez, en primitivos conceptuales, los cuales serían innatos, es decir, según esta teoría, el ser humano nace con algunos primitivos conceptuales tales como movimiento, temporalidad, etc. Además, dichos modelos también se constituyen de primitivos procedimentales, los cuales serían igualmente innatos, una vez que no podrían ser adquiridos a través de la experiencia pues para representar la experiencia, se necesita tener previamente la habilidad para realizar dicha representación a través de la percepción (Díaz, Gimeno y Nappa. 2011).

Respecto a la implicación educativa, se debe tener en cuenta que los modelos conceptuales son elaborados por personas que operan con dichos modelos, son enseñados

por docentes que operan con estos modelos, para sujetos que aprenden también trabajan con estos modelos. Esto significa que el tratamiento didáctico del aprendizaje no puede olvidar ni dejar de lado el análisis de la gestión de la información que implica cierta representación mental (Llombart & Catalán, 2015).

En síntesis, con base en las teorías del enfoque artificial, un problema es el espacio teórico en el que existen una serie de conceptos, con cierta relación nodal secuencial, pero parcialmente desconocida, desde el concepto o grupo de conceptos denominados estado inicial hasta otro análogo, denominado estado final.

En ese mismo paradigma, se concibe la resolución de un problema como un proceso análogo al tránsito internodal sucesivo en una red de nodos conectados, cuyo nodo inicial es el planteamiento del problema y el nodo final es su solución, con operadores que permiten avanzar de un nodo a otro, tomando como punto de partida recursos y procesos cognoscitivos no construidos por el resolutor, pero gestionados por él, para converger a un conjunto de procesos y productos objetivados. Concretamente, resolver un problema implica moverse, a través de un espacio conceptual utilizando estratégicamente un esquema articulado de conocimientos conceptuales y procedimentales, así como de procesos cognoscitivos de carácter perceptual, mnemotécnico, inferencial, analógico y heurístico, susceptibles de utilizarse en su totalidad o descompuestos, hasta llegar a una meta deseada.

En relación con su trazabilidad, en primera instancia, frente a un problema se tiene a un sujeto con un esquema cognoscitivo, dotado de conceptos, relaciones y procedimientos. En segunda instancia, en un proceso de generalización, especialización, refinamiento, o reestructuración de dicho esquema, el sujeto aplica una serie de operaciones cognitivas en como parte de su planeación, utilizando recursos y procesos cognoscitivos en sus representaciones mentales, proposiciones, modelos mentales e imágenes, pudiendo fraccionarlos en varias unidades de análisis, estableciendo submetas que le permitan disminuir, progresivamente, la distancia conceptual desde el estado en que se encuentra el problema, hasta el estado que representa su solución (Johnson, 2010; Díaz, Gimeno & Nappa, 2011; Sánchez, 2013; Mondino, 2014; Gutiérrez, 2016; Otero, Papini & Elichiribehety, 2016; Reyes & Toro, 2016; Samamé; 2018; Giudici, 2019)

2.1.1.3.2. Enfoque biológico

El principal aporte de los enfoques biológicos a la resolución de problemas es la concepción de desequilibrio y equilibrio cognitivo, causados por la asimilación y acomodación, así como el concepto de aprendizaje significativo. Así, en esta sección se aborda la teoría de desarrollo cognitivo de Piaget y la teoría de aprendizaje significativo de Ausubel, que podrían considerarse precursores de la teoría de la Gestalt y en alguna medida, de la teoría de los esquemas, de Rumelhart (citado en Veloz, Reyes & Rodríguez, 2020). En ambos estudios prevalece una negación al principio de correspondencia del conductismo, proporcionando una concepción cognitivo constructivista. Por último, esta sección finaliza con una definición sintética de los conceptos de problema y resolución de problemas, en el enfoque biológico.

2.1.1.3.2.1. Teoría de desarrollo cognitivo

La teoría de desarrollo cognitivo fue desarrollada por Piaget (citado en Páez, 2011), quien plantea que el aprendizaje es una cualidad intrínseca de los seres vivos. Para ampliar este postulado, el mencionado autor agrega lo siguiente: “para presentar una noción adecuada de aprendizaje, hay primero que explicar cómo procede el sujeto para construir, inventar, no simplemente cómo repite y copia” (Páez, 2011, p.178).

Asimismo, Piaget asume que el proceso de construcción del aprendizaje, genera una estructura mental, análoga a la estructura de la lógica simbólica (Saldarriaga, Bravo & Loor, 2016). En dicho proceso de aprendizaje, Piaget distingue entre operaciones concretas y operaciones formales, siendo estas últimas representaciones proposicionales de los objetos, más que en los objetos mismos, y necesitan un tipo de lenguaje más analítico que las operaciones concretas. De manera sintética, este autor detalla la característica definitoria del pensamiento formal es “su naturaleza hipotético deductiva, la cual, permite diferenciarla de otros tipos de pensamientos abstractos” (Pozo, 2016, p.110).

En relación con la forma como aprenden los sujetos, Piaget (citado en Páez, 2011) menciona que el aprendizaje "está regido por un proceso de equilibración, que precede a un desequilibrio o conflicto cognitivo y ocurre entre los procesos de asimilación y acomodación" (p.182).

En primer lugar, la asimilación hace referencia al "proceso por el cual el individuo "interpreta la información que proviene del medio, en función de sus esquemas o estructuras conceptuales disponibles" (Pozo, 2016, p. 184). No obstante, este proceso de asimilación se complementa con el de acomodación, que se define como "cualquier modificación de un esquema asimilador o de una estructura, modificación causada por los elementos que se asimilan" (Páez, 2011). Esta complementación es necesaria, dado que, si la información se únicamente se asimila en la estructura conceptual, puede ocurrir que el sentido global del nuevo esquema mental, no corresponda con la realidad percibida; en cambio, si se adiciona el proceso de acomodación, el sujeto podrá integrar el nuevo saber a su estructura, garantizando la coherencia conceptual del esquema asimilado, con lo que ocurre externamente, de forma que este siga representando lo más fielmente posible la realidad.

Es tal la relación entre ambos procesos cognitivos, que Piaget (2019) sostiene que la asimilación y acomodación, se implican necesariamente, es decir, no hay asimilación sin acomodación, ni acomodación sin asimilación. Según Piaget, el progreso de las estructuras cognitivas se basa en una tendencia creciente al equilibrio entre ambos procesos, además menciona que, cuanto mayor sea ese equilibrio, menores serán los errores o fracasos producidos por asimilaciones. De esta manera, para Piaget el aprendizaje y, específicamente la resolución de problemas, "es posible a través de la equilibración constante entre la asimilación en los esquemas metales del sujeto y la acomodación para que siga correspondiendo con los aspectos de la realidad representada" (Piaget, 2019).

2.1.1.3.2.2. Teoría del aprendizaje significativo

Esta teoría fue desarrollada por Ausubel, es uno de los desarrollos que, con una posición constructivista está claramente orientado hacia la enseñanza, con referencia

explícita a otras variables instruccionales. Por otro lado, Ausubel enfoca el proceso de aprendizaje, con referencia a los conceptos previamente formados en la vida cotidiana por el sujeto. Esta concepción, queda explicita en la siguiente afirmación: “Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría éste: el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente” (Ausubel, 2012, p.35).

Dicho lo anterior, Ausubel deja claro, que los conceptos previos son el motor de cualquier aprendizaje subsiguiente del sujeto, siendo llamado este último aprendizaje significativo, el cual se opone al aprendizaje solamente memorístico sin relación con los presaberes (Ausubel, citado en Lazo, 2015). En esa línea, este autor se refiere a la resolución de problemas, como un proceso lleno de significatividad.

Asimismo, Ausubel sostiene que la resolución significativa de problemas implica la utilización de conceptos y principios claramente comprendidos previamente, así como las operaciones constitutivas (Ausubel, 2012). No obstante, para que lo anterior ocurra, la comprensión de las condiciones del problema, la transformación, reintegración de conocimientos existentes para adaptarlos a las demandas de la tarea y la asimilación de la solución, deben ser significativas, lo que implica una concepción de resolución de problemas por descubrimiento (Nieva & Martínez, 2019). En síntesis, para Ausubel, el éxito en la resolución de problemas depende de la cantidad, calidad y disponibilidad de conceptos y principios en la estructura cognitiva, pertinentes con las demandas del problema particular a resolver.

En síntesis, con base en el enfoque biológico, un problema es una situación externa o interna que desequilibra el esquema cognoscitivo del sujeto. En ese mismo paradigma, resolver un problema es construir de manera significativa una serie de aprendizajes mediante un esquema mental formado por conceptos, procedimientos y relaciones, aprehendidos previamente por un sujeto, que se desequilibra al confrontar su esquema previo con la realidad del problema, pero que, en un proceso sistemático de asimilación y acomodación de la información; dichos conceptos, procedimientos y relaciones de la estructura inicial son resignificados durante la búsqueda de la coherencia entre la realidad del problema y la estructura mental del sujeto que lo aborda, encontrando un equilibrio, y la

consiguiente configuración esquemática que se constituye en la solución del problema. (Ausubel, 2012; Lazo, 2015; Nieva & Martínez, 2019).

2.1.1.4. Implicaciones de las tendencias teóricas con los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica

En esta sección, se presenta un análisis de las teorías de resolución de problemas anteriormente mencionadas, para dar cuenta en su desarrollo teórico, de la relación con las categorías de análisis de esta investigación. Para ello, en cada categoría se expone la relación que cada teoría de resolución de problemas, en su discurso, tiene con cada categoría, finalizando con una síntesis teórica que precisa el paradigma integral, en cada una.

2.1.1.4.1. Saberes previos

Respecto a la teoría de la Gestalt, una primera referencia a los saberes previos se evidencia en que la reorganización del problema ocurre cuando la estructura inicial del sujeto, en su estado actual, no permite solucionarlo, es decir, no se dispone de los saberes previos suficientes (Martínez, 2017). Aquí se muestra que los saberes previos no son conocimientos aislados, sino que están organizados en una red o estructura conceptual. Además, se señala que para solucionar un problema es necesario un estado estructural previo con suficiencia conceptual.

Por su parte, la teoría del conductismo da cuenta de los saberes previos en el proceso de resolución, al mencionar que todo el conocimiento acumulado está constituido exclusivamente de impresiones e ideas recibidas a través de los sentidos y están estructurados como asociaciones a cada estímulo recibido, para desencadenar una respuesta (Quezada, 2013). Esta perspectiva plantea un origen causal de los saberes previos, pues los describe como asociaciones o evocaciones producidas por estímulos, que se manifiestan en una conducta observable. Unificando el aporte de la Gestalt y del conductismo, tendríamos

que los saberes previos son una estructura de relación conceptual que representan asociaciones provenientes de estímulos previos, y manifestables en la acción.

Adicionalmente, la teoría cognitiva, da cuenta de los saberes previos, al indicar que están compuestos compuesto por tres memorias relacionadas: memoria declarativa, memoria procedural o de producciones y memoria de trabajo (Franco, 2014). En el caso de la primera, se encuentran los conceptos, axiomas, teoremas y relaciones entre ellos, relativamente estables, por sí sola no genera acciones y se manifiestan en la memoria de trabajo. Con relación a la memoria procedural, se encarga de utilizar el conocimiento declarativo para realizar acciones de avance en la solución del problema (Pozo, 2016). En cuanto a la memoria de trabajo, permite articular la memoria declarativa y procedural, manteniendo el sentido de la actividad, los conceptos que se están usando y el carácter teleológico del problema. Así, se evidencia los sujetos prestan atención a los sucesos del medio, codifica la información que debe aprender, la relaciona con sus saberes previos y la recupera cuando la necesita.

Asimismo, estos conceptos y relaciones entre ellos están cargados de cierto contenido o semántica. Estos, determinan, no solamente como interpretar o significar cada concepto, sino sus contextos de uso y los procedimientos que los accionan para un fin específico. Los anteriormente mencionados conocimientos conceptuales o procedurales están escritos en un código biológico al que no tenemos acceso, el mentalés, desde el cual se representan de forma analógica y proposicional, a las que si podemos acceder e interpretar (Rumelhart, citado en Samamé, 2018).

En cuanto a su importancia, Ausubel (2012), sostiene que los conceptos previos son el motor de cualquier aprendizaje subsiguiente del sujeto. En esa línea, la resolución de problemas, es un proceso significativo, y dependiente de la sintáctica y semántica de la estructura conceptual de los saberes dentro de la mente.

Por último, unificando los aportes de la Gestalt, el conductismo y el cognitivismo, eclécticamente, podemos decir que los saberes previos son una estructura de relación conceptual y procedimientos, que están representados orgánicamente en el mentalés, pero perceptibles por el ser humano en la forma analógica y proposicional, siendo en conjunto

asociaciones provenientes de estímulos previos, que desencadenan una respuesta observable.

2.1.1.4.2. Estrategias metacognitivas

En relación con la teoría de la Gestalt, se hace referencia a las estrategias cognitivas al mencionar la preparación, acumulación de la información; incubación, marginación transitoria del problema; iluminación, un darse cuenta y la verificación, hallazgo de la solución (Wallas, citado en Assuero, 2020). A su vez, Polya (citado en Gangoso, 2016), sugiere las siguientes etapas, comprensión de problema, elaboración de un plan, puesta en marcha del plan y visión retrospectiva. Además, en la perspectiva gestalista se introducen los conceptos de pensamiento reproductivo, productivo, transferencia e insight, que designan procesos que caracterizan la esencia operativa de cualquier estrategia metacognitiva (Ardila, 2013). En estos procesos, hace especial énfasis en que el pensamiento productivo, propicia el aprendizaje de la metacognición, pues el sujeto aprende a aprender, permitiendo que su capacidad para establecer nuevas relaciones e interconexiones en situaciones posteriores se incremente gradualmente y que podamos generar significados nuevos cada vez. En resumen, desde la perspectiva gestalista, las estrategias metacognitivas implican procesos controlados, tales como la planificación, regulación y evaluación de actividades cognitivas, así como procesos no controlados, como la iluminación o insight, que contribuyen, de golpe, a zanjar las cuestiones que se abordan en los procesos controlados.

Desde el conductismo, se refiere a las estrategias metacognitivas como una cadena de respuestas mediacionales al problema seleccionadas al interior del esquema de un sujeto, antes de obtener una respuesta final observable, las cuales siguen las leyes del condicionamiento del proceso asociacionista: ley del ejercicio, ley del efecto, principio del ensayo error y la ley de correspondencia (Gangoso, 2016). Asimismo, la concreción de estas leyes, como manifestación observable de estrategias metacognitivas; es afectada por la práctica, el reforzamiento y el estado motivacional (Quezada, 2013). Hasta este punto, la referencia conjunta del gestalismo y conductismo a las estrategias metacognitivas está en la

concepción de ciertos procesos controlados como la planificación, regulación y evaluación, cuya ejecución obedece a leyes asociacionistas, afectadas por aspectos sociales; sujetos a la eventual aparición con controlada y repentina del discernimiento, que permita avanzar o solucionar el problema.

Pasando a las teorías cognitivas, se observa una perspectiva atomista de la información a procesar por las estrategias metacognitivas, dado que se considera que estas pueden incluir técnicas de análisis o fraccionamiento semántico, para comprender fácilmente las variables del problema (Riviere, citado en Zapata, 2013). En esa línea, los procesos interpretativos, procedimentales de las estrategias metacognitivas, obedecen a leyes que rigen los atributos o propiedades básicas de todo problema, y que por tanto, son independientes de su contenido, a saber, la estructura del medio, o ambiente, de la tarea, la cual constriñe las estrategias, programas, secuencia lógica de acciones, a efectuar por el solucionador, siendo este, un gestor o simplemente seleccionador de propiedades objetivas, neutrales e impersonales del problema, tal como en el conductismo (Pozo, 2016). Aquí, por primera vez se explicita una especie de generalidad metacognitiva que rige todos los procesos de dicha naturaleza.

Además, en esta perspectiva en la actividad metacognitiva subyacen básicamente tres macroprocesos: generalización, especialización, y refinamiento, cuya operatividad depende de tareas de tipo perceptual, mnemotécnico, inferencial, analógico y heurístico. Así, la generalización implica flexibilizar o asignar variables a las restricciones o variables particulares iniciales del esquema (Rumelhart, citado en Echeverry, 2010; Simon, citado en Ibarra, 2010). En cuanto a la especialización, una o más variables del problema se particularizan o especifican. Asimismo, el refinamiento, se refiere al efecto progresivo que van causando los avances generados al esquema estructural previo antes de comenzar a resolver problema, que se reconvierte en cada instante de tiempo, en un nuevo esquema de saberes previos, en un estado particular del problema (Echeverry, 2010).

Respecto a los mencionados macroprocesos, están dotados de direccionalidad, planificación e implicación cognoscitiva. La direccionalidad consiste en mantener el objetivo del problema en cada paso planeado y ejecutado. A su vez, la planificación, consiste en hacer consciencia de los conceptos y procedimientos necesarios, es decir, un

conjunto de operaciones organizadas en secuencia con el propósito de transformar un estado actual y lograr uno deseado. Finalmente, la implicación cognoscitiva, significa que el sujeto al enfrentarse a un problema debe realizar cierto esfuerzo para recordar la información almacenada en la memoria, estableciendo relaciones entre el problema y los esquemas disponibles que se ajustan a la situación específica, para reestructurarlo, es decir, refinarlo, en un proceso de interpretación y trabajo de tipo sintáctico semántico (Otero & Elichiribehety, 2016).

Por último, integrando las posturas de las teorías generales de la resolución de problemas, la referencia conjunta del gestalismo, conductismo y cognitivismo a las estrategias metacognitivas está en la concepción de ciertos procesos controlados como la planificación, regulación y evaluación, cuya operatividad depende de tareas de tipo perceptual, mnemotécnico, inferencial, analógico y heurístico, en un tratamiento fraccionado sintáctico y semántico progresivo de la información, que a su vez, son insumo para los macroprocesos de generalización, especialización, y refinamiento. En términos generales se trata de un asociacionismo siguiendo leyes inherentes, mediante las cuales, el sujeto dialoga con la información de entrada a partir de su esquema, con la influencia de sociales como la práctica, el cansancio y la motivación; sujetos a la eventual aparición con controlada y repentina del discernimiento, que permita avanzar o solucionar de golpe el problema.

2.1.1.4.3. Transformación semiótica

Desde el enfoque gestalista, se observa una referencia a la transformación semiótica de la información en la llamada reorganización de información del problema, que la mente tiende a realizar bajo las leyes de la Gestalt, es decir, la ley de la dialéctica, ley de cierre, ley de semejanza, ley de proximidad, ley del contraste, ley de continuidad y ley de simetría (Antón, 2011). En una primera aproximación, dada su naturaleza, estas leyes podrían interpretarse como una transformación semiótica de tipo biológico.

Particularmente, desde el conductismo se aprecia una referencia más clara a la transformación semiótica, con el concepto de asociacionismo, debido a que, es el mecanismo por el que los sujetos aprenden (Peña, 2014). Así, los sujetos tienen marcadores, generalmente lingüísticos, cuya presencia les permiten evocar o asociar a otros conceptos o procedimientos, para generar una respuesta observable. De esta manera, la tesis conductista en esencia, es que el aprendizaje se reduce a transformaciones, mediante asociaciones semióticas.

Con referencia a las teorías cognitivas, se observa una referencia más descriptiva de las representaciones de la información, dado que menciona que estas pueden ser analógicas, si provienen de la información captada por los sentidos físicos, aunque generalmente se le asocia a la imagen mental a las que se recurre para recuperar y captar la esencia de las mismas; y proposicionales, referidas a un lenguaje codificado, natural, aritmético o algebraico, pudiendo admitir más de una representación posible (Johnson, 2012).

En esa línea, la diversidad de representaciones en los mencionados registros analógicos y proposicionales fundamentales es un factor muy importante, dado que estas determinan el avance en los estados de conocimiento del problema, a partir del esquema mental del sujeto (Newell & Simon, citado en Gangoso, 2016). Esto es especialmente importante, cuando el sujeto, por naturaleza tiende a usar un mismo registro o representación para resolver un problema, pero selecciona otros de su esquema, al darse cuenta de su rigidez semiótica.

En síntesis, desde la teoría gestalista, conductista y cognitiva, la transformación semiótica ocurre, en primera instancia, en un sentido biológico, regida por las leyes de la Gestalt, que describen el proceso de percepción del cerebro. Una vez dada la percepción, ocurre otro tipo de transformación, que si se puede controlar, y se refiere a las asociaciones que, desde el esquema de cada individuo, son realizadas, estas asociaciones o transformaciones, parten de los registros semióticos analógicos y proposicionales, cuyo flujo semiótico de representaciones permite avanzar, gradualmente, hasta la solución del problema.

2.1.1.5. Concepciones eclécticas del concepto de problema, tipos y resolución de problemas

En esta sección se presenta una definición que recoge las diferentes concepciones de los conceptos de problema, tipos de problema y resolución de problemas, subyacentes en cada una de las teorías psicológicas de la resolución de problemas anteriormente expuestas.

2.1.1.5.1. Problema

Se define problema como un estímulo, percepción o input, cuyo entramado conceptual posee relaciones entre conceptos parcialmente conexos, desde la perspectiva de la estructura representacional de cierto individuo, causando un desequilibrio cognitivo, que se equilibra a través de una respuesta, producto de la aplicación de funciones cognoscitivas al interior de la mencionada estructura.

2.1.1.5.2. Tipos de problemas

Según los enfoques anteriores, de acuerdo a la solución, existen tres tipos: estructurados, parcialmente estructurados y no estructurados. Los primeros poseen ciertas condiciones iniciales, un objetivo explícito y se pueden resolver paso a paso, codificando y aplicando operaciones algorítmicas para su resolución, aplicando el pensamiento reproductivo. Los segundos se estructuran a partir de ciertas condiciones iniciales, un objetivo explícito, y requieren de procedimientos relacionados con alguna forma de pensamiento productivo, puesto que no se conoce un proceso automatizado o algorítmico para resolverlos. Finalmente, los terceros, no considerados problemas en sentido estricto por la ausencia de un objetivo explícito, son aquellos en donde se interesa producir un conjunto de hipótesis y variaciones de las condiciones iniciales para encontrar nuevas relaciones conceptuales al interior del entramado conceptual inicial. Este proceso requiere

la aplicación del pensamiento creativo y divergente y la aplicación articulada de los pensamientos reproductivo y productivo.

2.1.1.5.3. Resolución de problemas

Se concibe la resolución de problemas como un proceso análogo al tránsito internodal sucesivo en una red de nodos conectados, cuyo nodo inicial es el planteamiento del problema y el nodo final es su solución, con operadores que permiten avanzar de un nodo a otro. En términos específicos, resolver un problema implica para el individuo la búsqueda de relaciones entre conceptos de la estructura de partida del problema, hasta obtener una nueva configuración, que se constituye en la solución del mismo. En primera instancia, el proceso comienza con la existencia de un individuo que recibe impresiones e ideas de la manifestación del problema a través de los sentidos, siguiendo leyes de percepción, tales como la ley de la dialéctica, ley de cierre, ley de semejanza, ley de proximidad, ley del contraste, ley de continuidad y ley de simetría.

Luego, el individuo asocia dicho problema o estímulo, a conceptos y procedimientos de su esquema mental representacional previo, compuesto por proposiciones, modelos mentales e imágenes, o mediante funciones cognoscitivas con dichas representaciones, no construidas por el resolutor, aunque sí gestionadas por él, referidas al tratamiento conceptual y operacional de la información holística, global o particular del problema. Dichas funciones cognoscitivas son de tipo perceptual, mnemotécnico, inferencial, analógico y heurístico, cuya aplicación sigue las reglas formales y marcadores sintácticos, propios de la ley del ejercicio, ley del efecto, principio del ensayo error y ley de correspondencia, permitiendo la emergencia del discernimiento, transferencia y pensamiento reproductivo y productivo.

Asimismo, los productos obtenidos por el tratamiento de información de las funciones cognoscitivas se constituyen en reorganizaciones progresivas del esquema mental representacional previo, o respuestas mediacionales al problema, como submetas que permiten disminuir progresivamente, la distancia conceptual entre el estado en que se

encuentra el problema, y el nuevo estado esquemático, que representa su solución. Lo anterior, hace parte de los procesos de generalización, especialización, refinamiento, o reestructuración del esquema cognoscitivo del problema, y estos, a su vez, se incluyen en los macroprocesos de asimilación y acomodación, o desequilibrio y equilibrio cognitivo.

Para finalizar, en la siguiente figura se sintetiza el proceso de resolución de problemas, asumiendo una postura ecléctica respecto a las teorías de resolución de problemas.

RED-UMECIT

Figura 6. Ruta cognoscitiva de la resolución

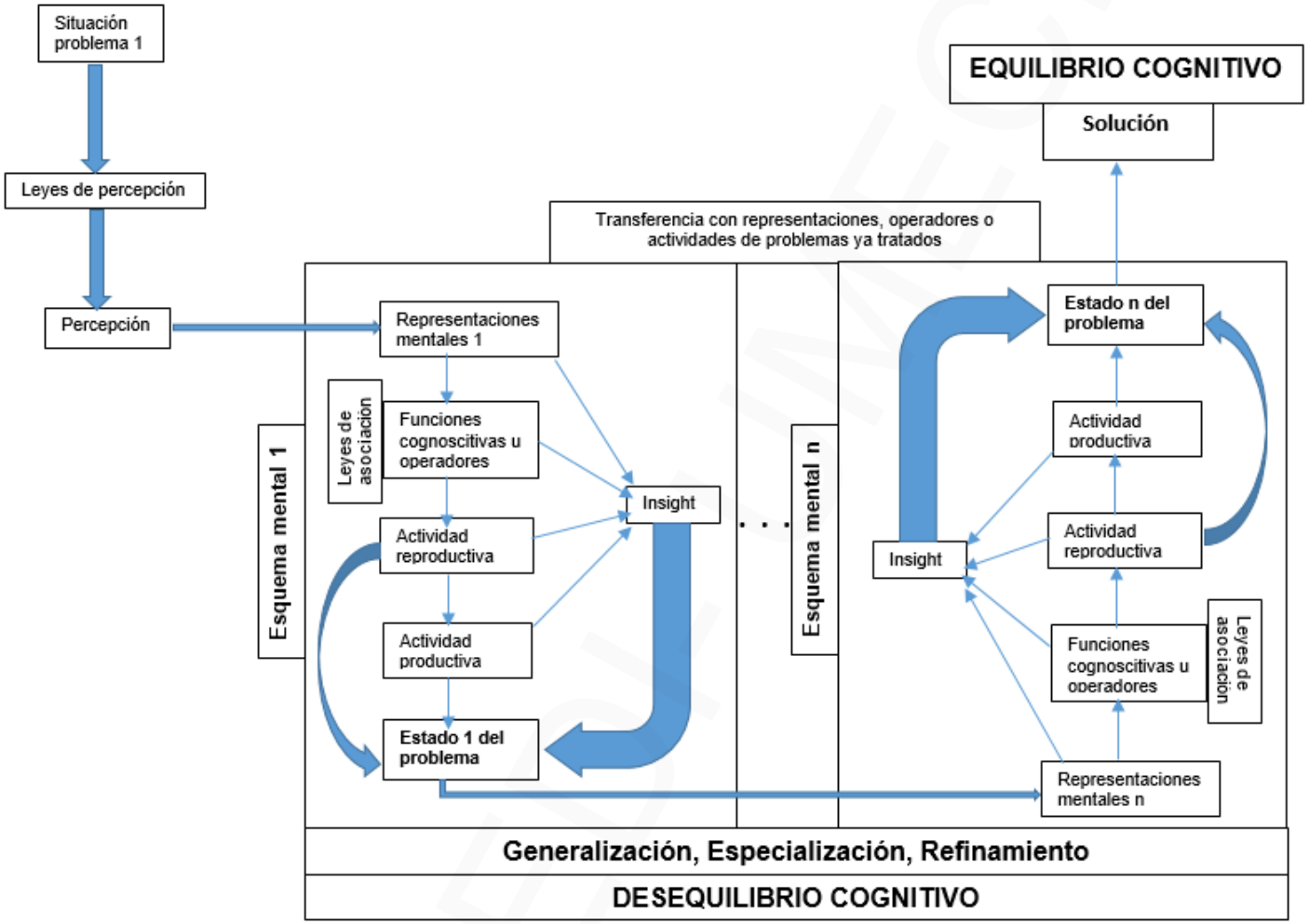


Figura 6. Postura ecléctica del proceso de resolución de problemas. Fuente: autor (2020)

2.2. La Resolución de problemas en el ámbito matemático

En este apartado se presentan las teorías sustantivas que sustentan cada una de las categorías de análisis de esta investigación. Para empezar, se hace un breve recorrido teórico del desarrollo y estado actual de los fundamentos de la resolución de problemas matemáticos, mencionando las escuelas, proceso de construcción de conocimiento, naturaleza, conceptualización y consecuencias didácticas de las matemáticas, entendiendo que la resolución de problemas es la manifestación concreta de la actividad matemática, por lo que está inscrita en el espacio epistemológico de la misma (Pérez & Ramírez, 2011). Posteriormente, se expone la naturaleza de los problemas en el ámbito matemático, en cuyo apartado se expone el significado de problema, ejercicio, resolución de problemas, tareas que hacen parte de la estructura del proceso de resolución de problemas, problemas algebraicos.

Adicionalmente, se explican los enfoques en la resolución de problemas, su clasificación, los factores que inciden en la resolución y los procesos implicados en la resolución de problemas, destacando los saberes previos y los aspectos metacognitivos. Finalmente, se aborda el Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, EOS, como teoría sustantiva, el cual se presenta como un marco que toma como referencia la esencia de las matemáticas, para construir un corpus teorico didáctico, con el fin de explicar el aprendizaje de esta área de conocimiento, siendo uno de sus tópicos, la resolución de problemas algebraicos. En ese orden de ideas, se explican los referentes conceptuales del EOS que permiten entender los objetos implicados en la resolución de problemas, basados en desarrollos teórico didácticos más generales, principalmente los relacionados con la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud y la Teoría de los Registros de Representación semiótica de Duval.

2.2.1. Evolución, desarrollo y estado actual

En este apartado se exponen las principales escuelas filosóficas que han delimitado el camino paradigmático sobre la naturaleza, construcción y conceptualización de las

PREPRINT

matemáticas y la resolución de problemas, a nivel histórico, desde su concepción inicial, hasta la forma actual, y las implicaciones que han tenido en la educación matemática, especialmente en los procesos formativos orientados a la resolución de problemas matemáticos. Dichas escuelas incluyen el logicismo, intuicionismo y formalismo, como fundamentas de los paradigmas actuales en torno al origen del conocimiento matemático y las consecuencias didácticas que de ello se derivan, para la enseñanza de la resolución de problemas como la principal actividad matemática.

2.2.1.1. Logicismo

El logicismo es una escuela filosófica, en la que Gottlob Frege en los siglos XIX y XX aportó de manera significativa, con el objetivo de fundamentar la construcción de todo saber matemático a partir de la aritmética (Barbosa, 2010).

Esta posición filosófica sostiene que la naturaleza y el conocimiento matemático, se aprehende a partir de un proceso sistemáticamente inferencial deductivo, en el que, a partir de un número finito de axiomas asumidos como verdad absoluta, se obtienen una serie de proposiciones asumidas como verdades absolutas a priori, utilizando las reglas del razonamiento lógico. Al respecto, Barbosa (2010), plantea que,

> De acuerdo con el logicismo, todo concepto de las matemáticas, de la aritmética, geometría, álgebra, análisis, etc., pueden ser definidos en términos puramente lógicos y todos los teoremas de las matemáticas pueden ser deducidos desde estas definiciones por medio de los principios de la lógica. (p. 24)

Sin embargo, esta concepción filosófica sufrió un fuerte golpe cuando Bertrand Russell, descubre una paradoja en uno de los pilares esenciales del edificio. La paradoja aparece precisamente en su noción de "extensión de conceptos", es decir, ligada al

tratamiento de la teoría de conjuntos que pone fin a su concepción absolutista de toda verdad matemática reducible a la lógica (Rocca, 2014).

Esta paradoja parte de una premisa aceptada por todos, a saber, la clase de los hombres no es un hombre y la generaliza como una

> Clase que no se pertenece a sí misma, generaliza por segunda vez, en lo que llama extensión de conceptos y obtiene la clase de clases que no se pertenecen a sí mismas, a la que llama la clase de K, donde K representa las clases que no se pertenecen a sí mismas. (Russell, citado en Rocca, 2014, p.48)

En este punto, la paradoja se presenta porque tanto la afirmación como la negación de la proposición, la clase de K es K, conduce a una autocontradicción en el mismo sistema lógico. Para entenderlo, se debe considerar la siguiente proposición: la clase de K sí es K. Si esto es cierto, entonces dicha clase está dentro de su propio concepto. Pero ya se dijo que la clase de K representa la clase de clases que no se pertenecen a sí mismas, o que no están dentro de su propio concepto. Así, afirmar la primera proposición conduce a una autocontradicción (Russell, citado en Mora, 2016). Ahora, supóngase la siguiente proposición: la clase de K no es K; si es cierto, entonces dicha clase no está dentro de su propio concepto, ahora bien, la clase de K representa a la clase de clases que no están dentro de su propio concepto, por lo que dicha clase K se autocontiene, es decir, sí estaría dentro de su propio concepto, lo cual es, evidentemente contradictorio (Rusell, citado en, Gutiérrez, 2016).

Este hecho hizo reflexionar a la comunidad matemática y lógica sobre el inconveniente generado, entre otras cosas, por asumir un platonismo de manera tan acentuada, dado que, si sus proposiciones ideales eran verdades absolutas, no tendrían por qué contradecirse. Por ello, en la lógica actual no es de interés si una proposición es una verdad absoluta, más bien, se habla de validez, la cual descansa en su trazabilidad analítica, producto de aplicación de reglas de inferencia y deducción a premisas previas.

2.2.1.2. Intuicionismo

La escuela intuicionista fue defendida en los siglos XIX y XX por Krönecker y Poincaré y su tesis central es "si existe una evidencia, está en la intuición, además, el asunto central del fundamento de las matemáticas no es probar su consistencia, tal como plantea la lógica, sino de "hacer matemática, apegada a esa intuición introspectiva" (Poincaré, citado en Casado, 2010, p. 12).

Dado que la intuición es particular en cada individuo, Rahman (2015) considera la influencia del sujeto epistémico en el marco de la filosofía constructivista de la construcción matemática. Este autor sostiene que, en últimas, el uso que el individuo le dé a su intuición es lo que determina u orienta el rumbo que le dé a las reglas del lenguaje y la lógica.

Para los intuicionistas la lógica es una herramienta más en la construcción de las matemáticas. Éstos decidieron reducir la intuición a una exclusivamente temporal, en lo referente a desarrollo de contenidos, orden, y todas las propiedades, conexión y relación entre los objetos matemáticos. Una explicación a lo que significa intuición temporal la da Cassirer (2017). "cuando el pensamiento logra unificar la multiplicidad de los eventos en un sistema dentro del cual los diversos eventos quedan determinados en un antes y después, se unifican los fenómenos tomando la forma de una realidad intuitiva de naturaleza temporal" (p. 54).

Asimismo, esta escuela sostiene que las paradojas se forman cuando se abusa o extralimita las funciones de la lógica y el lenguaje, y deja claro que estas son un instrumento de la intuición en la construcción de las matemáticas. Apoyando esto último, Poincaré (citado en Rahman, 2015) manifiesta que

> Una demostración matemática no es una simple yuxtaposición de silogismos; son silogismos colocados en un cierto orden, orden mucho más importante que ellos mismos. Si tengo la intuición de este orden, de manera que me pueda dar cuenta

> rápidamente del conjunto del razonamiento, cada uno de ellos vendrá a colocarse en el cuadro que le he preparado. (p. 75)

Así, esta escuela adopto como alternativa la doctrina filosófica del constructivismo a partir del sujeto epistémico, sin embargo, al igual que la lógica y el formalismo, sigue considerando las intuiciones como verdades infalibles y las utilizan como herramienta para avanzar hacia la solidificación infalible y absoluta del cuerpo teórico de las matemáticas. Aunque los intuicionistas dicen orientarse a hacer matemáticas verdaderas, y no considerar como problema la consistencia o infalibilidad y completitud, en el fondo eso es lo que buscan (Moreno, 2017).

Ahora bien, aunque en esta escuela se privilegian elementos no formales ni lógicos en su interpretación teórica, lo cual no se compromete por la paradoja de Russell y el teorema de Godel (Rahman, 2015), se encuentran limitaciones de tipo teórico dado que no precisan que es exactamente la intuición ni cómo se logra para construir matemáticas, es decir, no hay una caracterización profunda, quedando vago el significado de la misma, simplemente asumida como una cualidad mental intrínseca de los individuos. Además, el alcance de los métodos y el marco teórico en el que se mueven son reducidos, así que, aunque "su filosofía es congruente con lo planteado por Russell y Godel, su marco teórico no logra llegar a las raíces más profundas que dan cuenta de cómo se construyen las matemáticas" (Moreno, 2017, p. 143).

2.2.1.3. Formalismo

La concepción formalista de las matemáticas fue impulsada ampliamente por el matemático David Hilbert (citado en Giovannini, 2014) en el siglo XX, quien criticó del logicismo la no consideración de las intuiciones y las evidencias previas a los procesos lógicos. Según él, no se deben eliminar, se trata de explicarlos concretamente y cómo influyen en la construcción de la matemática.

Adicionalmente, Hilbert señalo que estos objetos, lógicos, intuitivos y de evidencia deben concretarse, es decir, asignárseles un signo dentro de un sistema formal, lo cual sería la base de la posibilidad de la consistencia de la matemática. Al respecto, Hilbert (citado en Sirvent, 2015) manifestó

> Si la matemática ha de restringirse, por completo y sin calificación, a la descripción de objetos concretos de cierta clase y a las relaciones lógicas entre tales descripciones, entonces, ninguna contradicción puede producirse en ella, ya que las descripciones precisas de objetos concretos son siempre mutuamente compatibles. (p. 88)

Es precisamente bajo esta filosofía formalista que emprende un programa con el fin de garantizar la coherencia lógica de la matemática. Desde esta perspectiva, las proposiciones son solo cadenas de símbolos, y dichas proposiciones pueden representar objetos perceptibles, la intuición y evidencias previas; así como los no perceptibles, los lógicos, e integrar ambos tipos de objetos en un único sistema formal o cuerpo teórico que permita construir todo conocimiento matemático posible (Giovannini, 2014).

De esta manera, el formalismo reduce las matemáticas a una manipulación apropiada de signos, o convenciones, de donde emerge la sintáctica. Aunque se separa del logicismo en el sentido que incluye la intuición y evidencias previas dentro del sistema formal, en realidad los sigue considerando como objetos reales en el universo ideal, tal como el racionalismo. Así, el formalismo busco mostrar, no solo la consistencia de la matemática, sino su carácter infalible como verdad eterna, al igual que el logicismo.

Sin embargo, al igual que el logicismo, la escuela formalista fracasó dado que el lógico Kurt Godel demostró que todo conocimiento matemático no puede ser obtenido en su totalidad de manera formal, incluso, aún en las partes formalizables no es posible garantizar la consistencia, es decir, habrán contradicciones (Da Silva, 2014).

Así, Godel (citado en Rodríguez, 2010) muestra que hay conocimientos intuitivos que escapan a los que se pueden obtener en cualquier sistema formal, por lo que sería completamente imposible

> Obtener una prueba finitaria de consistencia, como buscan los formalistas, para un sistema formal en el que estén formalizados todos los modos finitarios, es decir, intuicionísticamente aceptables. No es posible formalizar completamente una teoría matemática cuando ésta ha llegado a un cierto nivel de complejidad. (p.11)

Entonces, se pude ver que existen casos, donde bajo un sistema formal no es posible representar absolutamente todos los nexos deductivos o deducciones que existen desde los axiomas iniciales, pues se le escapan aquellos adquiridos de forma intuitiva, no formal, incluso si el sistema formal incluyera conceptos intuitivos, de todas formas seria formalmente inconsistente pues tendría al menos una contradicción al interior del mismo sistema.

En cualquier caso, se afirma que cualquier abstracción de la relación de significación que liga el modelo simbólico al dominio matemático que trata de representar es incompleta e inconsistente. Sin embargo, se debe reconocer que la utilización del método formal se constituyó en un progreso evidente, en la medida en que ha permitido obtener información precisa de gran profundidad sobre las estructura de las teorías matemáticas, pero, tal como afirma Godel, es necesario alimentarla de “ciertas intuiciones previas a la formalización y que ésta sólo puede ayudar a clarificar" (Ladriere, citado en Mesnil, 2015, p. 30).

2.2.1.4. Naturaleza ecléctica de la matemática

En primera instancia, a partir de la breve explicación de las escuelas fundamentales de las matemáticas, puede decirse que su dimensión lógica, como máximo, es parte de su naturaleza, pero no puede confundirse con la naturaleza misma de estas. Los resultados de

Bertrand Rusell y Kurt Godel indican que es imposible partir de un cúmulo de verdades axiomáticas absolutas, que avanzan en el plano abstracto a través de reglas deductivas de la razón, para obtener nuevas verdades absolutas, como propone el logicismo (Rodríguez, 2010). En segunda instancia, a diferencia de la objetividad proclamada por el logicismo, el intuicionismo considera la construcción personal del individuo en la construcción del conocimiento, afirmando que esta le da sentido a los entes lógicos y formales (Moreno, 2017). No obstante, también puede decirse que solo muestra una parte de la naturaleza de las matemáticas, porque presenta vacíos teóricos que no permiten comprender en su totalidad la naturaleza de la matemática explicada desde esta perspectiva, por lo que también se torna incompleta.

Por último, el formalismo, que incluye ciertas intuiciones y evidencias empíricas al programa del logicismo, como propuesta para explicar todos los aspectos de la naturaleza de la matemática, vuelve a lo mismo del logicismo, dado que, esencialmente se está ante un sistema cerrado de axiomas, solo que de distinto origen y con la misma propiedad de deducibilidad (Giovannini, 2014). Así, nuevamente los resultados de Godel muestran el aporte parcial de la naturaleza de la matemática del formalismo, al demostrar que es imposible garantizar la consistencia de todo el conocimiento matemático formalizado, pues, de una manera u otra, se presentarán contradicciones.

Ahora bien, si aceptamos que la intuición determina el uso que se le da a los aspectos lógicos y formales en la construcción del conocimiento matemático, tal como menciono Poincaré, entonces esto podría sugerir que la intuición funciona implícitamente más como norma que la misma regla formal. De hecho, una visión crítica de las tres escuelas filosóficas nos permite entender que la intuición orienta la lógica y el formalismo, por lo que estos últimos vendrían siendo recursos y a la vez productos de la intuición. Por último, el conocimiento matemático construido desde la intuición, que regula los procesos lógicos y formales, de manera más amplia, hace parte de cierto entorno paradigmático socioinstitucional, en un momento histórico específico (Soto & Cantoral, 2014).

Entonces, se puede concluir que la naturaleza de las matemáticas es socioepistémica, cuyo nivel conceptual es el formalismo lógico; y el procedimental, la intuición, sin que ello implique la verdad absoluta de sus proposiciones. Lo anterior, según

Gallardo y Quintanilla (2019), implica una "ruptura con las fronteras cognoscitivas en general y en particular en las ciencias matemáticas; debido a que no es posible afirmar límites rígidos y estáticos" (p.26). Esto lleva a entender que las bases filosóficas de la naturaleza de las matemáticas son eclécticas, producto del "traslape y promiscuidad teórica del empirismo, racionalismo, realismo y pragmatismo" (Ruiz, 2011, p.47).

2.2.1.5. Construcción del conocimiento matemático

En una primera aproximación a la construcción del conocimiento matemático, aparece el empirismo clásico, que concibe este proceso como la simbolización, inducción, generalización o categorización en conceptos, a partir de experiencias sensoriales, es decir, para el empirismo, el conocimiento matemático se construye con el paso de elementos del mundo dos al mundo tres, a la manera de Karl Popper (citado en Burgos, 2011)[9]. Sin embargo, no puede pensarse que dicha concepción empirista es completa, pues existen múltiples posibilidades de construcción y expansión del conocimiento a partir de los constructos surgidos del proceso de simbolización, inducción, generalización o categorización, que se alejan de lo que pueden captar los sentidos de los objetos del mundo material. Este hecho es referido por Kitcher (citado en Banegas, 2017), quien menciona que además del input empírico, se realizan acciones operatorias sobre dichos inputs iniciales, de manera que también hay operaciones netamente racionales, guiadas por los procesos intuitivos de cada sujeto. Ahora bien, dicho paradigma racional no implica una exclusión teórica respecto al empírico[10], más bien, "ambos se encuentran conexos con las operaciones mentales que se usan en la creación matemática, además, los objetos sensoriales siguen proporcionando información empírica sin importar el estadio de creación matemática" (Ruiz, 2011, p.49).

[9] Según este autor existen tres mundos: el material, no aprehensible; el sensorial, conformado por la percepción de nuestros sentidos, de objetos del mundo material; el ideal, conformado por la producción de conocimiento a partir de los registros semióticos derivados del mundo sensorial.

[10] Cuando se habla de estímulo empírico, no solo se refiere a la realidad sensorial o material, sino, a realidad abstracta o ideal que surge de las operaciones humanas

Respecto a la representación explicativa para cierta realidad, sea empírica o racional, es posible que, debido a la subjetividad, cada individuo genere interpretaciones distintas, y por ende, representaciones matemáticas diversas; pero, por comodidad, o por amplitud epistémica, el plano institucional privilegia una representación o modelo teórico por encima de otros (Gómez & Cordero, 2013). Así, se puede pensar que una misma realidad puede ser representada adecuadamente por al menos una representación teórica, y quizá, una representación teórica puede corresponder con, al menos, una realidad.

Una vez realizada la representación simbólica a partir de la inducción y generalización del mayor número de propiedades y estructuras de cierta realidad material, sucede progresivamente la replicación de la simbolización e inducción y generalización a estos nuevos constructos ideales vez tras vez. A esto precisamente se refiere Polya (citado en Martínez & Brendy, 2015) cuando habla de observación y experimentación matemáticas, como si se tratara de una recopilación de experiencias sensoriales de objetos matemáticos en cierto nivel de abstracción, de forma análoga como ocurre con un objeto material, a fin de utilizarlos en la resolución de problemas matemáticos y nuevas generalizaciones. De manera formal, podemos considerar un conjunto de objetos matemáticos de cierto nivel "a-1" de abstracción, los cuales pueden categorizarse por propiedades y estructura, que permita clasificarlos dentro de nuevo(s) concepto(s), constituyéndose entonces, un(os) nuevo(s) objeto(s) de nivel "a" de abstracción, nivel en el que puede requerirse la observación y experimentación con sus representaciones de nivel n < "a", para la resolución de problemas matemáticos o algebraicos con objetos del nivel "a", donde evidentemente se nota el carácter inductivo (Popper, citado en Livia 2013).

Lo anterior quiere decir que en cada nivel de abstracción hay una familia de problemas que comparten los mismos operadores de ese nivel. Para el caso de los problemas algebraicos, la aritmética sería un nivel de abstracción y el álgebra, un nivel 2. Hasta aquí, lo mencionado sobre el proceso de construcción matemática es coherente con esta afirmación "El motor de las matemáticas una práctica de acciones y operaciones mentales sobre otros conjuntos de objetos, acciones y operaciones, en un doble influjo primigenio: epistemológicamente, el mundo empírico y el sujeto" (Ruiz, 2011, p.51).

Relacionando el proceso de construcción matemática con las escuelas de los fundamentos de la matemática, es correcto afirmar que, si a partir de los mencionados conceptos del nivel a, se crea un sistema lógico-formal con un respectivo número de axiomas, y estrictamente a partir de su manipulación se generan nuevos conocimientos matemáticos, entonces estaríamos produciendo conocimiento de tipo lógico formalista. Por otro lado, si nos remitimos a captar más conceptos desde las sensaciones de los objetos, estaríamos produciendo conocimiento de tipo empirista. No obstante, hablar de conocimiento lógico formalista en su forma más pura es muy difícil, por no decir imposible, ya que la intuición esta implícitamente orientando el uso que se le da a los objetos lógicos y formales en la construcción de nuevo conocimiento, por lo que en ultimas, es la postura ecléctica, la que de forma más completa define la construcción de conocimiento matemático.

Ahora bien, esta postura ecléctica se puede sintetizar, argumentando que la construcción del conocimiento matemático surge como una experiencia del sujeto con su razón, respecto al objeto matemático, es decir, de construcción epistémica. En tal caso, según Ernest (citado en Retamozo, 2012) se trataría de "un constructivismo metodológico que afirme el rol del sujeto durante procesos de acumulación de resultados que la mente crea, en donde lo material y social se constituyen en puntos de referencia" (p.18).

Desde esta perspectiva, la dimensión antropológica de la construcción matemática privilegia la descripción y esclarecimiento de los pasos constructivos a nivel histórico que han sido aceptados por la comunidad matemática, así como los aspectos de origen psicológico del sujeto epistémico. Estos aspectos, sin duda deben condicionar todo proceso de educación matemática según Wittgenstein (citado en Godino, 2010). En consonancia con lo anterior, en esta investigación se asume una postura ecléctica, incluyente del pragmatismo socioinstitucional, así como aspectos propios del sujeto, en la exploración de los componentes de la resolución de problemas algebraicos.

En términos generales, todas las perspectivas de construcción de conocimiento matemático, se pueden categorizar en una sola visión filosófica que afirme al mismo tiempo una base de partida empírica y un papel activo del sujeto epistémico. De hecho, Radford (2011) justifica lo anterior cuando explica que

> El sujeto epistémico es el que construye las nociones y entidades matemáticas en un proceso de múltiples recursos mentales pero siempre sobre la base activa también de realidades materiales y sociales. Se vuelve importante esclarecer los pasos constructivos así como la influencia del plano material-social en el que toman cuerpo. (p.68)

Así, el constructivismo enfatiza el papel del sujeto en el aprendizaje y establece una relación sujeto objeto, dicho objeto asumido como una realidad ideal o material, empírica, de las matemáticas, pero con un pragmatismo marcado por las necesidades de la institucionalidad académica (Godino, 2010).

Ahora bien, esta influencia institucional es tan amplia, que no solo se refiere a la comunidad científica, sino a las que el sujeto recibe

> Por el influjo del maestro y del entorno en el que se desarrolla la práctica educativa: no hay solo autoconstrucción cognoscitiva sino, también, influjo social y cultural. Existe una dirección hacia una visión más integrada de la dimensión activa del sujeto, la acción de lo social y cultural y del objeto material externo en el conocimiento y el aprendizaje. (Ruiz, 2011, p.54)

Entonces, es claro que, desde el contexto cercano hasta el más lejano de la institucionalidad académica, hay una incidencia activa en el sujeto cognoscente, "cuya cognición se adapta y sirve a la organización del mundo de la experiencia" (Ernest, citado en Retamozo, 2012, p.37). Así, este autor describe cómo el sujeto construye su teoría del mundo, un producto introspectivo, pero ajustado a las restricciones impuestas por la realidad sensorial o material, ideal y social.

De esta manera, dicho conocimiento introspectivo, inicialmente subjetivo, solo puede ser aceptado institucionalmente cuando es validado por las reglas y condiciones

establecidas por la comunidad matemática y su coherencia lógica. Esto es precisamente lo que afirmó Ernest (citado en Ruiz, 2011).

> La práctica matemática descansa en ese ir y venir entre el conocimiento subjetivo y el objetivo, definido por ese sostén sociogremial; no obstante, en las matemáticas, el otro criterio adicional, por su naturaleza, inteligimos nosotros es la consistencia lógica de los resultados. (p.54)

Resumiendo lo dicho hasta aquí, puede decirse que los saberes matemáticos se construyen por el sujeto epistémico, en un proceso de abstracción, a partir de una visión ecléctica de los fundamentos y filosofía de la matemática, es decir, considerando los aspectos intuitivos, lógicos y formales de la actividad matemática, en el marco filosófico del empirismo, racionalismo, realismo y pragmatismo.

En el siguiente apartado, se sintetizan los aspectos fundamentales de la naturaleza y construcción del conocimiento matemático, para aproximarse a una definición de las matemáticas.

2.2.1.6. Definición de las matemáticas

Según Bell (2016), la concepción de la esencia de las matemáticas desde una perspectiva actual, es la siguiente:

> las matemáticas actuales son abstracciones, acciones y operaciones sobre ellas mismas como conjuntos de construcciones mentales en las que la lógica ocupa un lugar privilegiado, siendo cada vez más alejadas de lo intuitivo y empírico, tanto que, a veces, nos da la impresión que nunca tuvieron contacto con ese mundo. (p. 56)

Así, para Bell (2016), las matemáticas tiene su esencia en operaciones sobre operaciones conceptuales, siendo dichos conceptos provenientes de sensaciones de objetos materiales, o de construcciones del sujeto mismo, teniendo en cuenta que este conjunto de operaciones y construcciones integradas deben cumplir los criterios pragmáticos de validez y coherencia lógica impuestas por la institucionalidad científica de las matemáticas, obviamente, con el influjo sociopolítico que la afecta sea de forma directa o indirecta.

Dado que en esta investigación se acepta una postura ecléctica respecto a la naturaleza y la construcción de las matemáticas, dada por la dimensión lógico formal regida por la intuición del sujeto epistémico, en el marco de un contexto realista y pragmatista, que determina la forma en que realiza procesos de abstracción sistemáticos, recogiendo lo dicho en las secciones anteriores y la postura de Bell (2016), en esta investigación se define la matemática como la ciencia que genera nuevo conocimiento a partir de la abstracción sistemática de conceptos provenientes de sensaciones o interpretaciones del mundo material, así como de los procesos de razonamiento internos del sujeto asociados a estas, a través de inferencias lógico formales, direccionadas por la intuición y validadas por el enfoque pragmatista histórico vigente.

En este proceso de abstracción continua o inferencia lógica, los conceptos, tanto los sensitivos, como los puramente cognitivos se integran en una red conceptual que crece continuamente sea por retroalimentación de sensaciones o interpretaciones de objetos físicos o de objetos cognitivos, en un proceso de repetición de acciones y operaciones sobre los conceptos anteriores para llegar a niveles cada vez más altos de abstracción matemática.

En síntesis, la matemática puede definirse como la ciencia que se construye a partir de un proceso intuitivo inicial, el cual rige el razonamiento lógico formal para la integración de redes conceptuales estructuradas con objetos, que por su naturaleza social, pueden ser realistas y/o pragmáticos; por su origen, empíricos y/o racionalistas, todos traslapados de forma armónica.

PREPRINT

2.2.1.7. Hacia una concepción didáctica de las Matemáticas

Para esta investigación es de gran importancia construir una concepción de didáctica de la matemática a partir de su naturaleza, construcción de conocimiento y conceptualización, debido a que esto permite la elaboración de un currículo que privilegie los procesos formativos, donde se explicite realmente los aspectos inherentes al saber matemático y no aproximaciones vagas.

Todo lo dicho en la sección anterior respecto a la naturaleza, construcción y concepto de la matemática, podría sintetizarse así: el uso de la intuición le permite al sujeto orientar la escogencia de las premisas, para construir nuevo conocimiento a través de la generación de inferencias correctas, utilizando el razonamiento lógico formal en el marco institucional histórico vigente y con un paradigma filosófico integral, donde el empirismo, racionalismo, realismo y pragmatismo se articulan para construir dicho conocimiento. Así, en una primera aproximación, la didáctica de la matemática debe basar la enseñanza de esta ciencia en el paradigma ecléctico del conocimiento, entendiendo que un sujeto puede concebir objetos de tipo empírico y/o racionalista; realista pragmatista, y con base en ellos, intuir aspectos lógico formales que los relacionen para obtener inferencias, las cuales son, desde una perspectiva amplia, nuevo saber matemático, entendiendo la resolución de problemas como una de las expresiones, por no decir la más importante, de la producción del saber matemático (Bell, 2016; Godino, 2010; Radford, 2011; Retamozo, 2012; Ruiz, 2011).

No obstante, frente a un problema matemático, en muchos casos no se dispone de todos los elementos lógicos y formales de tipo institucional para resolverlo. Por esta razón, cuando eso ocurre, según Polya (citado en Arguedas, 2012), debe aplicarse la estrategia del razonamiento plausible, criterios prelógicos y heurísticos que le permitan al sujeto intuir o construir los elementos propiamente lógico formales necesarios para resolver el problema.

Así, agregando la idea del párrafo anterior a lo dicho previamente sobre los aspectos en los que se debe basar la didáctica de la matemática, puede afirmarse que en lo relacionado con la resolución de problemas, esta debe ser ecléctica, adoptando en principio formas flexibles de razonamiento, es decir, además de la confluencia de los fundamentos

logicista, intuicionista, formalista, y los paradigmas realista y pragmatista, en la resolución es susceptible de valerse en determinados momentos del proceso en el razonamiento plausible y heurístico, como estrategia para llegar a los aspectos lógico formales de tipo socioinstitucional, siendo al final, los que permiten darle validez a la solución obtenida. Precisamente, desde esta perspectiva se enfoca la concepción didáctica de esta investigación, asumiendo la resolución de problemas algebraicos, desde una postura filosófica integral, cuyo paradigma se orienta al diálogo permanente entre el plano del sujeto epistémico y el socioinstitucional, mediado por el razonamiento plausible y heurístico.

Continuando con la perspectiva didáctica de esta investigación, los nodos que le dan sentido a la estructura del conocimiento matemático y en particular, al proceso de resolución de problemas, son los objetos matemáticos (Duval, 2016; D´Amore, 2012; Vergnaud, 2016). Estos tienen la particularidad de ser comunicados o expresados, solo a través de signos y sus relaciones, los cuales se convierten, al final, en la esencia de estudio de las matemáticas. Esta particularidad, le confiere a las matemáticas un carácter teórico, que, según Rojas (2012) lleva inherente ciertas "reglas del uso del lenguaje" (p. 28), agregando que "las matemáticas son la teoría de la forma y la estructura que surge con el lenguaje" (p. 29). Así, es clara la referencia hacia las matemáticas como un lenguaje, y por supuesto, con reglas de uso y manipulación semiótica (Duval, 2016; Vergnaud, 2016). Dicha referencia lingüística propia de la comunicación y estudio matemático, se evidencia en los planteamientos de Damisa y Ponzetti (2019), quienes sostienen que

> La matemática se diferencia de otras áreas del conocimiento, entre otros aspectos, en que el estudio de ella es de naturaleza semiótica, es decir a través de la representación de los objetos de estudio. Esto se debe a que los conceptos matemáticos no son accesibles a través de la percepción ni tampoco a través de modelos. (p.1)

REPOSITORIO

Así, integrando la perspectiva semiótica o representativa de los objetos matemáticos, de Damisa y Ponzetti (2019), D´Amore (2012), Duval (2016) y Vergnaud (2016) en la concepción didáctica de esta investigación, se concluye que la enseñanza de la resolución de problemas algebraicos, debe fundamentarse en una postura filosófica integral, con diálogo permanente entre el plano del sujeto epistémico y el socioinstitucional. Durante este proceso, debe orientarse al estudiante en el uso del razonamiento plausible y heurístico, independientemente del origen de los objetos implicados, empírico y/o racionalista, así como su representación en el respectivo sistema semiótico, con sus diferentes representaciones. Es decir, enseñar matemáticas y, específicamente, enseñar a resolver problemas, debe entenderse como un diálogo permanente entre el plano del sujeto epistémico y el socioinstitucional, utilizando en determinados momentos formas flexibles de razonamiento, teniendo en cuenta que cada uno de los objetos matemáticos con los que se razona, deben ser adecuadamente representados lingüísticamente, siguiendo las reglas semióticas en ese lenguaje, si se desea validar en el marco socioinstitucional.

En esa línea, Godino y Batanero (2016) argumentan en su Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, EOS, que los conceptos matemáticos no se basan en significados que se apoyan en la realidad material, dado que, ningún concepto matemático refiere directamente a un objeto real, concreto u ostensivo, aprehensible con los sentidos físicos. Más bien, “todo concepto matemático tiene representaciones ostensivas semióticas en otros registros lingüísticos” (p.34).

Llegado a este punto, la enseñanza de la matemática debe basarse en un dialogo socioepistémico entre el sujeto y los referentes institucionales, es decir, fundamentarse en el logicismo, intuicionismo y formalismo, de forma articulada, partiendo de cierta flexibilidad en determinadas condiciones, teniendo en cuenta su esencia realista pragmatista, utilizando debidamente los registros semióticos para comunicarla, expresarla y entenderla.

Así, es claro que la didáctica debe considerar la importancia de expresar y comunicar las matemáticas a través de los registros lingüísticos, siendo fundamental, entre otras cosas, que los estudiantes comprendan y manipulen adecuadamente la estructura semiótica de los objetos matemáticos, especialmente, para la resolución de problemas matemáticos algebraicos. Esto permitirá que puedan disponer de diversos paradigmas y

enfoques socioepistémicos para resolver problemas, pero, siempre expresándolos, comunicándolos, incluso, manipulándolos a través de su representación semiótica en un determinado registro lingüístico.

En conclusión, independientemente del enfoque o postura sobre la construcción matemática, se infiere que la comunicación y expresión de estas hace parte de su esencia, por lo que la comprensión de su estructura semiótica debe ocupar un lugar fundamental en la finalidad de la didáctica matemática. Para ello, se deben crear ambientes de aprendizaje, desde la aprehensión empírica y/o racional de los objetos matemáticos, hasta la representación y comprensión semiótica de estos, lo que implica entender el significado de términos, símbolos matemáticos, conceptos y proposiciones, para lograr que los estudiantes puedan utilizar múltiples registros de un mismo objeto, con el fin de resolver problemas matemáticos y algebraicos (D´Amore, 2012; Duval, 2016; Godino, 2016; Vergnaud, 2016).

2.2.2. Naturaleza de los problemas

2.2.2.1. Concepto de problema

En relación con el concepto de problema matemático, tras un rastreo bibliográfico en la literatura especializada, se observa que diversos autores, basándose en sus estudios e investigaciones, han construido sus propias conceptualizaciones, las cuales se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 6. Diferentes acepciones de concepto de problema matemático

Autor	**Concepto**
Polya (1965, p. 14)	Es un estímulo que exige la búsqueda, mediante una acción adecuada, de un objetivo que no es inmediatamente alcanzable.
Kantowski (citado en Castillo, 2012, p.12)	Situación para la que el individuo que se enfrenta a ella no posee algoritmo que garantice una solución. El conocimiento relevante de esa persona tiene que

	ser aplicado en una nueva forma para resolver el problema.
Abrantes (citado en Santos, 2013, p.29)	Estamos ante una situación problemática cuando tenemos una meta más o menos clara y no existe un camino inmediato y directo para alcanzarla; por lo tanto, nos vemos obligados a elegir una vía indirecta, a hacer un rodeo. Dicho de otro modo, existe un problema siempre que queremos conseguir algo y no sabemos cómo hacerlo, en cuanto que, los métodos que tenemos a nuestro alcance no nos sirven.
Bouvier y George (citado en Fernández, Caballero & Fernández, 2013, p. 23).	Cuestión de la que se conocen algunos datos los cuales hay que manejar convenientemente para encontrar otro que se busca.
De Guzmán (citado en Nieto & Lizarazo, 2013, p. 33)	Hace referencia a verdaderos problemas en matemáticas cuando se encuentra en una situación inicial desde la cual quiere llegar a otra final y no conoce el camino que lleva de una a otra.
Schoenfeld (citado en Conejo & Ortega, 2013, p. 23)	Un problema no es una propiedad inherente de una tarea matemática. Más bien es la relación entre el individuo y la tarea, lo que hace de la tarea un problema para esa persona.
Espinosa, Lupiañez y Segovia (2014, p.35)	La palabra problema se ha de interpretar como una situación difícil ante la que se encuentra el individuo, y que trata de resolver. Además apunta que la dificultad ha de ser intelectual y no algorítmica.
Krulik y Rudnik (citado en Bello, Velásquez & Sigarreta, 2016, p. 23)	Cuando una persona o grupo de personas están ante una situación que requiere una solución y aparentemente no hay un camino que conduzca a la misma.
Hayes (citado en Ariza, García & Rivero, 2016, p.1).	Siempre que haya una brecha entre donde uno está en este momento y donde uno quiere estar, y uno no sepa cómo encontrar el camino para cruzarla, uno tiene un problema.
Blum y Niss (citado en Salazar, Mancela, Camelo, perilla, 2017, p.15)	Problema es una situación que conlleva ciertas cuestiones abiertas que retan intelectualmente a

	alguien que no posee inmediatamente métodos, procedimientos o algoritmos directos y suficientes para responder
Carrillo (citado en González, Guerrero & Yáñez, 2020, p.31)	El concepto de problema, debe asociarse a la aplicación significativa (no mecánica) del conocimiento matemático a situaciones no familiares, la consciencia de tal situación, la existencia de dificultad a la hora de enfrentarse a ella y la posibilidad de ser resuelta aplicando dicho conocimiento.

Fuente: Autor (2020).

2.2.2.2. Componentes de un problema

Desde el ámbito de la educación matemática, se destacan autores como Castro, Gerofski, Santos, Parra, Larios y García (citados en Ayllón, 2013) quienes identifican diversos componentes que estructuran los problemas.

En primer lugar, Castro (2011) señala que un problema debe tener los siguientes componentes: una proposición redactada mediante un texto oral o escrito; datos conocidos, que formarán parte de dicha redacción; una intención, movilizar una o más personas para que averigüen y una meta (p. 31).

Además, Gerofski (citado en Ayllón, 2013), destaca tres componentes de un problema. El primero, es "el contexto" (p. 17), el segundo de información, que da los "datos que se necesitan para resolver el problema" (p. 18). La tercera componente es "la cuestión o pregunta a la que hay que encontrar respuesta" (p.19).

Además, Santos y Parra (citados en Rozo y Pérez, 2014) describen los requisitos que debe cumplir un problema, los cuales son los siguientes:

- Que sea considerado como un proceso con diferentes métodos de solución y posibles resultados.

- Que despierte interés suficiente como para ser resuelto, que al alumno le interese para que se concentre y desee ansiosamente resolverlo, que se entregue al problema "en cuerpo y alma".
- Que no exista garantía de que al aplicar un algoritmo se obtenga el resultado de manera inmediata.
- Que permita el desarrollo del razonamiento matemático, promoviendo una actitud positiva hacia la matemática.
- Que el error, al tratar de resolverlo, se convierta en una fuente de conocimiento. (p.53)

Por su parte García (citado en Prieto, Sánchez, Martín & Sanz, 2014), considera que un problema debe satisfacer los tres requisitos siguientes:

> Aceptación: El individuo o grupo debe aceptar el problema, debe existir un compromiso formal, que puede ser debido a motivaciones tanto externas como internas.
>
> Bloqueo: Los intentos iniciales no dan fruto, las técnicas habituales de abordar el problema no funcionan.
>
> Exploración: El compromiso personal o del grupo fuerzan la exploración de nuevos métodos para atacar el problema. (p.23)

2.2.2.3. Concepto de ejercicio

Algunos autores definen ejercicio como una tarea rutinaria que requiere para su realización, de la capacidad memorística, fundamentalmente. Entre los ejercicios considera dos tipos: “a) ejercicios de reconocimiento, en ellos el resolutor ha de resolver, reconocer o recordar una definición o proposición y b) ejercicios de algoritmos, los que demandan la ejecución de un algoritmo, normalmente numérico” (Ayllón, 2014, p.33).

Por su parte, Lario (citado en Laya & Fernández, 2010) menciona que se refiere a

una actividad que no supone un reto para la creatividad y para el desarrollo de las habilidades matemáticas del individuo, dado que el resolutor, tras una breve reflexión, sabe si puede o no resolverlos aplicando un algoritmo conocido.

Según Urdiain (2006), los ejercicios no implican una actividad intensa de pensamiento para su resolución. Al realizarlos, el alumno se da cuenta que no le exigen grandes esfuerzos. Generalmente tienen una sola solución, son actividades de entrenamiento, de aplicación mecánica de contenidos o algoritmos aprendidos o memorizados. Además, sirven para comprobar que los alumnos han automatizado los conocimientos que el docente pretendía enseñarles y, a su vez, al alumno, para consolidar dichas adquisiciones.

2.2.2.4. Aspectos definitorios de la resolución de problemas

Una de las características más importantes de la resolución de problemas es que no es un proceso algorítmico, es decir, no existe una predeterminación de pensamientos, operaciones o formulas en cierta secuencia, determinadas de antemano, por el contrario, es un proceso de transito cognoscitivo entre un estado inicial y uno final, que se recorre utilizando los conocimientos previos, con un orden y selección, no prefijados. Adicionalmente, el espacio del problema o conjunto de pasos ejecutados pueden tener diferentes enfoques de abordaje. También, pueden existir soluciones múltiples, cada una con costos y beneficios, incluso, al principio puede haber incertidumbre, por cuanto no se conoce con precisión los conocimientos que se utilizarán durante el proceso resolutivo. Además, la resolución de problemas implica mecanismos propios de regulación y cierto esfuerzo mental con el propósito de desarrollar a cabalidad el proceso resolutivo del problema (Pérez & Ramírez, 2011).

2.2.2.5. Tareas en la estructura del proceso de resolución de problemas

PREPRINT

En la estructura del proceso de resolución de problemas, según Polya (1965) es posible identificar, de forma general, las siguientes tareas o fases: Comprensión del problema, concepción de un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva.

Comprensión del problema: Esta tarea implica entender la situación que presenta el problema, diferenciar los tipos de información explícitos en el enunciado y comprender qué debe hacerse con la información. De hecho, puede considerarse el texto de los enunciados matemáticos como una tipología particular en la que se expresa la situación a resolver, pero no el modo de llevarla a cabo (Polya, citado en Carvajal, 2006). Su descubrimiento forma parte del trabajo del resolutor, quien debe decodificar el mensaje contenido en el enunciado y trasladarlo a un lenguaje matemático que le permita avanzar en el proceso de resolución. Por esta razón, las dificultades que pueden aparecer en la comprensión del enunciado de un problema son diferentes de las que surgen en la comprensión de un texto de otra índole, en la medida que entran en juego procesos de transformación semiótica.

Concepción de un plan: Esta tarea es la consecutiva a la comprensión del problema e implica la planificación las acciones se ejecutarán progresivamente. Asimismo, implica planear qué puede calcularse a partir de los datos del problema, qué operaciones utilizar y en qué orden se debe proceder (Polya, citado en Carvajal, 2006). Dicho proceso puede realizarse por escrito, de forma clara y secuenciada, con el fin dejar clara la orientación que seguirá la subsiguiente ejecución, es decir, el control del proceso de resolución por parte del alumno; lo cual puede facilitar que el profesor conozca el pensamiento matemático desarrollado durante la ejecución de la tarea. Además, en esta fase es posible la emergencia de esquemas que ayuden a clarificar la situación a resolver, y le den sentido al proceso ejecutivo. Estos esquemas pueden referirse a modos estereotipados de proceder e interpretar, relacionados con problemas y metodologías abordados con anterioridad.

Ejecución del plan: En esta tarea se concretan o se ponen en práctica cada uno de los pasos diseñados en la planificación, es decir, en la concepción del plan. Durante este proceso, se debe realizar introspectivamente un proceso de verbalización de acciones y justificación, es decir, “se procederá con este cálculo, por tales razones, después, dicho calculo lo utilizare para esto otro y así sucesivamente, hasta llegar a la solución. Esta fase

concluye con una expresión clara y contextualizada de la respuesta obtenida" (Martínez & Brendy, 2015, p. 23).

Visión retrospectiva: Esta tarea consiste en una fase de aprendizaje a partir del análisis de todo el proceso resolutivo, más allá de la solución pedida inicialmente, es decir, empieza con el escrutinio metacognitivo de todos pormenores conceptuales y procedimentales observables y no observables, verbalizando los procesos que se dan interiormente ocurridos durante la resolución, y termina cuando el resolutor siente que ya no puede aprender más de todo el marco de dicha situación (Barrantes, 2006). Específicamente, implica realizar una revisión del proceso seguido, para determinar si es correcto o no, el modo como se ha llevado a cabo la resolución y si, efectivamente, la respuesta es validada, tanto por la satisfacción de las condiciones del problema, como por el proceso seguido. Además, implica reflexionar en otros razonamientos que conducen a vías alternativas de solución, que partes del proceso representaron mayor dificultad, y la forma en que fueron superadas, así como la transferencia y extensión del método a otras situaciones problema. Esta actividad permite el conocimiento de la forma de razonar, proceder y actuar, así como las interpretaciones referidas a contenidos conceptuales o procedimentales, que no son detectables en los mecanismos pedagógicos convencionales (Barrantes, 2006).

2.2.2.6. Problema algebraico

En el ámbito escolar, un problema algebraico es un enunciado en el que existen datos conocidos y o conocidos, llamados incógnitas, los cuales guardan una relación, a partir de la cual se solicita encontrar el valor de una o más incógnitas (Otero, Papini & Elichiribehety, 2016). De esta manera, la solución de un problema consiste en traducir en ecuaciones o inecuaciones las relaciones que existen entre los datos conocidos y las incógnitas. Por lo general, en el proceso de resolución, se comienza traduciendo al lenguaje algebraico la incógnita que no está referenciada directa o claramente en el enunciado, y a partir de un proceso relacional, se va asignado el valor correspondiente a las demás

incógnitas, hasta representar las datos del enunciado de forma algebraica. Por último, se expresa la ecuación típica de la forma Ax +B = Cx+ D, la cual se transforma mediante el uso de definiciones, axiomas y teoremas o propiedades de los números reales, hasta llegar a la forma x= E, siendo E, el valor de la incógnita (Gascón, Bosch & Ruiz, 2017). No obstante, la definición anterior no agota la definición de problema algebraico, ni puede existir una que la agote en toda su extensión conceptual. A pesar de ello, con cierto nivel de generalidad, podría decirse que un problema algebraico es todo aquel donde se utiliza el lenguaje simbólico como estrategia procesual para representar la información dada e inferir nueva información.

2.2.3 Enfoques en la resolución de problemas

En esta sección se exponen diferentes enfoques en la resolución de problemas, presentando como un marco general de todos los enfoques al desarrollado por Piaget (citado en Raynaudo & Peralta, 2017). Con base en este, autores como Brown, Deloache; Papert y Wind (citados en Atenas & Vera, 2017) plantearon sus enfoques, es decir, su forma epistémica de resolver problemas. No obstante, en esta investigación se considera el enfoque de Piaget como un constructo más general que el de los otros autores, por cuanto se refiere a procesos que son comunes a los demás autores, con un lenguaje más universal.

Considerando el marco general de Piaget, un problema debe abordarse a través del enfoque lógico, utilizando los principios de implicación, reversibilidad, generalización, exclusión, inclusión y depuración (Raynaudo & Peralta, 2017). En primer lugar, la implicación consiste en asumir las proposiciones del problema y las planteadas a lo largo del proceso resolutivo, como antecedente de una conclusión lógica, derivable de las proposiciones iniciales. Esto puede aplicarse a silogismos, esquemas de razonamiento y fórmulas lógicas. Asimismo, también puede entenderse como una forma de evaluar los procesos metacognitivos realizados durante los pasos realizados para resolver el problema. De esta manera, entre más aspectos metacognitivos sean mostrados, más completa será la verificación del principio de implicación a las proposiciones del problema (Saldarriaga, Bravo & Loor, 2016).

PREPRINT

En segundo lugar, la reversibilidad se evidencia cuando se piensan diferentes formas de atacar a un problema hasta que finalmente se decide concretar una ruta cognoscitiva particular. Es decir, la reversibilidad se refiere a la capacidad de cambiar y moverse libremente en el espacio cognoscitivo para escoger la ruta a seguir en la resolución (Saldarriaga, Bravo & Loor, 2016).

En tercer lugar, la generalización es una operación de abstracción que da lugar a un término o a una proposición general, que se evidencia, de forma amplia, en la construcción de hipótesis. Asimismo, un resolutor demuestra procesos de generalización cuando decide racionalmente sobre los pasos, procedimientos, técnicas a realizar (Yáñez, 2019).

En cuarto lugar, la exclusión se refiere a un proceso cognitivo del estudiante que le permite distinguir que aspectos le impiden avanzar en el proceso resolutivo, para excluirlos o dejarlos de lado e incluir otros que permitan avanzar en el espacio del problema (Saldarriaga, Bravo & Loor, 2016).

Por último, la depuración consiste en construir o perfeccionar cada detalle de un proceso específico de la resolución de problemas. Este proceso incluye la utilización de diversas estrategias como la simplificación de operaciones, el análisis del error y la síntesis de operaciones (Lacasa, 2015).

Entonces, a partir del enfoque general de la resolución de problemas, autores posteriores a Piaget, tales como Brown, Deloache; Papert y Wind (citados en Atenas & Vera, 2017), sostienen que todo enfoque del proceso resolutivo requiere de relaciones entre conocimiento específico y actividades generales como inferencias, organización, conservación y descentralización de los razonamientos. En el logro de dicho objetivo, las teorías de resolución de problemas enfrentan una gran dificultad: la imposibilidad de representar las actividades que se llevan a cabo en el momento indicado y los límites de atomización o separación de una dificultad singular de un problema en componentes más simples.

Lo anterior es especialmente importante, dado que la solución puede ser encontrada a través del análisis de las partes constitutivas de los componentes semánticos del problema, lo cual permite manipularlo de manera más fácil.

PREPRINT

En resumen, frente al proceso de resolución de problemas, los mencionados enfoques clásicos se centran en comprender las operaciones cognitivas, cuya aplicación aumenta la probabilidad de conducir a la respuesta adecuada, a través de atajos conceptuales, que pueden resultar efectivos en muchos casos. Estas son las siguientes:

Encadenamiento hacia atrás: Esta técnica enfoca la atención hacia el objetivo estático y trata de deducir un estado precedente hacia el cual el objetivo pudo haber derivado, luego un estado desde el cual puede haber derivado y así sucesivamente hacia atrás hasta llegar al planteamiento original del problema. En síntesis un problema puede derivar en muchos otros problemas.

Prueba sistemática y error: Consiste en una prueba recursiva de posibles soluciones sistemáticamente y el refinamiento de los resultados. La aplicación de la estrategia de esta prueba sistemática y del error es un importante determinante en la habilidad operacional formal.

Representación alternativa: Esta técnica requiere la conceptualización de un problema desde diferentes perspectivas y registros lingüísticos distintos.

Analogía: Implica el descubrimiento de una similitud particular entre dos aspectos aparentemente distintos, quizá de contextos distintos, pero que poseen un aspecto estructural común, que permite incluirlos en una categoría, y, por tanto, tratarlos de forma parecida.

Después de este breve recorrido por diferentes posiciones en tomo a la resolución de problemas, se puede señalar que desde Piaget se ha concebido la resolución de problemas como un procedimiento que es inicialmente sintético, pero en el momento de sugerir alternativas de solución es analítico.

Por otro lado, un enfoque adicional en la resolución de problemas es el uso constante de heurísticas, las cuales son descripciones de tipo metacognitivo que le dan sentido al subsiguiente proceso ejecutivo. Algunos autores como Morillo, Moreno & Díaz (2014), plantean que la heurística indica una acción y la forma en que se debe realizar grupo de procesos operatorios, de manera que estos últimos adquieran sentido y se constituyan en un avance efectivo a la solución del problema. En ese sentido, tras un

proceso de análisis y síntesis de diferentes fuentes bibliográficas, los mencionados autores coinciden en un enfoque heurístico de la resolución de problemas, siguiendo las siguientes prescripciones:

Hacer uso de una o más definiciones, conceptos, axiomas, teoremas o propiedades; empezar por lo fácil: simplificar o buscar casos particulares, es decir, dividir para conquistar; escoger valores particulares para facilitar la comprensión del problema y, con base en ellos, intentar obtener cierto procedimiento para la solución, adicionar argumentos sin pérdida de generalidad, por ejemplo asignar a uno de los datos un valor con el que pueda trabajarse por experiencias anteriores; experimentar y buscar regularidades o patrones; modificar el problema mediante su reformulación o fraccionarlo en metas parciales; aplicar el método del ensayo y error; organizar la información mediante esquemas, tablas, figuras, diagramas; escoger un lenguaje o notación familiar; utilizar el razonamiento inductivo; encontrar simetrías con problemas anteriores y casos extremos, para delimitar el rango de posibilidades del problema; asumir el dato de llegada como conocido o generalizado, para razonar hasta las condiciones iniciales que lo generan; proponer un problema semejante, con forma, datos y conclusiones parecidas, pero más sencillo y tratar de resolverlo, añadiéndole dificultad poco a poco hasta la forma del problema original; debilitar las condiciones del problema y plantar argumentos por contradicción, es decir, analizar qué pasa si estas no se cumplen, con el fin de facilitar su comprensión y realización; construir problemas equivalentes, con la misma estructura lógica entre las proposiciones, reemplazar las condiciones por otras equivalentes; recombinar las proposiciones, partículas semánticas del problema de diferentes maneras; introducir conceptos, datos auxiliares; razonar de forma contrapositiva, por ejemplo, para entender que si en el problema se plantea comprobar $A \Rightarrow B$, es equivalente a $\sim B \Rightarrow \sim A$; considerar leves modificaciones que restrinjan las condiciones el problema, elegir objetivos intermedios al deseado; dejar mayor amplitud en las condiciones iniciales del problema; luego, con mayor conocimiento de los procesos resolutivos del mismo, retomar todas las condiciones iniciales; mantener todas las variables y dejar una constante, para resolver el problema, y así determinar la influencia de la misma en el problema (Mieles & Montero, 2012; Suarez, 2013; Morillo, Moreno & Díaz, 2014).

2.2.4 Clasificación de los problemas

Tras un rastreo bibliográfico en la literatura especializada en el análisis de problemas matemáticos en el contexto educativo, se encontró una variedad de criterios de clasificación de problemas, de acuerdo a la finalidad, el procedimiento utilizado, los conocimientos previos del sujeto, más allá del contenido matemático específico implicado en la resolución del problema.

2.2.4.1. Según su finalidad

Según la clasificación dada por Polya (1965), existen problemas cuya meta es encontrar valores desconocidos, demostrar, generalizar y comprender casos particulares. En cuanto a los primeros, son aquellos que se encuentran estructurados con datos conocidos y condiciones que deben cumplir estos, así como incógnitas, cuyo valor debe encontrarse a partir de dichos datos. Los segundos se refieren a problemas en los que se enuncia una hipótesis bajo ciertas condiciones y el objetivo es demostrar si esta es válida, o no. Asimismo, Noda (citado en Ayllón, 2016) manifiesta que un problema de encontrar se puede transformar en uno de probar en el momento en el que se plantea una hipótesis sobre su resultado. Recíprocamente, si en un problema de demostrar, se toma como incógnita uno de los datos que hacen parte de la enunciación de la hipótesis, el problema se transforma en uno encontrar un valor desconocido.

2.2.4.2. Según el procedimiento utilizado

De acuerdo con este criterio, los problemas pueden clasificarse en rutinarios y no rutinarios. Los problemas rutinarios son aquellos cuya resolución es totalmente predecible, es decir, el resolutor identifica de forma inmediata el camino que requiere su resolución, por medio de una o varias operaciones secuenciales, donde reemplaza datos

en fórmulas típicas predeterminadas, para obtener respuestas con resultados restringidos, asemejándose más a ejercicios, que a problemas, propiamente dichos (Pérez & Ramírez, 2011). Por otro lado, en los problemas no rutinarios, el proceso de resolución no es obvio a simple vista y requiere de operaciones de pensamiento y esfuerzo intelectual no reducible operaciones secuenciales, donde la intuición y las experiencias anteriores ocupan un papel importante en el proceso resolutivo (Pérez & Ramírez, 2011).

2.2.4.3. Según la complejidad relativa

Según este criterio, los problemas pueden clasificarse en tradicionales y creativos. Según Craig (citado en Castro, 2011) existen problemas tradicionales y problemas creativos en función de los conocimientos previos y experiencias del sujeto que lo enfrenta. Así, una situación determinada puede ser un problema para un individuo y no serlo para otro, por lo que un problema tradicional debe entenderse como un enunciado que le exige al individuo la vinculación de las condiciones dadas con el objetivo, utilizando procesos conocidos. En cambio, el problema creativo tiene una serie de condiciones conocidas, pero los procesos para lograrlo no están claramente definidos, por lo que requiere un proceso de reflexión del resolutor para construirlos, con el fin de llegar a la solución del problema.

2.2.4.4. Según la presencia de estructura

Respecto a su estructura, los problemas pueden clasificarse en estructurados y no estructurados. En primer lugar, en los problemas estructurados, el enunciado presenta la información necesaria para resolverlos, las reglas y métodos para encontrar la solución correcta son claras y se tienen a la mano los criterios que permiten verificar que la solución obtenida es correcta, el resolutor tiene que diseñar total o parcialmente el procedimiento de resolución, es decir, el resolutor habrá de añadir algo que no es inmediatamente aparente en el problema (Pérez & Ramírez, 2011). En segundo lugar, se entiende por problemas no estructurados, aquellos que son similares a los planteados en

la vida cotidiana, por cuanto no tienen toda la información necesaria, es decir, información, métodos y reglas que permiten encontrar la solución correcta, la formulación del problema no es clara, no hay un procedimiento que garantice la solución, y el resolutor no tiene seguridad de que la solución conseguida sea la correcta (Pérez & Ramírez, 2011).

Respecto a los problemas no estructurados, autores como Fredericksen y Simon (citados en Ayllón, 2013) señalan la existencia de problemas donde no hay suficiente información para la formulación del problema y otros en que habiendo una formulación completa, el proceso de solución no es posible.

2.2.4.5. Según su definición

En cuanto a su definición, los problemas se clasifican en bien definidos y mal definidos. Según Pérez y Ramírez (2011), un problema bien definido corresponde a aquel en el que hay consenso acerca del estado final al que hay que llegar y se considera resuelto cuando el individuo alcanza dicho estado. Además, según el mencionado autor, un problema mal definido, es aquel en el que no hay un único estado final y donde los estados final e inicial no están bien especificados.

Así, los problemas bien definidos son similares a los que se presentan en la escuela, que tienen condiciones iniciales con variables definidas y una solución o conjuntos de soluciones ya especificados y valorables bajo criterios preestablecidos. Por el contrario, los problemas mal definidos son los que no tienen datos, tienen datos en exceso o le faltan datos y cuya solución no posee criterios previos o especificados que permitan dar cuenta de su valoración (Noda, citado en Ayllón, 2013).

2.2.5 Factores que inciden en la resolución de problemas

En términos generales, los factores que inciden en la resolución de problemas, son: comprensión, comunicación y el cálculo procedimental (Mieles & Montero, 2012). En

cuanto a la comprensión y comunicación, se refiere a capacidades relacionadas con la adquisición y expresión de conceptos, a través de procesos de identificación. Relación aplicación, descripción, expresión, explicación y representación. Asimismo, la comprensión conceptual se asocia a la representación mental y a la relación que se establece entre diferentes conceptos. No obstante, el desarrollo de la capacidad de comunicación depende de la creación y efectividad formativa de ambientes didácticos de aprendizaje que privilegien diferentes lenguajes y recursos comprensivos propios de las matemáticas. Asimismo, la expresión oral facilita la consolidación de los aprendizajes adquiridos, lo cual implica explicar y justificar el proceso seguido en la ejecución de tareas propuestas, para que los demás comprendan la razón de por qué lo han resuelto de una determinada manera (Ayllón, Gómez & Ballesta, 2016).

Respecto al cálculo procedimental, se refiere no solo a conocer los procedimientos matemáticos, sino además a cuándo y cómo usarlos de un modo apropiado, correcto y eficaz. El desarrollo de las destrezas procedimentales debe relacionarse siempre con la comprensión conceptual, que conlleva su uso como instrumento de resolución. Así, si no se está familiarizado o no se domina los conceptos, las operaciones serán aprendidas de forma memorística y no significativa, lo cual impide la transferencia a otra clase de problemas (Ayllón, Gómez & Ballesta, 2016).

2.2.6. Aspectos implicados en el aprendizaje de la resolución de problemas

En este apartado se presentan los saberes previos, axiomas, operaciones aritméticas y estrategias metacognitivas y la noción algebraica, con la transformación semiótica propia de este lenguaje, como entes separados que determinan el proceso de resolución de problemas (Pérez & Ramírez, 2011). No obstante, en un sentido amplio, podría decirse que todos los aspectos de la resolución de problemas se incluyen en los saberes previos. De hecho, cuando un sujeto aborda un problema, lo que hace es evocar y utilizar selectivamente los conocimientos que previamente dispone, que incluyen los aspectos ya mencionados. Sin embargo dada la importancia e influencia en la resolución que cada aspecto reviste, se han separado, tal como se evidencia en este apartado, con el fin de

aprehenderlos en sus características fundamentales. Así, aunque los axiomas, las operaciones aritméticas, la metacognición y la transformación semiótica, se analicen por separado, se entiende que en el proceso de resolución, estas conforman la estructura cognitiva que es la esencia de los saberes previos del sujeto que se dispone a resolver el problema (Álvarez, Alonso & Gorina).

2.2.6.1 Saberes previos

En este apartado se presentan los aspectos generales que integran los saberes previos en el proceso de resolución de problemas. Así, se abordan las concepciones, como aspecto central de todo saber previo, que incluyen conocimientos memorísticos, conocimientos conceptuales o de construcción de significado y conocimientos procedimentales, los cuales le dan un sentido operacional a los primeros dos tipos de conocimiento (Nieto & Lizarazo, 2013)

Concepciones: las concepciones se refieren a elementos cognoscitivos, creencias que sujeto utiliza en el proceso de resolución de problemas, los cuales pueden ser de tipo memorístico, conceptual y procedimental (Campistrous & Rizo, 2013).

Conocimiento memorístico: se refiere a los acontecimientos, datos y hechos que se pronuncian verbalmente con exactitud, y que los estudiantes deben aprender en forma literal o “al pie de la letra”. Se puede decir que es la parte memorística, por ejemplo, saber el nombre de las partes de una ecuación, las partes que conforman un monomio, un polinomio, etc (Nieto & Lizarazo, 2013).

Conocimiento conceptual: se refiere a la capacidad de análisis, interpretación, razonamiento y explicación, que permiten el desarrollo de la capacidad de comprensión para construir sus propios significados. Es importante reconocer que los conocimientos memorístico y conceptual son necesarios para lograr el aprendizaje de los contenidos declarativos, con la diferencia que el conocimiento memorístico no necesita de presaberes, debido a que se realiza por la simple reproducción de la información; mientras que en el

caso del aprendizaje conceptual sucede con el uso de los conocimientos previos pertinentes que posee el estudiante para construir nuevos significados.

Conocimiento procedimental: Este tipo de conocimiento se manifiesta en la aplicación de procedimientos, desarrollo de habilidades, destrezas, técnicas y métodos en la ejecución de un trabajo, es decir, implica llevar a la práctica el conocimiento memorístico y conceptual (Pérez & Hernández, 2017). En términos generales, el uso efectivo del conocimiento procedimental requiere de procesos de repetición y ejercitación reflexiva, observación crítica, imitación de modelos apropiados, retroalimentación oportuna pertinente y profunda, establecimiento del sentido de las tareas y del proceso en su conjunto mediante la evocación del conocimiento memorístico y conocimiento conceptual, actividades significativas, control y análisis de los propios comportamientos, actitudes propias del sujeto al ejecutar procedimientos, con el fin de aplicar algoritmos, operaciones y pasos con cierta automatización, pero dotados de significado.

2.2.6.1.1. Axiomas

Otro aspecto implicado en la resolución de problemas son los axiomas, los cuales son proposiciones cuya veracidad no se demuestra, sino que se asume como punto de partida. Estos son tan importantes, que se constituyen en insumo fundamental para el desarrollo de procedimientos y la justificación de estos. De hecho, permiten darle validez a los procedimientos realizados durante el proceso resolutivo, de tal manera que el resultado será válido, por el hecho de haberse fundamentado lógicamente en axiomas válidos (Pérez & Hernández, 2017). En concreto, para resolver problemas matemáticos de todo tipo, es necesario utilizar tres tipos de axiomas: axiomas algebraicos, axiomas de orden y axiomas topológicos. En cuanto a los axiomas algebraicos, incluyen los axiomas de la adición, multiplicación y distribución. Asimismo, los axiomas de orden establecen la relación entre dos cantidades, que puede ser mayor, menor, e igual. Por último, el axioma topológico, demuestra la existencia de los números irracionales (Escobar, López & Sánchez, 2015).

Respecto a la caracterización de los axiomas matemáticos, dada la extensión, profundidad y rigor que representa la conceptualización de cada uno, que desborda los límites teóricos y teleológicos de esta investigación, no serán abordados. No obstante, en el apartado de definición conceptual y operacional, se describen con detalle los axiomas que los estudiantes deben comprender para la resolución de problemas algebraicos que trata esta investigación.

2.2.6.1.2. Definición de operaciones con números reales

En esta investigación, la definición de operaciones con números reales se refieren al dominio conceptual y procedimental de las operaciones aritméticas básicas con los conjuntos numéricos que hacen parte de los números reales, tales como los números naturales enteros, fraccionarios, en su forma decimal, racionales e irracionales (Suárez, 2012). Lo anterior implica la operatividad del estudiante con expresiones aritméticas que requieran el dominio de algoritmos, tales como la suma, resta, multiplicación y división, en las reglas del sistema de numeración decimal. Además, incluye reglas de uso de la calculadora, la forma de comunicación de procedimientos operacionales, es decir, la explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos y en la resolución de problemas numéricos, fundamentada en definiciones, axiomas o propiedades de operadores numéricos (Suárez, 2012). Finalmente, este aspecto será ampliado en el apartado de definición conceptual y operacional.

2.2.6.1.3. Noción algebraica

Según Cajaraville y Gusmao (2010), la noción algebraica hace referencia procesos relacionados con actividades de transformación, generación y globalización de expresiones y razonamientos aritméticos utilizando la inducción y deducción, así como la identificación de la incógnita en el planteamiento de un problema, y la concepción de metanúmeros o

símbolos y su relación con los valores conocidos, en un sentido informal. En este proceso se incluye la comprensión de problemas aritméticos, el sentido lingüístico entre las proposiciones del problema, la transformación y diversas formas de representación de enunciados, utilizando el registro verbal, icónico y aritmético. Asimismo, la noción algebraica, implica el aprendizaje conceptual de objetos algebraicos tales como variable, constante, coeficiente, igualdad, despeje, incógnita, etc (Chalé, Font & Acuña, 2017). Este aspecto será ampliado en la definición conceptual y operacional de los saberes previos, en la subcategoría de noción algebraica.

2.2.6.2 Estrategias metacognitivas

En este apartado se describen, de manera muy general, los subprocesos que estructuran las estrategias metacognitivas durante el proceso de resolución de resolución de problemas en el ámbito matemático. No obstante, estos serán ampliados y contextualizados en el ámbito algebraico, en la definición conceptual y operacional de las categorías de análisis.

2.2.6.2.1. Planeación

Este subproceso metacognitivo implica la evocación y organización de conceptos matemáticos y procedimientos que serán utilizados, así como la omisión racional de otros, durante el proceso resolutivo, justificando y presentando argumentos, probablemente para sí mismo, con el fin de trazar una ruta procesual, desde el planteamiento del problema hasta concebir una posible solución (Espinosa & Tamayo, 2010). Además, la planeación se refiere a la capacidad de elegir el método más viable, de seleccionar la información relevante del problema, para concebir posibles técnicas a utilizar antes de comenzar cualquier procedimiento, en un proceso de transferencia con problemas anteriores o mediante el uso de heurísticas, para llegar a la respuesta, de una forma eficaz. Es de notar que el proceso de planeación es especialmente evidente, cuando ocurre cierto bloqueo

cognitivo en alguna etapa del proceso resolutivo, pues inmediatamente se pone en marcha, con el fin de establecer la forma en que dicho obstáculo será superado.

2.2.6.2.2. Regulación

Este subproceso implica la concreción de los pasos anteriormente planeados, así como los ajustes continuos a los procesos cognitivos que se realizan en la fase ejecutiva del problema, conservando en todo momento el sentido global o teleológico del mismo, es decir, comprende una constante supervisión del proceso de solución, que parte desde la ejecución del plan previamente diseñado y la realización de cambios sobre la marcha para optimizar la estrategia planeada inicialmente, hasta el cambio por completo de dicha estrategia, si no está funcionando (Sastre, 2012). Asimismo, la regulación incluye aspectos de tipo actitudinal, tales como el empeño y esfuerzo que se le asigna al problema y la habilidad del estudiante para persistir en las tareas a pesar de las distracciones o falta de interés; que es transversal a todas las áreas de conocimiento.

2.2.6.2.3. Evaluación

El subproceso de evaluación hace referencia al cuestionamiento que se realiza a cada proceso realizado, si está bien ejecutado operacionalmente, si constituye en un avance hacia la meta del problema, para realizar los ajustes pertinentes, con el fin de reorientar la organización de los procesos subsiguientes, incluso, anteriores, en el proceso de resolución, de manera que conduzca al cumplimiento del objetivo del problema (Buitrago & García, 2011). Además, implica la realización de juicios sobre las estrategias utilizadas a lo largo de todo el problema, su operacionalización como algoritmo o como proceso de forma correcta, así como la efectividad de las mismas, otorgándoles un sentido a la solución dentro del problema, así como otras técnicas alternativas que pudieron conducir al mismo resultado, susceptibles de utilizarse íntegramente o modificarse al enfrentar otro problema

de esa misma familia, en un proceso de transferencia o extrapolación (Buitrago & García, 2011).

2.3. Enfoque Ontosemiótico de la Cognición en la resolución de problemas

Considerando todo lo abordado hasta este punto, es clara la relevancia del dialogo socioepistémico, en el marco de los fundamentos, naturaleza y conceptualización de las matemáticas, como insumo fundamental de la didáctica para el aprendizaje de las matemáticas, especialmente, en la resolución de problemas matemáticos. Coherentemente con lo anterior, en esta sección se aborda concretamente la teoría sustantiva de esta investigación, a saber, el Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, EOS, atendiendo al diálogo fundamental entre el sujeto socioepistémico con la comunidad académica o institucional que regula su actividad matemática, que implica una manipulación constante de objetos matemáticos.

2.3.1. En el ámbito matemático

Para empezar, el EOS manifiesta que este sujeto socioepistémico posee un acervo cognitivo, compuesto de "saberes del plano personal, que incluyen conocimientos subjetivos, creencias; así como de saberes del plano institucional, los cuales son objetivados institucionalmente; siendo la actividad matemática producto de la integración de ambos tipos de saberes" (Godino, 2012, p. 26). Cabe mencionar que esta composición dual, institucional y personal, de la actividad matemática, es el fundamento medular del Enfoque Ontosemiotico de la cognición e instrucción matemática (Godino & Batanero, 1994; D´Amore & Godino, 2007; Godino, Batanero & Font, 2008; Godino, Gonzato, Cajaraville & Fernández, 2012; Godino, Neto, Wilhelmi, Ake, Etchegaray & Lasa, 2015; D´Amore & Fandiño, 2017; Godino, 2017; Godino, Giacomone, Batanero & Font, 2017; Breda & Font, 2018).

En palabras del mismo Godino et al. (2015), el significado personal e institucional de un objeto matemático se entiende como "un sistema de prácticas operativas y discursivas realizadas por una persona o en el interior de una institución para resolver un campo de problemas" (p.35). Estas prácticas operativas y discursivas se refieren toda actuación con los objetos matemáticos implicados, ya sea en el registro semiótico verbal, gráfico, algebraico, en lenguaje natural o aritmético, que efectúa un sujeto, para resolver problemas, comunicar a otros la solución obtenida, validarla institucionalmente o generalizarla a otros contextos o tipos de problemas matemáticos (Godino & Batanero, 1994). De esta manera, es de especial importancia para el EOS, conocer todo un sistema general de prácticas, tanto personales como institucionales en la manipulación de objetos matemáticos, que evidencian las personas cuando resuelven problemas matemáticos.

Esta concepción personal e institucional es fundamental para definir cualquier objeto matemático, por cuanto la emergencia de los constructos matemáticos, ocurre, precisamente, en la interrelación de concepciones personales e institucionales. Un ejemplo de ello, es el significado del objeto media aritmética, el cual, según el EOS es un "sistema de prácticas que realiza una persona, compartido en el seno de una institución, para resolver un tipo de situaciones problema en las cuales se requiere encontrar un representante de un conjunto de datos" (Godino, 2017, p. 24)

Hasta aquí, podría decirse que el referente teórico del EOS, tiene un enfoque didáctico del diálogo socioepistémico del sujeto, explicado mediante los objetos, conceptos de plano institucional de la actividad matemática y a través de la definición misma de sus prácticas o acciones mentales. Así, según el EOS el sujeto organiza los significados y conceptualizaciones institucionales previas, en relación a su propio proceso cognitivo, es decir, tiene en cuenta el aspecto intuitivo que da sentido a la experiencia o razón y los aspectos lógico formales e institucionales de la matemática, para la resolución de problemas matemáticos (Godino & Batanero, 1994).

Para finalizar, el hecho de centrar la atención sobre los objetos matemáticos, sin someterlos a crítica, aunque aceptando que son emergentes en la actividad matemática, es lo que permite denominar al presente análisis de la construcción de conocimiento y resolución de problemas como ontológico. Asimismo, dado que dichos objetos

matemáticos son estudiados a partir de sus registros y representaciones semióticas, se justifica la acepción semiótica de este enfoque.

En la siguiente sección se explican los conceptos centrales del EOS no explicados anteriormente, tales como objeto, concepto, registro semiótico, practica significativa, problema matemático, resolución de problemas, plano institucional, plano personal.

2.3.1.1. Objeto

En cuanto al concepto de objeto matemático, para Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017) es “todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas” (p.16). Asimismo, D´Amore (2016) afirma que un objeto matemático es "cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos, o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo" (p.8). Además, según Godino (2017), los objetos matemáticos se clasifican en “lenguaje, situaciones, procedimientos, conceptos, propiedades y argumentos” (p 20).

Concretamente, cada clasificación implica una serie aspectos claramente definidos en la construcción de conocimiento matemático. En primer lugar, Según Godino, Batanero y Font (2008), cuando habla de lenguaje se refiere a “términos, expresiones, notaciones o gráficos en diferentes registros, tales como el escrito, oral, gestual, entre otros” (p.15); en segundo lugar, las situaciones se refieren a “problemas, aplicaciones extramatemática, ejercicios; en tercer lugar, los procedimientos indican operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo” (p.16); en cuarto lugar, los conceptos se refieren a “definiciones o descripciones, como recta, punto, número, media o función” (p.16); en quinto lugar, las propiedades son los “enunciados sobre conceptos” (p.17), y por último, “los argumentos se refieren a entes de las distintas clasificaciones de los objetos matemáticos que son utilizados para validar o explicar los enunciados por deducción o de otro tipo” (p.18).

Ahora bien, estos objetos matemáticos se interrelacionan entre sí mediante una función semiótica. Por esta razón, en la siguiente sección se conceptualiza y explican las características de estas.

2.3.1.2. Función semiótica entre objetos matemáticos

La función semiótica entre objetos matemáticos es una relación que se establece desde el plano personal o institucional, entre lo que Hjemlev (citado en Godino, 2012) llama "un antecedente, expresión, significante o representante, y un consecuente, contenido, significado o representado, que establece un sujeto, persona o institución, de acuerdo con cierto criterio o código de correspondencia, según las circunstancias fijadas" (p. 12).

Esta función o correspondencia, entre significante y significado en el EOS son de tipo representacional, instrumental y estructural. Godino (2012) y D´Amore (2012), la explican así: "Representacional, un objeto se pone en lugar de otro para un cierto propósito; instrumental, un objeto usa a otro u otros como instrumento, y estructural, dos o más objetos componen un sistema del cual emergen nuevos objetos" (p.21).

Cabe mencionar que el mencionado papel de significante y significado es amplio, dado que incluso, objetos tales como situaciones problema, procedimientos, conceptos, propiedades y argumentos pueden ser también, en determinado momento significante o significado en la función semiótica. Peirce (citado en Godino, Batanero & Font, 2008) así lo señala

> Signo es cualquier cosa que determina a alguna otra, su interpretante, para que se refiera a un objeto al cual ella misma se refiere, su objeto, de la misma manera; el interpretante se convierte a su vez en un signo, y así ad infinitum. (p. 23)

REPOSITORIO

Concretamente, Según Godino et al. (2015), la función semiótica de la que se viene hablando, "se produce cuando entre dos objetos matemáticos, sean ostensivos o no, se establece una dependencia representacional o instrumental, donde uno de los objetos es el significante, instrumento, o hace parte de la estructura de otro objeto" (p.19). Así, esta idea de función semiótica evidencia el carácter asociativo constante de la actividad de creación, comunicación e inferencia matemática, utilizados en la resolución de problemas matemáticos. La constante representacionalidad de objetos matemáticos, asignada por la función semiótica ofrece ventajas tales como "formular en términos semióticos y de un modo general y flexible el conocimiento matemático y explicar en términos de conflictos semióticos las dificultades y los errores de los estudiantes" (Godino, et al., 2015, p.23).

En el marco del pragmatismo de los objetos matemáticos, según Wittgenstein (citado en Godino, 2007) dicha función semiótica depende *de lo*s elementos contextuales que relativizan los significados de los objetos matemáticos. Asimismo, lo anotado por Wittgenstein sobre la dependencia de la función semiótica de los elementos contextuales para asignarle a los objetos matemáticos un significado relativo, permite articular al currículo, un componente referencial que determina el aprendizaje, comprensión y expansión del conocimiento matemático y en general en la resolución de problemas. Este hecho es explicitado por Godino (2007) de la siguiente manera

> Saber, conocer y comprender un objeto O, ostensivo o no, concreto o abstracto, por parte de un sujeto X, persona o institución, se interpretan en términos de las funciones semióticas que X puede establecer en unas circunstancias fijadas, donde se pone en juego O como funtivo, expresión o contenido. Cada función semiótica implica un acto de semiosis por parte de un agente interpretante y forma un conocimiento. (p. 21)

Entonces, queda claro que en la resolución de problemas algebraicos, los objetos matemáticos, dada una circunstancia o contexto problémico donde están presentes, tienen

una función semiótica relativa a este, la cual le asigna un significado según sea la situación. Esto se constituye en uno de los elementos que le permiten al sujeto, comprender el problema, resolver problemas matemáticos y el aprendizaje, es decir, aumentar su conocimiento.

Ahora bien, la noción de función semiótica, al igual que una función matemática, puede entenderse como una correspondencia entre conjuntos, estructurada con un objeto de entrada al que, generalmente, se le denomina signo, una regla de correspondencia u operador aplicado a dicho signo, y un significado obtenido de la regla de correspondencia anterior. Sobre el aspecto más importante de la función semiótica, esto es, el criterio o regla de correspondencia, para Godino (2012), se refiere un código interpretativo que regula la correlación entre el representante y representado, estableciendo el aspecto o carácter del contenido referido por la expresión.

En relación sobre cómo opera dicha regla de correspondencia o código interpretativo de la función semiótica, para Eco (citado en Godino, 2012),

> La correlación entre expresión y contenido se establece de modo convencional, lo que no quiere decir arbitraria, sino que es coextensiva de vínculo cultural. […] la correlación semiótica no debe ser entendida como sustitución de lo idéntico por idéntico. En cambio el signo es siempre lo que se abre a algo distinto. No existe interpretante alguno que, al aclarar el signo que interpreta, no desplace, al menos mínimamente, sus límites (p. 72).

Lo anterior indica que, en la configuración de significado que posibilita la regla de correspondencia, existe una articulación del plano personal, institucional, incluso social, de donde se infiere que la función semiótica está determinada por los componentes de la cultura.

2.3.1.3. Tipos de funciones semióticas

PREPRINT

De acuerdo a la naturaleza de los objetos matemáticos entran y salen de la regla de correspondencia, las funciones semióticas pueden clasificarse en los siguientes tipos: de significado lingüístico, de significado situacional, de significado conceptual, de significado actuativo y de significado argumentativo (Aznar, Baccelli, Figueroa, Distéfano & Anchorena, 2016).

En primer lugar, en las funciones semióticas de significado lingüístico, tanto en objeto matemático que entra, como el que sale, son elementos lingüísticos, es decir, pertenecen cualquiera de los registros semióticos de Duval (2016): natural, icónico, aritmético o algebraico. Por ejemplo, sea el objeto "n!", que entra a la función semiótica. Si el objeto de salida es la expresión "n(n-1) (n-2)...1", entonces, puede decirse que la función semiótica aplicada es de tipo lingüístico, pues ambos objetos pertenecen a registros lingüísticos (Godino, 2012).

En segundo lugar, las funciones semióticas de significado situacional son aquellas en el que el objeto de entrada es una situación fáctica, propiamente dicha, y la final, es una representación lingüística de la misma (Godino, 2010). De hecho, todos los problemas que se leen en su descripción natural, gráfica, etc., son objetos matemáticos de salida, provenientes de un problema empírico, que fue representado a través de dichos registros semióticos.

En tercer lugar, las funciones semióticas de tipo conceptual, son aquellas, cuyo objeto matemático de entrada es un concepto, y el de salida, su definición o significado institucional. Por ejemplo, dado el concepto de entrada "ángulo" y el concepto de salida "par de semirrectas que tienen el mismo origen", puede decirse que ha intervenido una función semiótica de tipo conceptual (Godino, 2017). A su vez, de las funciones de tipo conceptual, se derivan las de tipo proposicional, cuyo objeto de entrada es un concepto, y el de salida, es una propiedad del mismo. Por ejemplo, dado el concepto de ecuación, como objeto de entrada, y la propiedad de simplificación de las ecuaciones, como objeto de salida, puede decirse que se ha aplicado una función de tipo proposicional (Godino, 2017).

En cuarto lugar, las funciones semióticas de tipo actuativo, son aquellas cuyo objeto de entrada es una expresión, al que corresponde una acción, operación, procedimiento o

algoritmo, como objeto de salida (Godino et al., 2015). Por ejemplo, la expresión 3x+2x está indicando un algoritmo que se debe ejecutar.

Por último, las funciones semióticas de tipo argumentativo, son aquellas cuyo objeto de entrada es una expresión de tipo proposicional, y el objeto de salida, la demostración, explicación y justificación de la misma, sea de forma rigurosa o no. Por ejemplo, dada la proposición 2(x+3) = 2x+6, si se le aplica una función semiótica de tipo argumentativo, se obtiene como objeto de salida, una justificación o explicación de los motivos que permiten realizar dicha afirmación (Godino, 2012).

Ahora bien, según las practicas matemáticas en que son utilizados, los objetos matemáticos que estructuran los tipos de funciones semióticas ya mencionados, pueden categorizarse a partir de las siguientes facetas o dimensiones duales, según Godino (2002)

Número	Tipo de objeto	Definición	Ejemplo
1	Personal	Son todos los conceptos, representaciones, registros, pensamientos, etc., que pertenecen a un sistema de prácticas matemáticas, propio de una persona cuando resuelve problemas.	Los constructos obtenidos del análisis de casos particulares de un problema, basado en una experiencia pasada, para plantear una ecuación
	Institucional	Son todos los conceptos, representaciones, registros del sistema de prácticas personales que son compartidos en el seno de una institución.	El uso de las leyes de la equivalencia para resolver una ecuación
2	Ostensivo	Es una representación perceptible o marca, que puede ser un gráfico, símbolo, de tipo oral, textual o gestual, que representa un objeto	. x ( )
	No ostensivo	Son los objetos evocados por su representación ostensiva, tales como conceptos, definiciones, axiomas, operadores, los cuales se perciben a través de las marcas ostensivas.	Algoritmo procedimental de multiplicación
3	Extensivo	Es la expresión particular de cierto	3, 6, 9

		objeto matemático	
4	Intensivo	Es la expresión que generaliza todos los casos extensivos de cierto objeto matemático	3x
	Expresión	Son los objetos matemáticos, antecedentes de una función semiótica	Sea J el dinero de Juan y C, el dinero de Carlos. Si juan le regala 100 pesos a Carlos, ambos tendrían la misma cantidad de dinero.
	Contenido	Son los objetos matemáticos, producto de aplicarle una función semiótica al objeto antecedente	J-100= C+100
5	Unitario	Son los objetos matemáticos que en determinado contexto, no necesitan descomponerse, se asumen como entidad fundamental de análisis.	La representación algebraica de cierta expresión del enunciado de un problema algebraico
	Sistémico	Son los objetos matemáticos que en determinado contexto, es necesario descomponerlos en entidades fundamentales.	El enunciado de problema algebraico

Tabla 7. Tipos de objetos matemáticos

Fuente: Adaptado de Godino (2012).

2.3.1.4. Concepto en el marco del EOS

Con relación a los conceptos matemáticos, debe comenzar precisándose que la expresión "concepto" tiene su origen etimológico del latín conceptus, proveniente de concipere, el cual según D´ Amore (2012) "tiene una clara referencia al resultado del acto de la concepción o generación de la mente en su alejarse de la inmediatez de las impresiones sensibles y de las representaciones particulares y en su llegada a una significación universal" (p. 16).

En esa línea, para Vergnaud (2016), concepto "es el signo del objeto por lo que se halla con él en relación de significación" (p.20). Sobre la función del concepto, Godino (2012) menciona que la de tipo instrumental lo designa como "un instrumento para clasificar los datos en el modo más económico posible, para organizar los datos de la

experiencia en manera tal de poder establecer entre ellos conexiones de carácter lógico" (p.17).

Respecto al aprendizaje de conceptos en la escuela, Lausmeier, Gathala y Frayer (citado en Godino & Batanero, 1994), lo dividen en los niveles concreto, de identidad, de clasificación y formal. Lo anterior indica una trazabilidad implicada en la formación del concepto en el desarrollo cognitivo: en el nivel concreto el niño reconoce en tiempos distintos el mismo objeto físico en el mismo contexto; en el nivel de identidad, el niño reconoce en tiempos distintos el mismo objeto físico, en diferente contexto; en el nivel de clasificación: el niño reconoce aspectos en común que tienen dos o más objetos y los utiliza como un criterio más general de clasificación de los mencionados objetos quizá de forma no consciente; por último, en el nivel formal, el niño es consciente de la clasificación que ha realizado en el nivel anterior y le asigna un nombre o concepto a la clase generada (D´Amore, 2012).

Lo anterior indica que los conceptos están interrelacionados en categorías, en forma jerárquica en la que cada concepto funciona como hipónimo de una clase más general y a la vez, hiperónimo de una clase más específica. Esta idea se refuerza con lo señalado por Cornu y Vergnioux (citado en Duval, 2016) cuando afirman que "el aprendizaje de un concepto aislado es imposible, dado que todo concepto se halla en correlación, con otros. Se debe hablar entonces de tramas o categorías conceptuales" (pp. 55-56).

Además, Vergnaud (2016), afirma que los conceptos se encuentran "definidos e incorporados en un contexto o en un sistema" (p.16), por lo que, independientemente del grado de generalidad o de abstracción, siempre existe un marco de referencia, una red de relaciones: "los conceptos necesariamente existen al interior de un framework conceptual" (p.23). Esto indica que los recursos cognitivos o saberes previos que habla Schoenfeld (citado en Barrantes, 2006) se encuentran estructurados de esa forma.

Entonces, para lograr el aprendizaje efectivo de un concepto es necesario incluirlo en un mapa de conocimientos asociados a este. Para entender mejor este asunto D´Amore (2012) propone el siguiente ejemplo: en la experiencia de un niño de un año, la palabra "bola" está asociado al lugar o lugares donde la observó, a las actividades que él u otros sujetos hicieron con dicha "bola" y otras características funcionales obtenidas a partir de la

experiencia con ella. De esta manera, la palabra bola "se encuentra integrada a una serie de relaciones de esta con otros elementos de un contexto determinado, lo cual afecta consecuentemente el concepto de bola que tiene el niño" (p.31).

Es de notar que esta formación conceptual crecerá con el tiempo a medida que adquiera nuevas experiencias o por razón pura, es decir, agregará otros atributos, funciones, de modo que dicho concepto, según Vergnaud (2016)

> podrá contener elementos funcionales, relacionales, perceptivos, descriptivos, incluso el término que lo designa, tanto individual como colectivamente, lo cual se relaciona con los script o marcos de referencia más amplios al interior de los cuales se pueden colocar y situar estos conceptos en las varias fases en las que evolucionan y se presentan (p.17)

Así, en la trazabilidad de la formación conceptual se habrá llegado al clímax, cuando el niño, en la fase formal clasifique un concepto por sus características identificables, de manera que las constituye en criterio para asignarle el mismo concepto a otro objeto que cumpla con dichas características.

El hecho de que los conceptos hagan parte de esquemas o categorías clasificatorias en los recursos cognitivos es especialmente importante para la resolución de problemas, puesto que de allí, es que estos seleccionan la información necesaria para llegar a buen término. En consonancia con esto, la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (citado en Campos, 2006) manifiesta que

> la dificultad de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos está dada en términos de esquemas que se necesita analizar la elección de los datos por usar así como la elección de las operaciones, especialmente cuando existan más elecciones posibles, incluso los procedimientos heurísticos no serían otra cosa más que esquemas. (p.33)

Es de notar que para Vergnaud, una serie de conceptos o red conceptual, pueden ser integrados mediante un esquema heurístico, que permita integrar los recursos cognitivos asociados a los conceptos que la componen, para solucionar de manera eficaz los problemas algebraicos.

Dicho esquema tiene unos referentes teóricos implícitos que rigen los procedimientos y procesos en el esquema, los mismos que Vergnaud (citado en Campos, 2006) llama "conceptos en acto y teoremas en acto, constituyentes de los esquemas operatorios" (p.35). Este mismo autor considera importante el papel del sujeto en las formas de elaboración de sus esquemas.

Así, en el evento en el que un sujeto se enfrenta a un problema matemático o algebraico, puede ocurrir dos clases de situaciones:

> 1) Aquellas para las cuales el sujeto dispone en su repertorio de competencias necesarias para el tratamiento relativamente inmediato de la situación; 2) aquellas para las cuales el sujeto no dispone de todas las competencias necesarias, lo que le obliga a un tiempo de reflexión y de exploración, de dudas, tentativas abordadas, y le conduce eventualmente al éxito o al fracaso. (Vergnaud, 2016, p.58)

Según Vergnaud (1990), el concepto de esquema se aplica fácilmente al primer tipo de situaciones y de manera menos definida, al segundo tipo. De esta manera, el esquema permite establecer una serie de procesos o procedimientos constantes que pueden aplicarse a diferentes situaciones problémicas, en función de sus características.

Respecto a la estructura del esquema, Vergnaud (1990) plantea que se componen de invariantes operatorios, anticipaciones del fin a lograr, reglas del tipo si x, entonces y, e inferencias. Al respecto, plantea que los invariantes operatorios o conceptos y teoremas en acto, "son los elementos pertinentes de la situación e información del problema matemático

que el sujeto reconoce para empezar el proceso de resolución del problema matemático" (p.53). Asimismo, las anticipaciones del fin a lograr, se refieren a los efectos e indicadores intermedios que muestran que se va en el camino correcto, tales como las reglas de acción del tipo si "x" entonces "y", que el sujeto se plantea, para decidir en determinado momento el rumbo de su proceso de resolución. Por último, las inferencias permiten avanzar metódicamente en los pasos de solución al problema, a partir de la información del sistema de invariantes operatorios del sujeto y de los acumulados hasta el paso en el que se requiere realizar la inferencia (Vergnaud, 1990).

Además, es necesario precisar el papel de los conceptos en el momento en que son utilizados para resolver un determinado problema matemático o algebraico, es decir, su aplicación concreta una vez ingresa al esquema heurístico, designándolos como invariantes operatorios, en tanto, al pertenecer a un esquema, toman la forma de procedimientos constantes independientemente del problema abordado (Vergnaud, 2016). Para el mencionado autor, existen tres tipos de invariante operatorio

> invariantes del tipo proposición, aquellos que pueden ser verdaderos o falsos; invariantes del tipo función proposicional, con la que podemos entender una expresión que contiene una o más variables individuales tales que, cuando en el lugar de estas se ponen constantes individuales, se obtiene una proposición; invariantes del tipo argumento, pueden ser objetos, relaciones, proposiciones, funciones proposicionales. (p.65)

Dadas las aproximaciones anteriores a las propiedades, características o funciones del "concepto" en el esquema heurístico, en la teoría de los campos conceptuales, Vergnaud (citado en Campos, 2006) propone definir concepto en la interacción de 3 conjuntos así:

> C = (S, I, S) donde S es el conjunto de las situaciones que dan sentido al concepto, el referente; I es el conjunto de los invariantes sobre los que se basa la operatividad de los esquemas, el significado; S es el conjunto de las formas lingüísticas y no

> lingüísticas que permiten de representar simbólicamente al concepto, sus procedimientos, las situaciones y los procedimientos de tratamiento, la representación. (p.29)

Según Vergnaud, todo estudio y desarrollo o progresión conceptual al interior del esquema heurístico para solucionar problemas, requiere considerar estos tres conjuntos de forma individual y en relación recíproca (D' Amore ,2012). Sin embargo, el desarrollo de los conceptos, es decir, su significado al interior de estos tres conjuntos, debe ser más riguroso, a la manera de Dumet (citado en Godino, 2017), en el sentido en que el código lingüístico usado debe delimitar por definición una serie de aspectos aprehensibles de determinado concepto.

En relación con la noción de campo conceptual, el mismo autor se refiere a este como un conjunto de situaciones junto con los conceptos y teoremas que se ponen en juego en la solución de tales situaciones. Así, "si la primera entrada de un campo conceptual es la de las situaciones, se puede también identificar una segunda entrada, la de los conceptos y los teoremas" (Vergnaud, 1990, p. 147). En esa línea, un ejemplo de campo conceptual según el mencionado autor son las estructuras aditivas, pero implica también "las situaciones problémicas que implican la adición o sustracción, así como los conceptos y teoremas que permiten resolver las situaciones problemicas" (p.151).

Es de notar que la noción de campo conceptual implícita conceptos epistémicos, de tipo institucional y conceptos cognitivos de tipo personal. Estos hacen referencia a los procedimientos y algoritmos de solución justificados por sustentos teóricos, similares a las praxeologías que concibe Chevallard (citado en Godino & Batanero, 1994), es decir, el saber y saber hacer emergente en la resolución de problemas matemáticos. Sobre la noción de conceptos cognitivos de tipo personal, Vergnaud (1990) se refiere a esta como la relación que establece el sujeto entre una situación problémica específica y sus invariantes operatorios, es decir esquemas mentales como significantes. De esta forma, a determinada situación, que es un objeto concepto matemático, el sujeto le hace corresponder otros objetos conceptos dentro de esquemas o significantes, es decir, conceptos en sentido cognitivo o los llamados conceptos o teoremas en acto del sujeto. Así, las situaciones o

enunciaciones de problemas matemáticos son asociadas por el sujeto a un esquema personal que incluye praxeologías personales e institucionales para su resolución respectiva.

No obstante, dichos conceptos matemáticos, desde el plano personal se asemejan más a concepciones (Godino & Batanero, 1994; Vergnaud, 2016). Desde esta perspectiva, la concepción puede referirse a la totalidad de la estructura cognitiva del sujeto en un momento dado en relación a un objeto matemático. En este caso, una concepción representa un "concepto subjetivo", según Godino et al. (2015), o praxeologías del sujeto, entendiendo éste en términos de la tripleta de Vergnaud (2016), a saber, situaciones, invariantes y significantes, puesta en juego en la resolución de las diferentes situaciones problémicas. Al respecto, Antibi y Brosseau (citados en Godino et al., 2015) dicen lo siguiente

> Una concepción está determinada por un conjunto relativamente organizado de conocimientos utilizados con bastante frecuencia, y conjuntamente, sobre un conjunto de situaciones (para el cual son pertinentes, adecuados, útiles, etc.), y que se manifiestan mediante un repertorio relativamente estable y limitado de comportamientos, lenguajes, técnicas, etc. (p. 20)

Estas concepciones concuerdan con lo que Schoenfeld (citado en Barrantes, 2006) llama recursos cognitivos del sujeto, que son evocados o tienen un carácter evocable según el contexto o situación problémica dada. Sin embargo, dada la ausencia de una estrategia de tipo epistémico que permita evocar todos los recursos cognitivos asociados a esta situación, dichas concepciones son consideradas únicamente como entidades mentales y, por lo tanto, no susceptibles de generalización a colectivos sociales (Vergnaud, 1990).

Desde un enfoque antropológico, la concepción, que depende los recursos cognitivos incluyen las destrezas, habilidad lógica e inferencial del sujeto, si estos elementos son lo suficientemente amplios, es decir, las praxeologías o conocimientos sobre el saber y saber hacer del sujeto permiten afrontar con éxito un determinado problema

algebraico, los objetos matemáticos de su concepción equivaldrían a los objetos no ostensivos de los que habla Godino y Batanero (1994) referente a las practicas personales inscritas en un marco institucional. Entender estos estos aspectos son de especial importancia desde el punto de vista didáctico, dado que el estudiante debe saber cuáles son los aspectos que componen la significación de un concepto, o que puede aprehender de este a partir de su concepción (D´Amore, 2012).

Para finalizar, es importante hacer énfasis en la importancia del uso del concepto correspondiente a determinado objeto, para la resolución de problemas algebraicos y, en general, en la resolución de problemas algebraicos. Si bien, lo que se estudia son objetos matemáticos, la paradoja cognitiva de Duval (2016) señala que la única forma de hacerlo es a través de conceptos. A pesar de hablarse constantemente a objetos matemáticos, en realidad la estructura ontosemiótica en la resolución de problemas algebraicos se avanza a través de la aplicación de funciones semióticas a los conceptos que son los significados de dichos objetos, asumiéndose que cada objeto matemático, tiene un concepto matemático semánticamente isomorfo. Son precisamente estos conceptos los que permiten realizar las actividades de transformación semiótica de tratamiento y conversión de registros, para avanzar procesualmente en la resolución de problemas matemáticos.

En la siguiente sección se expone el significado de registro semiótico, como objeto de estudio del EOS, y su papel en la resolución de problemas matemáticos, especialmente, algebraicos.

2.3.1.5. Registro semiótico

Para Duval (2016), los objetos matemáticos tienen diferentes registros semióticos, tales como: registro verbal, registro tabular, registro gráfico, registro algebraico, registro simbólico y registro figural, en cada uno de estos existen múltiples representaciones semióticas. Por lo tanto, registro semiótico hace referencia a las categorías de representaciones que puede tener un mismo objeto o concepto matemático.

Duval (citado en García & Perales, 2006) menciona que el estudiante debe aprender a crear representaciones diversas de un objeto matemático, y no caer en la falacia que la representación es igual al objeto concepto matemático. Para ello, los estudiantes deben comprender la semiosis de los objetos matemáticos, para producir representaciones diversas, así como la noesis para aprehender conceptualmente los objetos representados, incluyendo todos los procesos cognitivos y metacognitivos del sujeto.

Según Duval (citado en Ospina, 2012) existen por lo menos dos características de la acción cognitiva involucrada en las habilidades matemáticas que son: la variedad de registros de representación semiótica y el uso del razonamiento matemático sobre los conceptos, como movilizadores de las inferencias matemáticas, a partir de su interpretación.

Del mismo modo, Duval (2004) señala que los sistemas semióticos deben permitir cumplir las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación

> 1. Construir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado, 2. Transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales, y 3. convertir las representaciones producidas en un sistema de representaciones en otro sistema, de manera tal que éstas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado. (p. 45)

Respecto a la variedad de registros de representación, Duval (2004) señala que los objetos matemáticos tienen diferentes registros de representación, tales como: "registro verbal, registro tabular, registro gráfico, registro algebraico, registro simbólico y registro figural" (p. 52). Según Duval (2016) "se ha adquirido un concepto determinado, cuando se es capaz de transitar entre por lo menos dos diferentes representaciones semióticas del concepto mismo" (p.11). Además, la construcción de los conceptos matemáticos,

PREPRINT

> depende estrechamente de la capacidad de usar más registros de representaciones semióticas de esos conceptos: 1) de representarlos en un registro dado 2) de tratar tales representaciones al interior de un mismo registro 3) de convertir tales representaciones de un dado registro a otro. (Duval, 2016, p. 12)

Por todo lo anterior, es importante integrar los diferentes registros representacionales de un mismo objeto matemático, realizar procesos de tratamiento y conversión de representaciones de objetos o conceptos matemáticos, mediante la función semiótica, teniendo en cuenta la clasificación de dichos objetos, de acuerdo con la concepción introspectiva de cada estudiante al estilo de Vergnaud (1990), para resolver problemas algebraicos, desde la teoría del EOS.

Ahora bien, dichos registros semióticos son producidos por un sujeto en la resolución de un problema, si este lo ha utilizado exitosamente en problemas anteriores, es decir, si ha tenido prácticas significativas en dicho proceso. En la siguiente sección se explica este concepto.

2.3.1.6. Práctica significativa

Desde la perspectiva del EOS, el desarrollo de la actividad matemática, llevada a cabo por las personas comprometidas en la resolución de problemas, no consiste, habitualmente en un proceso lineal y deductivo. Más bien, es muy probable que el sujeto ejecute intentos fallidos, ensayos, errores y procedimientos infructuosos que se abandonan (Godino & Batanero, 1994). De manera concreta, una práctica personal es significativa si, para la persona,

> Esta práctica desempeña una función para la consecución del objetivo en los procesos de resolución de un problema, o bien para comunicar a otro la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas. Las prácticas

> significativas se corresponden con la noción de organización invariante de la conducta para una misma clase se situaciones dadas. (Godino & Batanero, 1994, p. 136)

De esta forma, las prácticas significativas son de importancia prioritaria, porque orientan al sujeto en los procesos típicos que debe aplicar para resolver problemas algebraicos. Dichas prácticas surgen de la articulación e integración de objetos institucionales y personales que serán explicados en la siguiente sección.

2.3.1.7. Objeto institucional

Según Godino, Batanero, Font y Giacomone (2016), el objeto institucional es

> Un ente emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas, progresivo a lo largo del tiempo, toda vez que, en un momento dado es reconocido con cierta configuración por la institución, pero, puede sufrir transformaciones progresivas, según se va ampliando el campo de problemas o situaciones asociadas a él. (p.67)

Un ejemplo de estos objetos son las definiciones, axiomas, y teoremas, que constituyen manifestaciones lingüísticas que en la cultura matemática suelen tomarse como elementos que determinan esta clase de objetos, describiendo el procedimiento constructivo del mismo o sus propiedades características.

2.3.1.8. Objeto personal

PREPRINT

El proceso de resolución de problemas se nutre, tanto de objetos institucionales, como personales, en un sistema de prácticas personales significativas. Concretamente, es un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas, constituyentes en el conocimiento subjetivo y progresivo a lo largo de la historia del sujeto, como consecuencia de la experiencia y el aprendizaje. Estos objetos son los constituyentes del conocimiento subjetivo (Ernest, citado en Godino, Batanero, Font & Giacomone, 2016).

Cabe destacar que la comprensión de un sujeto en un momento dado difícilmente será total o nula, sino que abarcará aspectos parciales de los diversos componentes y niveles de abstracción posibles. De hecho, esta investigación toma la posición de Glasersfeld (citado en Godino, Gonzato, Cajaraville & Fernández, 2012) cuando afirma:

> El proceso de acomodación y ajuste del significado de las palabras y expresiones lingüísticas continúa, de hecho, para cada uno de nosotros a lo largo de nuestras vidas. No importa el tiempo hemos utilizado un significado institutional o personal de los objetos matemáticos, siempre habrá una ocasión en la que nos demos cuenta que, hasta cierto punto, se ha usado una palabra, con algún aspecto idiosincrático. (p. 133)

En ese sentido, la noción de objeto y significado personal es compatible con la expuesta por Vergnaud (1990): "El sentido de la adición para un sujeto individual es el con junto de esquemas que puede poner en práctica para tratar las situaciones a las cuales es confrontado, y que implican la idea de adición" (p. 158). Por lo tanto, es innegable la conexión concepto contexto subyacente no solo en las prácticas con objetos personales, sino institucionales.

2.3.1.9. Significado institucional y personal de un objeto

PREPRINT

En primer lugar, el significado de un objeto es el producto obtenido de ciertas prácticas intensivas, es decir, de generalización, que se consideran como definiciones del objeto, incluso haciendo metonimia al mismo. No obstante, desde el punto de vista psicológico y didáctico, el significado de un objeto matemático no se reduce a su mera definición, lo cual indica que siempre es posible encontrar más atributos o conceptualizaciones, sobre el objeto matemático primitivo. Esta manera de entender los objetos y su significado supone que la institución o la persona dispongan de prácticas con respecto al campo de experiencia que el objeto abarca (Godino & Batanero, 1994; Vergnaud, 1990).

Respecto al significado de los objetos, para Vergnaud (1990) y Godino (1994), este emerge a partir del contexto o situación en donde entra en actividad, respecto al sujeto que lo observa. No obstante, una vez construido, está en un plano de abstracción más general que cualquier contexto, puesto que el sentido o significado está más allá de las situaciones y de los símbolos que lo representan. Por lo tanto, la significación de un objeto emerge de la relación del sujeto con las situaciones y la actividad del objeto en dichas situaciones. Así, en un momento determinado, un sujeto tendrá dos opciones ante sí: recordar el significado ya aprendido del objeto, o recrearlo, a partir de las situaciones que lo activan (Vergnaud, 1990, Godino y Batanero, 1994).

En ese sentido, desde una perspectiva institucional, un objeto matemático es el producto de un sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas donde dicho concepto entra en actividad en un momento dado. Se trata de un constructo relativo a la institución y relativo al momento histórico. Asimismo, la noción de significado personal, en correspondencia con la de significado institucional, se define como el producto de un sistema de prácticas personales de una determinada persona, para resolver el campo de problemas del que emerge un objeto matemático en un momento dado, en diversos contextos. De esta manera, es dependiente del sujeto, y de las variaciones susceptibles de hacerse en el tiempo.

Ahora bien, se debe precisar que el significado como tal, observable, es una parte del mismo, pues también existe otra dimensión del mismo, referida a las acciones

cognitivas interiorizadas, que permiten configurar el constructo observable del significado (Godino, 2017).

Desde esa perspectiva, puede decirse que un objeto matemático ha sido comprendido, cuando se es competente con él, es decir, es utilizado en diferentes prácticas matemáticas, tales como la resolución de problemas. Por ejemplo, la evocación del concepto de promedio en problema que no alude directamente a dicho objeto, así como su uso contextual, indicarían que, en efecto, el concepto de promedio, ha sido comprendido. No obstante, como se dijo anteriormente las situaciones no agotan los significados del concepto, y por tanto, la comprensión del mismo. Por lo tanto, "la comprensión difícilmente será o total, o nula, sino que abarcará aspectos parciales de los diversos componentes y niveles de abstracción posibles" (Godino y Batanero, 1994).

Con fundamento en lo anterior, en el marco del EOS, un problema matemático viene dado en uno de los siguientes registros: natural, gráfico, aritmético, algebraico u otros registros producto de la abstracción del anterior. Respecto a la forma verbal, existe una combinación del lenguaje ordinario y el específico, mediante los cuales, se describen otros objetos no lingüísticos, tales como situaciones, es decir, "problemas más o menos abiertos, aplicaciones extra matemáticas o intramatemáticas, ejercicios" (Godino, 2012). Estos objetos demandan del sujeto, de forma no lineal, una serie de definiciones, conceptos, axiomas, teoremas, propiedades, corolarios; para argumentar, justificar, validar y explicar la ejecución de procedimientos, tales como operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo , así como los argumentos que se usan para validar y explicar el proceso de resolución.

Aplicando lo anteriormente mencionado a la resolución de problemas matemáticos, en primera instancia, el sujeto debe activar y recordar objetos matemáticos, tales como: lenguajes, situaciones, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos. Por lo general, comienza utilizando el registro semiótico natural o verbal, así como registros propiamente matemáticos, tales como el aritmético, algebraico, etc. Incluso, puede utilizar el registro icónico como una forma de visualizar las relaciones, tanto del lenguaje natural, como del lenguaje propiamente matemático. Este lenguaje corresponde a la parte ostensiva de una serie de conceptos y propiedades que son necesarios para justificar las acciones que

realizará el alumno, las cuales también se utilizan en la argumentación, implícita o explícita, realizada por el estudiante, para evaluar sus propias acciones (Font, 2005, p.114).

Teniendo en cuenta las aproximaciones dadas, en la siguiente sección, se precisan con más claridad, los conceptos de problema y resolución de problemas en el EOS.

2.3.1.10. Problema matemático

Desde la perspectiva del EOS, un problema es una circunstancia o situación, de dificultad relativa desde la perspectiva de la persona que lo aborda, a la cual le precisa y exige poner en juego actividades de matematización, tales como la búsqueda o construcción de posibles soluciones que no son accesibles inmediatamente; lo que implica, encontrar el lenguaje o simbolismo adecuado para representar las situaciones, el proceso y su resolución, comunicarlos a otras personas, a través de procesos de argumentación y justificación, así como la actividad de generalización o extrapolación de prácticas anteriores (Godino et al., 2015)

2.3.1.11. Resolución de problemas matemáticos

En el contexto del EOS, la resolución de problemas implica la comprensión inicial del registro semiótico de enunciación del problema, que toma el lugar de la situación propiamente real, representándola de forma icónica, verbal o analítica. Dicha comprensión, evoca o posibilita la construcción de conceptos, significaciones, situaciones, que se interrelacionan, justificándose en argumentos o razonamientos de tipo deductivo u otro, que se ponen en juego y se adaptan al problema, a través del uso de funciones semióticas en un proceso de diálogo epistémico entre en plano personal e institucional, mediante transformaciones de tratamiento y conversión como el eje central del proceso resolutivo. Para la operacionalización de estos, es necesario el uso de conceptos o procedimientos ya aprendidos, quizá utilizados en problemas anteriores, así como el uso de algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos y estrategias, producto del ejercicio analítico del

problema, y de la experiencia del sujeto. Así, el proceso de resolución de problemas matemáticos consiste en un proceso no lineal, de transformaciones semióticas, a través de funciones de dicha naturaleza, en el que intervienen objetos matemáticos ontosemióticamente distintos, hasta obtener la comprensión y resignificación de la estructura esquemática cognoscitiva previa del sujeto, que permita visibilizar la solución (Godino & Batanero, 1994; D´Amore & Godino, 2007; Godino, Batanero & Font, 2008; Godino, Gonzato, Cajaraville & Fernández, 2012; Godino, Neto, Wilhelmi, Ake, Etchegaray & Lasa, 2015; D´Amore & Fandiño, 2017; Godino, 2017; Godino, Giacomone, Batanero & Font, 2017; Breda & Font, 2018).

Finalmente, luego de precisar las nociones conceptuales que caracterizan las prácticas matemáticas de los sujetos, y su abstracción para dar lugar a la conceptualización de problema y resolución de problemas, en el ámbito matemático , en la siguiente sección se exponen los aportes teórico conceptuales del EOS, en torno al aprendizaje del algebra y la resolución de problemas algebraicos.

2.3.2. En el ámbito algebraico

En el EOS se propone un modelo de pensamiento algebraico en el que se distingue tres niveles de razonamiento algebraico, estableciendo criterios que permiten identificar la actividad matemática puramente aritmética, es decir, el nivel 0 de algebrización y distinguirla de los demás niveles de algebrización. De esta manera, a la actividad claramente algebraica, se le asigna un nivel tres y se establecen otros dos niveles intermedios de actividad algebraica (Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2014).

La anterior clasificación se basa en el tipo de objetos y procesos matemáticos implicados en la actividad matemática, de acuerdo con el Enfoque Ontosemiótico, EOS, del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2016; Godino, 2012). En esa línea, los niveles de algebrización se asignan a la actividad matemática que realiza el sujeto que resuelve un problema o tarea matemática, no a las propias tareas, las cuales se pueden resolver de distintas maneras, pudiendo poner en juego una actividad algebraica diferente, cuando en el enunciado de la tarea se ponen en juego

objetos algebraicos, tales como incógnitas, ecuaciones, variables, parámetros, funciones o estructuras algebraicas (Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2014).

Asimismo, dichos niveles de algebrización están basados en las siguientes distinciones ontosemióticas:

> La presencia de objetos algebraicos intensivos de un segundo grado de generalidad; el tratamiento que se aplica a dichos objetos, es decir, operaciones, transformaciones basadas en la aplicación de axiomas y propiedades de las estructuras algebraicas correspondientes y los tipos de lenguajes usados, esto es, natural, icónico, gestual o simbólico. (Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2014, p.39)

De acuerdo con lo anterior, el sentido ontosemiótico de los niveles de algebrización radica en que, se tiene en cuenta la diversa naturaleza de los objetos y procesos matemáticos que intervienen en las prácticas operativas y discursivas que realiza un sujeto epistémico, en articulación ideal de los planos personal e institucional(Godino, 2017).

En cuanto al nivel 0, se asume que se refiere a operaciones con números naturales, sin referencia simbólica alguna a cantidades desconocidas. A nivel estructural, las actividades requieren el uso de axiomas y propiedades de números reales y sus operaciones, mientras que a nivel funcional, no se reconoce generalidad, aunque se opera con los números naturales, de forma analítica sintáctica (Godino & Batanero, 1994).

Asimismo, el nivel 1 de algebrización ocurre en el primer encuentro con objetos intensivos de grado 2 cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. En dicho nivel, pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con dichos objetos. En actividades estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente. Además, en actividades funcionales se reconoce la generalidad aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico literal (Godino, Batanero, Font & Giacomone, 2016).

De otro lado, el nivel 2 de algebrización se manifiesta en la intervención de cantidades indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico literal, para referir a los intensivos de grado 2 reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal. En actividades estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax + B = C$, con A, B, C $\in$ R; A $\neq$ 0 (Godino, Batanero & Font, 2008). En actividades funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.

Por último, el nivel 3, propiamente algebraico, supone la intervención de objetos intensivos de grado 2 representados de manera simbólica literal y se opera con ellos; es decir, se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo $Ax + B = Cx + D$ con A, B, C $\in$ R; A $\neq$ 0, y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones (Godino, Batanero & Font, 2008).

En la siguiente tabla se resumen las características esenciales del nivel 0 de algebrización y los tres niveles de algebrización, descritos en Godino et al. (2014).

Tabla 8. Aproximaciones conceptuales de los niveles de algebrización

Problema: A cierta escuela están asistiendo 212 estudiantes. Por cada alumno que va en carro hay 3 que van a pie. ¿Cuántos estudiantes van en carro y a pie?

Nivel	Objetos	Transformaciones	Lenguajes
0	Intervienen objetos intensivos de primer grado en tareas funcionales Un ejemplo particular de resolución: Si de cada 3 alumnos que van andando hay 1 que va en carro, de cada 4 alumnos en total (3+1) hay 1 que va andando (la cuarta parte), por lo tanto de cada 200 alumnos, 50 irían en carro (la cuarta parte); de cada 12 alumnos 3 irían en carro. Por tanto, 53 alumnos irían en carro. La solución sería 53 alumnos van en carro mientras que el triple de 53, es decir, 159 van a pie.	Se opera con objetos intensivos de primer grado (números particulares).	Natural, numérico, icónico, gestual;

	Intervienen de manera implícita objetos intensivos de grado 2, esto es, clases de intensivos de grado 1.	Se aplican relaciones y propiedades genéricas de las operaciones con objetos intensivos de primer grado, tanto en tareas estructurales como funcionales.	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos intervinientes.

Un ejemplo particular de resolución:

1

Por cada 4 alumnos hay 3 que van a pie. Podemos plantear la siguiente proporcionalidad:

4(niños) -------- > 3 van a pie
212 (niños totales) ---------- > x van a pie

4 / 3 = 212 / x ; x= 3 * 212 / 4 ; x = 159

Una vez que obtenemos el número de los que van a pie, solo queda restar al número total de alumnos, los que van a pie, para obtener los que acuden al colegio en carro. 212 - 159 = 53 niños van en carro

2	Intervienen indeterminadas o variables como expresión de los intensivos de grado 2.	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax + B = C$x + D. En tareas funcionales se reconoce la generalidad pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.	Simbólico – literal, usado para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial y temporal.

Un ejemplo particular de resolución:

212=x + 3x; 212 = 4x; x = 212 / 4; x = 53; 53 alumnos van en carro y 212-53 = 159 van a pie

3	Intervienen indeterminadas, incógnitas, ecuaciones, variables y funciones particulares.	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax + B = Cx + D$. Se opera con las indeterminadas o variables.	Simbólico – literal; los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información del contexto.

Un ejemplo particular de resolución:

x = Alumnos que van en carro; y = Alumnos que van andando; x + y = 212; y= 3x;
x + 3x = 212; 4x = 212; x = 212/4 = 53

Fuente: Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014). Adaptado.

En la tabla anterior, se ha asociado al nivel 2 al tratamiento de las ecuaciones, cuya incógnita aparece solo en uno de los lados de la ecuación, por ejemplo, 2x +5 = 12; mientras que, el nivel 3, se asocia al tratamiento de las ecuaciones en las que la incógnita está en ambos miembros de la igualdad, por ejemplo, 3x + 4 = 2x – 14. Para llegar a ese nivel, Sfard y Linchevski (citado en Godino & Batanero, 1994) resaltan el papel crucial de

la reificación de los conceptos de ecuación y función en la progresión del pensamiento algebraico de los estudiantes, distinguiendo una primera fase en la que dichos conceptos intervienen de manera informal y operacional antes de ser reconocidos como objetos expresados de manera estructural y simbólica.

En ese sentido, es importante trabajar con los estudiantes el álgebra retórica o algebra verbal, antes de que se introduzca cualquier notación formal Sfard y Linchevski (citado en Godino, 2012, p. 19). Esta álgebra informal y operacional se corresponde, principalmente, al nivel 1. Así, este nivel posee ciertos aspectos de la actividad algebraica, y su comprensión permite el progresivo enriquecimiento de herramientas formales, para solucionar problemas con un grado creciente de generalización y simbolización hacia el nivel 3, como objetivo central en la secundaria escolar (Godino et al., 2015).

2.3.2.1. Problema algebraico

Para el EOS, un problema es una situación epistémica que coloca al sujeto epistémico, en interacción del plano institucional, frente a una situación compuesta por objetos matemáticos en una representación en un registro semiótico dado, sea natural, algebraico, aritmético, pictórico pero que debe expresarse procesualmente en otra representación (D´Amore, 2012; Duval, 2016; Vergnaud, 1990; Godino et al., 2015).

2.3.2.2. Resolución de problemas algebraicos

En términos generales, para el EOS, la resolución de problemas algebraicos es un producto del diálogo fundamental entre el sujeto socioepistémico o plano personal, con la comunidad académica o plano institucional, en la que se ponen en juego objetos, conceptos, funciones semióticas, registros semióticos escritos, orales o gestuales y prácticas significativas observables y no observables. En la trazabilidad de este proceso, se tiene un sujeto epistémico con un esquema de objetos, conceptos y procedimientos del plano propio e institucional, en diferentes registros semióticos, los cuales están interrelacionados

mediante prácticas significativas, que, ante un problema algebraico, en un proceso de transformaciones y funciones semióticas, y manifestaciones de representaciones de objetos matemáticos en diferentes manifestaciones, sea elemental, sistémico; extensivo, intensivo; ostensivo, no ostensivo; expresión, contenido, encuentra, el sujeto utiliza como mediadores, para generalizar o particularizar situaciones, en un proceso de coordinación; planificación, organización; supervisión, control; regulación y revisión, evaluación, hasta obtener una nueva representación que se constituye en la solución del problema (D´Amore, 2012; Duval, 2016; Vergnaud, 1990; Godino et al., 2015).

2.3.3. Implicaciones del enfoque en los saberes previos, en las estrategias metacognitivas y transformación semiótica

En esta sección, se presenta los conceptos y procesos del EOS, que hacen referencia a las categorías de analisis: saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica. Para ello, se toma cada categoría como tópico, y su desarrollo consta de la relación del EOS, con la categoría en cuestión.

2.3.3.1. En los Saberes previos

La teoría del EOS hace clara referencia a los saberes previos, como un acervo cognitivo del sujeto, compuesto de saberes del plano personal, que incluyen conocimientos subjetivos, creencias; así como de saberes institucionales, siendo la práctica matemática producto de la integración de ambos tipos de saberes (Godino, 2012). De esta manera, implica en los saberes previos del sujeto, conocimientos de tipo personal e institucional, de cuya articulación surge la resolución de problemas matemáticos. (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2012).

Así, la práctica matemática, se concreta con las funciones semióticas que el sujeto puede establecer, para obtener nuevas representaciones de los objetos matemáticos. Además, en esta actividad se distinguen entre las que tienen una naturaleza operatoria o

procedimental ante un tipo de situaciones-problemas, cuyo significado o sentido personal es parcial, esto es, se refiere a los subsistemas de prácticas relativos a marcos o contextos de uso determinados.

En relación con la forma en que se encuentran, según Vergnaud (2016) y Bruno D´Amore (2012), existen al interior de un framework conceptual" (p. 23), lo que implica que conforman redes conceptuales al interior de la estructura cognoscitiva del individuo o esquema heurístico, formadas por asociaciones de del contexto de donde emerge el concepto. Entre tanta información en relacionada en el esquema previo del estudiante, la dificultad de estos en la resolución de problemas matemáticos, está dada en términos de analizar la elección de los conceptos o redes conceptuales a usar, así como de las operaciones, especialmente cuando existen más elecciones posibles.

Respecto a los significados de los conceptos previos del sujeto, Vergnaud (1990), hace referencia a tres aspectos que determinan su sentido, a saber, el sentido de las situaciones previas que hacen significativo el concepto, conjunto de invariantes que constituyen el concepto, es decir, aspectos fundamentales constantes, sin importar la complementación teórica que se le haga al concepto; y un conjunto de representaciones semióticas para representarlo, sus propiedades y situaciones referidas.

2.3.3.2. En las Estrategias metacognitivas

Desde la perspectiva del EOS, las estrategias metacognitivas tienen como función tomar ciertos objetos matemáticos, tratarlos con cierta función semiótica, para transformarlos o producir otros objetos, en un proceso que puede ser de tipo representacional, instrumental y estructural (Duval, 2016).

De ese modo, las estrategias metacognitivas pueden tratar la información de forma fraccionada sintáctica y semánticamente, y de forma global. Esto se evidencia en su concepción de objetos matemáticos de tipo unitario sistémico, según el cual, en algunas circunstancias los objetos matemáticos intervienen como entidades unitarias ,que, se

supone, son conocidas previamente, y en otras como sistemas que se deben descomponer para su estudio (Godino, 2012).

Ahora bien, sea que se descompongan o se analice en el marco contextual del problema, su referencia significativa remite a un mapa de conocimientos asociados a este, de los contextos en que fueron aprehendidos. Estas asociaciones concepto significado o representado representante, al integrarse en un esquema heurístico, se constituyen en una estrategia metacognitiva para solucionar de manera eficaz los problemas algebraicos, en la medida en que permite establecer una serie de procesos o procedimientos constantes que pueden aplicarse a diferentes situaciones problémicas, en función de sus características.

Estos procedimientos constantes o invariantes, deben permitirle al sujeto la identificación los elementos pertinentes de la situación e información del problema matemático, para empezar el proceso de resolución. Según Vergnaud (1990) los invariantes operatorios son funciones proposicionales que consisten reglas de razonamiento lógico, plausible, que permitan hacer predicciones o anticipaciones del fin a lograr, es decir, efectos e indicadores intermedios que muestren que se va en el camino correcto.

Por último, las estrategias metacognitivas en el EOS, se concretan en los macroprocesos de planificación, regulación y control, que permiten usar, deliberadamente, los procesos cognitivos de características muy generales, tales como el pensamiento metafórico, analógico, particularización, generalización, transferencia, contextualización, descontextualización, cambio de representación, para obtener una solución convencional o alternativa al problema planteado (Godino, Giacomone, Batanero & Font, 2017).

2.3.3.3. En la Transformación semiótica

En el EOS se encuentra una primera aproximación a la transformación semiótica con la existencia de signos que representan objetos. Por ejemplo, según Rotman (citado en Godino et al., 2015)

> Existe una íntima interdependencia entre el pensamiento y el lenguaje matemático, dado que los números son objetos que resultan de una amalgama de dos actividades: pensar, imaginar acciones y simbolizar, hacer marcas, las cuales son inseparables: los matemáticos piensan sobre marcas que ellos mismos han imaginado en una existencia potencial. (p.43)

Así, la aproximación a la transformación semiótica se observa en las marcas realizadas, que representan a objetos numéricos y la actividad de pensamiento que generan.

En la referencia a la transformación semiótica, Lyons (citado en Godino, 2007), menciona que estas actividades de pensamiento, son significaciones. Sobre este último concepto, Dummett (Citado en Godino, 2012) menciona que la significación "es aquello que alguien conoce cuando percibe con los sentidos las marcas de signos semióticos" (p. 372). No obstante, no siempre es fácil crear una definición intensiva de un objeto matemático, al estilo de Godino (2012), ya que la definición nombrada y descritas mediante ciertas prácticas, de cierto objeto matemático, según Vergnaud (2016) es irreductible desde un punto de vista didáctico y psicológico.

Lo anterior, en razón de que "son las situaciones las que dan sentido a los conceptos matemáticos, pero el sentido de objeto no está en las situaciones ni en la representaciones simbólicas" (D'Amore & Fandiño, 2017). Así, la definición del sujeto, no es más que la relación de este, con las situaciones de las que emerge dicho objeto. De hecho "son los esquemas evocados por el sujeto, correspondientes a una situación lo que constituye et sentido de dicho significante u objeto, para el individuo" (p. 158). De esta manera, el significado de los objetos matemáticos está referido a la relación situacional de dicho objeto con el sujeto que lo aprehende.

Ahora bien, dichas significaciones se encuentran estructuradas en tres relaciones binarias, dos básicas y una derivada, tal como se muestra en la siguiente figura, de donde A es el signo; B, el concepto; y C, el significado de dicho concepto.

Figura 7. Relaciones semióticas binarias

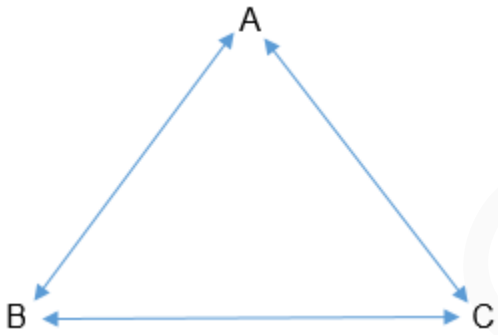


Figura 7. Estructura elemental de la significación semiótica. Fuente: Ogden y Richards (citado en Godino et al., 2015, p.23).

A partir de la significación anterior, Duval (2004), que señala que los objetos matemáticos tienen diferentes registros de representación, de donde tales como: "registro verbal, registro tabular, registro gráfico, registro algebraico, registro simbólico y registro figural" (p. 18). Todos estos remiten a un objeto o concepto matemático, y por ende, a un significado, lo cual permite, al final, realizar procesos de transformación semiótica para realizar procesos de tratamiento o conversión semiótica, hecho que es relevante para resolver problemas algebraicos (Duval, 2016, p.38).

De otro lado, el EOS plantea que el plano institucional determina las reglas de tratamiento y conversión semiótica. Según Godino et al. (2015) y D´Amore (2017), existen, por lo menos, dos características de la acción cognitiva involucrada en las habilidades matemáticas que son: la variedad de registros de representación semiótica y el uso del razonamiento matemático sobre los conceptos, como movilizadores de las inferencias matemáticas, a partir de su interpretación.

Esta transformación semiótica aplicada a los objetos matemáticos, según Godino et al. (2015), da lugar a las siguientes clasificaciones de los objetos matemáticos, tales como ostensivos, no ostensivos; extensivos, intensivos; y expresión, contenido.

El siguiente gráfico sintetiza los procesos que un estudiante debe ejecutar, para resolver problemas algebraicos. A modo de descripción del mismo, el signo * que aparece, representa el conjunto de objetos matemáticos expresados en cada registro o representación. Asimismo, aunque en el gráfico se da la impresión que cada representación es tratada o

convertida una sola vez, en realidad, desde cualquier representación se puede realizar varias conversiones a otras, de distinto registro. Adicionalmente, la solución del problema algebraico, en la medida en que puede expresarse en el registro aritmético o algebraico, se incluye en los dos dominios.

De otro lado, se observa la bidireccionalidad de las flechas, que permite movimientos hacia conceptos de mayor o menor nivel de abstracción, para resolver el problema, incluso, devolverse hasta la percepción de la experiencia misma, para la posterior abstracción, y aprehensión de nuevos objetos algebraicos. Por último, a la derecha se encuentran los ejes rectores de todo el proceso de resolución, desde el particular, siendo los niveles de algebrización, hasta los más generales, tales como los planos personal e institucional, que incluye los procesos informales, heurística, razonamiento plausible; así como los formales, a saber, la lógica.

RED-UNIFCA

Figura 8. Proceso de resolución de problemas algebraicos

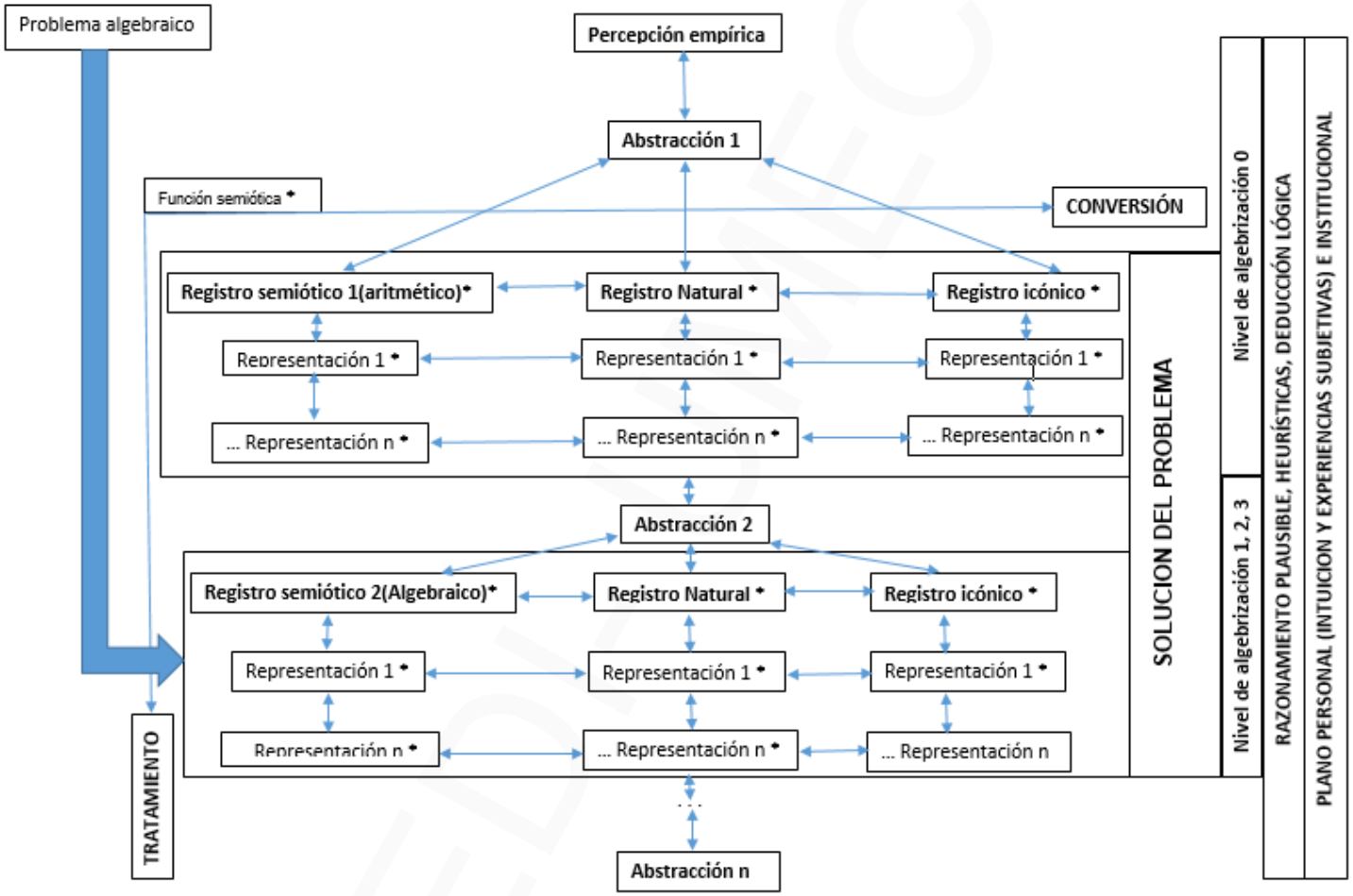


Figura 8. Proceso de resolución de problemas desde la teoría del EOS. Fuente: autor (2020)

3. Bases éticas y legales

A continuación, se exponen las bases éticas y legales que orientan esta investigación. En la primera se analizan aspectos relacionados con el riesgo biológico y psicológico que puede implicar esta, en los estudiantes. En la segunda, se presenta un normograma, con las bases legales clasificadas desde el ámbito internacional, nacional, local, e institucional.

3.1. Bases éticas

En la presente investigación como medidas éticas tomadas está la confidencialidad de los datos referentes a los estudiantes que participen en la investigación, en el momento de la publicación del presente trabajo. Además, teniendo en cuenta el riesgo de contagio por la pandemia del Covid-19, dada la posible cercanía de contacto del grupo de estudiantes, se tomarán medidas de bioseguridad relacionadas con la distancia entre cada sujeto que participe en la investigación, o en caso extremo o será realizada con ayuda de mediaciones tecnológicas, o será reprogramada hasta un momento apropiado. Además, no existe ningún riesgo psicosocial, biológica, u otra que impidan el desarrollo normal de la recolección de la información.

De otro lado, existe otro riesgo psicológico de los estudiantes, por temor a la asignatura, o por pensar que su desempeño o participación afectará sus resultados académicos, por las jornadas extra clase que pudieran causarles estrés. Para mitigar los mencionados riesgos, a los estudiantes se les dejará claro que su participación es completamente voluntaria, no tendrá ningún tipo de repercusiones académicas, y las actividades serán realizadas como parte de su jornada escolar, en los entornos de recepción de clases que comúnmente utilizan. De igual forma, se pedirá consentimiento informado al rector de la institución y coordinador académico, de existir, sino a quien tenga responsabilidades en la institución sobre los chicos fuente de la investigación (ver apéndice No. 2)

PREPRINT

3.2. Bases legales

En el este apartado se presenta el siguiente normograma, acerca de los referentes legales de la educación y documentos curriculares del área de matemáticas, en los contextos internacional, nacional, regional, local e institucional, resaltando su relación con la resolución de problemas.

Tabla 9. Normograma de bases legales

Bases legales internacionales		
Organización internacional	**Nombre**	**Relación con la investigación**
Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, 1990, p.8).	Declaración Mundial sobre Educación para Todos y el Marco de Acción para Satisfacer las Necesidades Básicas de Aprendizaje	La educación matemática debe orientarse al cálculo y la solución de problemas, como aprendizajes mínimos que una persona requiere para el desarrollo pleno de sus capacidades.
Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, 2000, p. 23).	Foro Mundial sobre la Educación, Dakar, Senegal, 26-28 de abril de 2000: informe final	La enseñanza de la resolución de problemas es un pilar importante en toda educación que diga ser de calidad
Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (NTCM, 2005, p.150)	Principios y estándares para la educación matemática	Los docentes deben dar la suficiente atención al razonamiento y la resolución de problemas en su práctica pedagógica
Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, 2015, p.17).	La Educación para Todos, 2000-2015: logros y desafíos, informe de seguimiento de la EPT en el mundo, 2015, resumen	Los educandos deben conseguir resultados de aprendizaje reconocidos y mensurables, especialmente en lectura, escritura, aritmética y competencias prácticas esenciales
Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, 2009, p.13).	Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo	Es urgente potenciar la habilidad de resolución de problemas matemáticos, pues los estudiantes tienen escasa capacidad para resolver problemas de esta naturaleza.
Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos (OCDE, 2019, p.	Estudios económicos	Se debe mejorar la calidad de la educación y asegurar que todos los estudiantes consigan unos

31).		niveles mínimos en la resolución de problemas matemáticos.
Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, 2009, p. 15).	Aportes para la enseñanza de la matemática	Debe crearse un plan de intervención pedagógica, para mejorar el rendimiento de los alumnos, en lo que respecta con la solución de problemas matemáticos
Comisión Internacional de Instrucción Matemática (IMCE, 2016, p. 62)	Decimotercer Congreso Internacional de Educación Matemática	La resolución de problemas debe ser el eje central de la formación en el área de las matemáticas en cualquier nivel educativo

Bases legales nacionales

Ley, decreto, referente curricular	**Nombre**	**Relación con la investigación**
Constitución Política (1991)	Constitución Política de la República de Colombia	La educación es un derecho de la persona y un servicio público que tiene una función social; con ella se busca el acceso al conocimiento y a la ciencia.
Ley No. 115 (1994)	Ley General de Educación	La educación contribuye al crecimiento armónico y equilibrado del niño, de tal manera que facilite la motricidad, el aprestamiento y la motivación para la lectoescritura y para las soluciones de problemas que impliquen relaciones y operaciones matemáticas.
Lineamientos curriculares (1998)	Lineamientos curriculares del área de matemáticas	La formación matemática implica desarrollar estrategias propias de la resolución de problemas. Debe tenerse en cuenta que la finalidad de los cálculos siempre debe ser la resolución de problemas, utilizando distintas representaciones.
Estándares Básicos de Competencias (2006)	Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas	Los estudiantes deben desarrollar competencias matemáticas de interpretación, resolución de problemas y argumentación, utilizando el lenguaje algebraico.

REPOSITORIO

Decreto No. 1075 (2015)	Por medio del cual se expide el Decreto Único Reglamentario del Sector Educación.	Los programas educativos en las áreas de conocimiento tienen como finalidad la formación en competencias y habilidades en las matemáticas, ejercitando al educando en la solución de problemas.

Bases legales regionales

Documento	**Nombre**	**Relación con la investigación**
Ordenanza No. 30 (2019)	Por medio de la cual se adopta el nuevo modelo educativo para los antioqueños, y se pone en marcha el Plan Educativo Antioquia 2030.	Los educandos deben desarrollar el razonamiento lógico matemático y utilizarlo para la resolución de problemas de diversa índole

Bases legales locales

Documento	**Nombre**	**Relación con la investigación**
Plan de desarrollo (2020)	Plan de desarrollo del municipio de Chigorodó 2020-2023	En las instituciones educativas del municipio de Chigorodó, y en todos los niveles educativos, deben fortalecerse las competencias interpretativas y de razonamiento matemático.

Bases legales institucionales

Documento	**Nombre**	**Relación con la investigación**
Manual de convivencia (2020)	Manual de Convivencia de la I.E. Los Andes, I. E. María Auxiliadora, I.E. Gonzalo Mejía, I.E. Agrícola de Urabá, I.E. Juan Evangelista Berrío, I.E. Chigorodó	El docente debe ser un investigador en el quehacer educativo y en las áreas de su competencia, propendiendo hacia su autoformación y actualización constante en el contexto educativo.
Proyecto Educativo Institucional (2020)	Proyecto Educativo Institucional de la I.E. Los Andes, I. E. María Auxiliadora, I.E. Gonzalo Mejía, I.E. Agrícola de Urabá, I.E. Juan Evangelista Berrío, I.E. Chigorodó	Toda práctica educativa debe basarse en el modelo pedagógico constructivista, teniendo en cuenta los siguientes tres principios fundamentales: la actividad, el proceso inductivo y la resolución de problemas, mediante el desarrollo de las estructuras mentales del estudiante, de manera progresiva

		y secuencial, en procesos de pensamiento ampliamente aplicable y útil para aprender cómo aprender.
Sistema Institucional de Evaluación (2020)	Sistema Institucional de Evaluación de la I.E. Los Andes, I. E. María Auxiliadora, I.E. Gonzalo Mejía, I.E. Agrícola de Urabá, I.E. Juan Evangelista Berrío, I.E. Chigorodó	La evaluación debe propender por el desarrollo de competencias en resolución de problemas en cada una de las áreas de conocimiento, comunicativas, ciudadanas y laborales.

Fuente: autor (2020)

Por último, en el marco de referencia legal y académico de la Universidad Metropolitana de Educación, Ciencia y Tecnología, el presente estudio se relaciona con la línea de investigación de Educación y sociedad, en el área de docencia y currículo, cuyo énfasis del programa académico es la investigación, evaluación y formulación de proyectos educativos. Esta relación se evidencia en la forma rigurosa de investigación, que incluye una fase de rastreo y análisis bibliográfico desde la literatura especializada y otra fase de trabajo en campo, sobre la realidad concerniente a la educación matemática, para utilizar dichos resultados como insumo disciplinar en la formación de proyectos institucionales que favorezcan el aprendizaje y la educación integral, con el fin de formar ciudadanos productivos en el ámbito personal, profesional, laboral y social en la comunidad circunscrita a las instituciones educativas focalizadas y a su vez, les permita transferir dichos aprendizajes a contextos más amplios.

4. Sistema de categorías y su conceptualización

En este apartado se presentan las categorías de análisis establecidas en esta investigación, así como su respectiva desagregación conceptual en subcategorías de análisis. Estas categorías y subcategorías de análisis son las siguientes:

Tabla 10. Categorías y subcategorías de análisis

Categoría	**Subcategoría**
Saberes previos	Axiomas y teoremas de números reales Definiciones de operaciones en números reales

Estrategias metacognitivas	Noción algebraica Planeación Regulación Evaluación
Transformación semiótica	Niveles de algebrización I, II y III (variable, incógnita, ecuación, coeficiente, constante, registro semiótico figural, registro semiótico natural, registro semiótico aritmético, registro semiótico algebraico, representaciones semióticas en cada registro, transformación de tratamiento y transformación de conversión)

Fuente: Autor (2020)

Asimismo, el desarrollo de la información en cada una de dichas categorías y subcategorías de análisis, se realiza mediante su definición conceptual y operacional.

4.1. Definición conceptual

En esta sección se presenta la definición conceptual de las categorías y subcategorías de análisis, empezando por la primera, saberes previos.

4.1.1. Saberes previos

Según Schoenfeld (citado en Campos, 2006), los saberes previos,

> se refieren a conceptos, fórmulas, algoritmos, y, en general, a todas las nociones que se considere necesario saber para enfrentarse a un determinado problema. Además, dichos saberes deben ser plenamente identificados por el profesor, lo que implica comprender, con claridad, cuáles son las herramientas a disposición del sujeto que aprende y como accede a los conceptos que tiene. (p.4)

REPOSITORIO

A partir de esta primera referencia que hace Schoenfeld sobre el concepto de saberes previos, se puede afirmar que su estructura está compuesta por los aspectos disciplinares que le permiten al estudiante abordar el problema, para planear y ejecutar estrategias de solución. Asimismo, dichos aspectos disciplinares y la forma en que son utilizados por el estudiante, deben ser conocidos, de forma precisa, por el docente, para comenzar, desde una base sólida, la orientación para el proceso de resolución de problemas algebraicos.

Sobre las características más comunes de los estudiantes en la gestión de los saberes previos, para resolver problemas algebraicos, Schoenfeld (citado en Campos, 2006) menciona que es posible encontrar que no poseen la totalidad de conceptos, procedimientos necesarios, y, si los tienen, no están del todo correctos, no saben cómo aplicarlos, o no identifican pertinentemente las situaciones en las que deben aplicarse. Además, es posible que, aun teniendo los conceptos y asociaciones contextuales adecuadas, presenten incorrecciones en la forma de interrelacionar dichos conceptos. Por esta razón, es necesario tener en cuenta los aspectos anteriores y las particularidades de cada caso, para identificar, de la forma más exhaustiva posible, qué saberes previos tienen los estudiantes y cómo los tienen estructurados, en torno a un objeto de aprendizaje, con el fin de establecer pertinentemente la estrategia de intervención pedagógica.

Además del componente disciplinar del que puede disponer el estudiante en sus conocimientos previos y la forma procedimental que adopten, también está el componente intralógico personal, o sistema de creencias sobre la forma en que los estudiantes, incluso, cualquier persona, abordan la resolución de problemas (Esquivel, Araya & Sánchez, 2008). Por ejemplo, una de las creencias de la mayoría de los estudiantes, es asumir que para resolver problemas algebraicos, no es necesario utilizar los axiomas y teoremas conocidos, menos para demostrar sus procesos, incluso, no ven la necesidad de demostrar, y, si lo hacen, utilizan opiniones y argumentos intuitivos, relegando a un lado las herramientas formales de que disponen, por considerarlas ajenas al mundo real. Además, cuando se atascan en el problema, no usan estrategias cognitivas y metacognitivas conscientes para planear, regular y controlar sus propias creencias u orientación frente al problema. Puntualmente, en lo que respecta a estrategias, es muy probable encontrar que los

estudiantes no identifican invariantes estructurales en problemas, para extrapolar conceptos o procesos de un problema resuelto a otro (Williams & Gómez, 2007).

No obstante, gran parte de estas creencias son desarrolladas por el estudiante, como consecuencia del estilo formativo que el docente haya empleado. Por esta razón, en la praxis pedagógica deben generarse espacios de aprendizaje crítico, para evitar que los estudiantes conciban las creencias características de los saberes previos al abordar problemas algebraicos mencionadas, a saber, el sentido de única respuesta correcta, siguiendo la regla que dio el docente; la concepción memorística y mecánica de las matemáticas; el trabajo individual y la rapidez de resolución, una vez comprendido cierto tema (Schoenfeld, citado en Barrantes, 2006).

Ahora bien, en cuanto a la forma en que se encuentran representados mentalmente los saberes previos, tanto los de tipo disciplinar, como las creencias, Montes, Flores, Carmona, Huitrado y Flores (2014), mencionan que puede ser de dos tipos, dado que, "algunos individuos tienden a representarse los problemas de acuerdo a una estrategia basada en imágenes; otros utilizan una estrategia representacional basada en descripciones verbales, según las demandas de la tarea" (p. 15).

Así, se puede decir que la representación mental de los saberes previos, se da principalmente a través de dos sistemas: el sistema proposicional, cuya unidad básica es la es la proposición, es decir, un enunciado que se puede evaluar como verdadero o como falso, y el sistema analógico, constituido, fundamentalmente, por la imagen mental. Cabe aclarar, que el concepto de proposición, no solo se refiere a expresiones verbales. Según Bassols (2014), puede tener un contexto matemático, para referirse a proposiciones aritméticas, algebraicas, y en general, analíticas.

Ahora bien, la diferencia entre ambos sistemas radica en la forma de procesamiento, pues como indica Montes et al. (2014), "las imágenes se procesan mentalmente en paralelo, mientras que las descripciones lingüísticas o proposiciones, se procesan serialmente" (p.15).

Frente a lo planteado anteriormente, se puede afirmar que los elementos constitutivos de la imagen son captados simultáneamente, o sin orden establecido alguno;

caso contrario al de las proposiciones, cuyos elementos se perciben secuencialmente, en el proceso de lectura. No obstante, es necesario precisar que, aunque parecen existir diferencias entre el procesamiento lingüístico y analógico, en ambos sistemas, la interpretación de los elementos captados es secuencial. De hecho, Montes et al. (2014) sostiene que "las operaciones empleadas en comprender algo, en el sistema proposicional y analógico, ocurren secuencialmente" (p. 16).

Respecto a la relación entre ambos sistemas, Molina (2011), llega a la conclusión, por definición, que "el sentido analógico de la imagen, está en la representación semántica alternativa, en este caso, las proposiciones lingüísticas" (p.47). De hecho, va más allá, al afirmar que las imágenes mentales adquieren sentido "cuando son comunicadas a través de proposiciones u otro sistema de signos" (p.48). De esta manera, puede afirmarse que las características definitorias de las representaciones analógicas, además de expresarse en el lenguaje verbal, adquieren sentido en función de las proposiciones lingüísticas que las comunican.

Continuando con las imágenes mentales, según Pérez (2018), estas pueden referir a proposiciones o imágenes propiamente dichas. Así, cuando se indaga por el significado de algo, una experiencia, teoría, palabra o un problema matemático, equivale a recordar la comprensión que tenemos de ello, en la forma en que esté, trátese de imágenes o proposiciones en lenguaje natural, algebraico o aritmético, que en cualquier caso, se reducen a "un cúmulo de contenidos semánticos, significado de las palabras, conceptos sobre el mundo en el que vive, conocimientos especializados, habilidades y destrezas, las cuales permanecen normalmente en estado latente hasta que se activa y recupera desde la memoria de trabajo" (Pérez, 2018, p. 49).

Esta estructuración de saberes disciplinares y creencias, en sistemas de representación, de movilización semántica mutua, que se ha afirmado a lo largo de esta sección; es coherente con la teoría de los registros de representación semiótica de Duval (2012), la cual afirma que, para resolver un problema matemático, se necesita moverse en, al menos, dos registros semióticos distintos. De acuerdo a la información que se ha expuesto anteriormente, puede decirse que se ha hecho referencia a los siguientes registros: natural o verbal, algebraico, aritmético y analógico o icónico, también mencionados por

Bruner (citado en García & Campuzano, 2014). Así, comprender que hay actividad de varios registros semióticos en la gestión interna de saberes previos, es importante, no solo para identificar sus características en los estudiantes cuando enfrentan problemas algebraicos, sino para direccionarlos eficazmente hacia su resolución. No obstante, el mencionado aspecto semiótico es una categoría de análisis que será tratado como más amplitud en la sección correspondiente.

En síntesis, los saberes previos son un conjunto de conceptos, relaciones y procedimientos de tipo disciplinar o personal, cuya manifestación en el pensamiento puede darse a través de los registros analógico y proposicional, con posibilidad de conversión entre ellos, siendo el último, el sitio final donde descansan las inferencias y los avances teóricos en el proceso de resolución de problemas algebraicos.

A raíz de lo anterior, es importante que el docente desarrolle sensibilidad teórica y objetividad frente a la forma en que hace lectura de las evidencias, concepciones y conocimientos utilizados en el proceso resolutivo por los estudiantes. Así, en la medida en que potencie estas habilidades, podrá entender con mayor amplitud, qué conceptos, procedimientos y relaciones comprenden los estudiantes, y de qué manera lo hacen, por muy obvios que al docente puedan parecerle. Si así lo hace, logrará tener bases de partida objetivas, que le servirán para relacionar los saberes previos de los estudiantes, con el objeto de aprendizaje que se ha trazado como objetivo.

En la siguiente sección se describen los conceptos y relaciones previas disciplinares, que los estudiantes necesitan saber, no solo en el proceso de resolución de problemas algebraicos, sino en la comprensión del lenguaje y comunicación formal de la matemática.

4.1.1.1. Definiciones de las operaciones en números reales

Respecto a las definiciones, conceptualizaciones y aplicación de operaciones básicas con números reales, desde la postura fenomenológica o constructivista en el tratamiento didáctico de este objeto de conocimiento, deben tenerse en cuenta las concepciones que el estudiante tiene de un objeto y a partir de ellas, avanzar hacia la conceptualización y

operacionalización del mismo, en este caso de las operaciones básicas con números reales (Torres, 2010). Esta acción didáctica permite distinguir entre definiciones, conceptos, operaciones y objetos mentales cuyo lenguaje es el vernáculo. Así, en un sentido fenomenológico, se construyen actividades a partir del conocimiento previo y experiencial del estudiante, es decir desde sus concepciones, y desde allí, enseñarle a manipular esos medios de organización (Becerra, Buitrago & Calderón, 2017). Entonces, en vez de empezar por el concepto de suma, resta, multiplicación y división en los diferentes conjuntos numéricos de los reales, y luego buscar actividades de aplicación, se privilegian actividades didácticas que promuevan la constitución del objeto mental que posteriormente se conceptualice como una operación básica y su operacionalización.

En este sentido, al propender por la creación de los objetos mentales, hará posible la organización personal de los fenómenos y posteriormente, el concepto surja de forma natural (Becerra, Buitrago & Calderón, 2017). De esta manera, ese concepto será significativo para el estudiante, en la medida en que utilizará con solvencia el campo semántico del mismo, pues los conceptos, solamente organizan las concepciones mentales y categorizan el campo semántico asociado a ellos. Por esta razón, el trabajo didáctico debe realizarse a partir del contexto en el que el concepto cobra sentido.

Ahora bien, dicho contexto no se restringe a los hechos cotidianos, de hecho, en la formación de los objetos mentales, estos serán enriquecidos con usos de diversas manifestaciones contextuales, y en niveles de abstracción mayores que permitan enriquecer el objeto mental y el campo semántico del concepto en cuestión otros usos que le permitan interpretar las distintas situaciones en las cuales interviene el concepto (Torres, 2010).

La organización didáctica anterior obedece a la esencia misma de la formación de definiciones y conceptos matemáticos, la cual consiste en la restricción, ampliación y unificación de campos semánticos que son categorizados (Gairín & Oller, 2011). Por lo tanto, se hace necesaria la formación en objetos mentales con un campo semántico muy enriquecido, que le permita dar cuenta de todos los usos, en todos los contextos, saber cómo ha sido creado en las matemáticas, cómo ha evolucionado y cómo se relaciona la formación del objeto mental con la adquisición del concepto con el fin de lograr en el estudiante la

categorización y conceptualización natural de las operaciones básicas con los diferentes subconjuntos del conjunto de los números reales.

Luego del proceso de formación de objetos mentales enriquecidos contextual y semánticamente, puede hablarse del concepto que lo categoriza, por cuanto se han tratado los aspectos que lo significan. Entonces, la descripción de los saberes previos que el estudiante debe tener, en relación con las definiciones y dominio de algoritmos de las operaciones básicas como punto de llegada, previo trabajo didáctico fenomenológico o constructivista, se expone en las siguientes líneas, a partir de los desarrollos de Pérez (2000), Aylwin (2011) y Zill, Wright y Escutia (2015).

Concretamente, se denomina sistema de números reales al conjunto que contiene los subconjuntos de los números naturales, enteros, racionales e irracionales, "denotado por el símbolo $\mathbb{R}$, que cumple con axiomas de cuerpo, axiomas de orden y axioma del supremo" (Zill, Wright & Escutia, 2015, p. 21).

Asimismo, se define operación aritmética, como la aplicación de un operador sobre los elementos de un mismo tipo[11], y puede ser unaria o binaria. En primer lugar, es unaria cuando se aplica a un solo elemento, ejemplo, al número x, se le aplica la operación unaria - , para designar su opuesto, es decir, -x. En segundo lugar, es binaria, si el operador media entre dos elementos, por ejemplo, entre los números x e y, se aplican los operadores adición y producto, es decir, suma y multiplicación, asi: x+y, xy (Aylwin, 2011).

Particularmente, en esta investigación se hará énfasis en las operaciones aritméticas binarias elementales, a saber, la adición y el producto, y sus inversas: la sustracción y la división, que un estudiante debe comprender, conceptual y procedimentalmente, en el marco de lo que esta investigación denomina saberes previos.

De esta manera, el estudiante debe comprender que, por definición, la adición es la operación binaria aritmética en los números reales, representada con el signo +, que consiste en añadir a un sumando "a" otro "b", para contabilizar el total "a+b". De manera contraria, la resta o sustracción, se representa con el signo –, y, dado el caso anterior, restringiéndolo al conjunto de los números naturales, un ejemplo se visualiza tomando a+b

[11] En este caso, "tipo" se refiere al conjunto $\mathbb{R}$

como minuendo y b como sustraendo. Entonces, la resta consiste en eliminar el sustraendo "b" del minuendo "a+b", para obtener la diferencia a + b – b= a, siendo a+b, el número mayor (Pérez, 2000).

De igual forma, el estudiante debe reconocer que la multiplicación es una operación binaria aritmética, compuesta de términos numéricos llamados factores, que puede representarse con varias notaciones, a x n, an, a.n, (a)(n), a(n). En los números naturales, consiste en sumar un número, llamado multiplicando, tantas veces como indica otro número, llamado multiplicador. Por ejemplo, a+a+a+a… (b veces) = a x b, donde "a" es el multiplicando, "b" el multiplicador, y a x b es el producto (Coronado, 2014).

Además, el estudiante debe comprender el carácter inverso y anulativo de la división respecto a la multiplicación, su naturaleza binaria, representada con las notaciones -:- , ⁄, y aplicar eficazmente del algoritmo, entendiendo que el objetivo que persigue, es contar las veces que un número, denominado divisor, está contenido en otro número, llamado dividendo. El número de veces que está contenido el divisor en el dividendo, se conoce como cociente. Para el caso de la multiplicación del párrafo anterior, en el conjunto de los números naturales, el divisor podría ser a v b, y el dividendo, a x b. De esta forma, si se escoge "a" como divisor, la operación a x b / a, significa que debe encontrarse el número de veces que esta contenido el número "a", en el número a x b, que para este caso, el cociente seria b veces exactas. No obstante, es posible que el divisor no este contenido un número exacto de veces en el dividendo, caso en el que, se obtiene el cociente, dejando un resto (García, Rodríguez & Navarro, 2015).

Adicional a las definiciones y procedimientos anteriores, el estudiante debe comprender y aplicar el algoritmo correspondiente para cada una de las operaciones aritméticas, en el marco del sistema de numeración decimal, no solo para números naturales, sino para los $\mathbb{R}$, incluso, debe poseer las bases conceptuales y procedimentales de los axiomas y algunos teoremas de los números reales que se mostrarán en la siguiente sección, lo cual implica, como se había dicho al comienzo de esta sección, la concepción de objeto mentales en diferentes niveles de abstracción, desde el origen de los mismos, pasando por los diversos contextos que posibiliten la ampliación de campos semánticos, de forma que dichos conceptos, a partir de un proceso constructivo, sean aprehendidos lo más

extensivamente posible por el estudiante (Torres, 2010; Gairín & Oller, 2011; Becerra, Buitrago & Calderón, 2014).

4.1.1.2. Axiomas y teoremas de los números reales

En esta sección se define el concepto general de axioma y teorema, así como la enunciación matemática de los axiomas y algunos teoremas notables de los números reales, que deben integrar los saberes previos del estudiante, para resolver eficazmente problemas algebraicos. Según Rivera (2018),

> Los axiomas son afirmaciones o hechos, cuya veracidad no necesita ser demostrada a partir de otros axiomas, por ser evidente. A su vez, los teoremas son proposiciones obtenidas de manera inferencial, mediante razonamiento lógico, a partir de otros axiomas o teoremas. (p. 22)

Con relación a la enunciación matemática de los axiomas y algunos teoremas notables de los números reales, no se hace con la pretensión de usar una notación rigurosamente matemática, más bien, está pensado desde una perspectiva didáctica, combinando las notaciones matemáticas conocidas por los estudiantes, con expresiones en lenguaje natural, para facilitar su comprensión y utilización practica en la resolución de problemas algebraicos. Para ello, se consultó, publicaciones didáctico disciplinares de Pérez (2000), Aylwin (2011) y Zill, Wright y Escutia (2015), y, tras un periodo de análisis, se seleccionaron los siguientes axiomas y teoremas, de manera pertinente a los objetivos de esta investigación.

Axiomas de cuerpo

Adición

PREPRINT

- Si x, y ∈ ℝ, entonces x + y ∈ ℝ (Cerradura en la suma)
- Si x, y ∈ ℝ, entonces x + y = y + x (Conmutatividad en la suma)
- Si x, y, z ∈ ℝ, entonces (x + y) + z = x + (y + z) (Asociatividad en la suma)
- Existe 0 ∈ ℝ de manera que x + 0 = x, ∀ x ∈ ℝ (Neutro aditivo)
- Para cada x ∈ ℝ existe un único elemento y ∈ ℝ tal que x + y = 0 (Inverso aditivo)

Producto

- Si x, y ∈ ℝ, entonces xy ∈ ℝ (Cerradura en la multiplicación)
- Si x, y ∈ ℝ, entonces xy = yx (Conmutatividad en la multiplicación)
- Si x, y, z ∈ ℝ, entonces (xy) z = x(yz) (Asociatividad en la multiplicación)
- Existe 1 ∈ ℝ de manera que x1 = 1x = x para cualquier x ∈ ℝ (Neutro multiplicativo)
- Para cada x ≠ 0, x ∈ ℝ existe un elemento y, tal que xy= 1

Distribución

- Si x, y, z ∈ ℝ, entonces x(y + z) = xy + xz (Distributividad de la multiplicación en la suma)

Igualdad

- Si x, y ∈ ℝ, x=y △ x ≠ y (Exclusividad)

Supremo

- Todo conjunto no vacío y acotado superiormente posee un supremo.

Teoremas

Adición

- Si x ∈ ℝ, entonces +x = x
- Si x ∈ ℝ, entonces – (– x) = x
- Para todo a, b ∈ ℝ, se tiene que a+ (−b) = a−b (sustracción)
- Simplificación de la adición: Si x, y, z ∈ ℝ, x+z = y+z, entonces x = y

Sea a, b ∈ ℝ, entonces:

- +(a+b)= a+b
- -(a+b)= -a-b
- -a+b = +b-a = -(a-b)
- Si b, d ≠ 0, entonces (a/b)+ (c/d)= (ad +bc)/bd
- Si b, d ≠ 0, entonces (a/b)- (c/d)= (ad - bc)/bd

Producto

- Si x ∈ ℝ, x ≠ 0, entonces x(1/x) = 1 (Inverso multiplicativo)
- Si x ≠ 0, x ∈ ℝ, 0/x = 0(1/x) = 0 (Anulatividad de la multiplicación)
- Para todo a, b ∈ ℝ, entonces – a (+ b) = − ab
- Para todo a, b ∈ ℝ, entonces + a (− b) = − ab
- Para todo a, b ∈ ℝ, entonces – a (−b) = + ab
- Para todo a, b ∈ ℝ, entonces + a (+b) = + ab
- Para todo a, b ∈ ℝ, entonces – a = (− 1) a
- Si b, d ≠ 0, entonces (a/b) (c/d) = ac/bd
- Si b, d, c ≠ 0, entonces (a/b) / (c/d) = ad/bc
- Simplificación para la multiplicación: para todo a, b, c ∈ ℝ y a ≠ 0, si ab = ac, entonces b=c
- Para todo número real a, b ∈ ℝ, si ab = 0, entonces a=0 ∨ b=0.

Igualdad

- Si x ∈ ℝ, entonces x= x (Reflexividad)
- Si x, y ∈ ℝ, x=y, entonces y= x (Simetría)
- Si x, y, z ∈ ℝ, x = y, y= z, entonces x= z (Transitividad)
- Si x, y, z ∈ ℝ, x= y, entonces x+z=y+z (unicidad de la suma)
- Si x, y, z ∈ ℝ, x = y, entonces xz = yz (unicidad de la multiplicación)
- Si w, x, y, z ∈ ℝ, w = x, y= z, entonces w+y = x+z (sustitución en la suma)
- Si w, x, y, z ∈ ℝ, w = x, y= z, entonces wy = xz (sustitución en el producto)
- Si b, d ≠ 0, si a/b = c/d, entonces ad= bc

Del supremo

- Si x, y ∈ ℝ, existe un z ∈ ℝ, tal que x < z > y (Densidad)

Para todo x, y ∈ $\mathbb{R}^+$, x+y ∈ $\mathbb{R}^+$ e x.y ∈ $\mathbb{R}^+$

PREPRINT

Axiomas de orden

Teniendo en cuenta que los subconjuntos de los $\mathbb{R}$ son disjuntos, se define uno de ellos, el $\mathbb{R}^+$:

Para todo $x \neq 0 | x \in \mathbb{R}^+ \triangle -x \in \mathbb{R}^+$
$0 \notin \mathbb{R}^+$
Se definen los $\mathbb{R}^-$ a partir de los $\mathbb{R}^+$
$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ + \mathbb{R}^- + \{0\}$, de donde $\mathbb{R} = \mathbb{R} - \mathbb{R}^+ - \{0\}$

Concretamente,

- Para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$, $x+y \in \mathbb{R}^+$ e $x.y \in \mathbb{R}^+$
- Es verdadera una y solo una de las siguientes relaciones: $x = 0$, $x \in \mathbb{R}^+$, $-x \in \mathbb{R}^+$
- $x<y \Leftrightarrow (y-x) \in \mathbb{R}^+$
- $x> y \Leftrightarrow y<x \Leftrightarrow (x-y) \in \mathbb{R}^+$
- $x\leq y \Leftrightarrow x<y \triangle (x = y)$
- $x\geq y \Leftrightarrow x>y \triangle (x = y)$

Teoremas:

- $0<y \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}^+$
- Si $x<0$, entonces $x \in \mathbb{R}^-$
- Para todo $x\neq 0$, se cumple que: $x \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow -x \in \mathbb{R}^-$
- Para todo $x\neq 0$, se cumple que: $x \in \mathbb{R}+ \triangle x \in \mathbb{R}^-$
- Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x < y$;$y < z$ entonces $x < z$ (Transitividad)
- Si $w, x, y, z \in \mathbb{R}$, $w > x$, $y > z$, entonces $w+y > x+z$ (sustitución en la suma)
- Si $w, x, y, z \in \mathbb{R}$, $w < x$, $y< z$, entonces $w+y < x+z$ (sustitución en la suma)
- Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x < y$, entonces $x + z < y + z$ (unidad en la suma)
- Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x < y$ y $0 < z$, entonces $xz < yz$ (unidad en la multiplicación)
- Si $x<y$, para todo $z \in \mathbb{R}-$, se cumple que $xz>yz$. (Zill, Wright & Escutia, 2015, pp. 5-9)

Para finalizar, respecto a los axiomas y teoremas antes expuestos, si bien, Domínguez (2017) reconoce que es posible que la mayoría de los estudiantes conozcan solo algunos, dicho listado puede servir como guía de consulta para la resolución de problemas, especialmente en las fases de manipulación simbólica de expresiones algebraicas.

Particularmente, para el diseño de los instrumentos de recolección de datos de los saberes previos, se utilizarán ejercicios y problemas que requieran el uso operativo de todos los axiomas de cuerpo, así como sus teoremas, para su solución.

De otro lado, en la siguiente sección se realiza la descripción de la subcategoría noción algebraica.

4.1.1.3. Noción algebraica

Según Aké, Molina y Ramos (2015), tener noción algebraica implica

> Identificar patrones y leyes que gobiernan las relaciones numéricas, usando variedad de representaciones, apreciar relaciones numéricas entre los términos de una expresión, desarrollar un conocimiento de operaciones entre ellos, de propiedades de estos objetos y sus operaciones, ej., asociativa, conmutativa, distributiva, y de las propiedades de relaciones cuantitativas, ej., transitividad e igualdad. (p. 7)

Aunque esta descripción es propiamente algebraica, cabe mencionar que, en realidad, todo el currículo de la matemática de la primaria implícita la actividad algebraica, adecuado al desarrollo cognitivo de los estudiantes, evidentes en procesos asociados a la adición, sustracción, multiplicación, división, razón, proporción, número racional, medición; y en los sistemas de representación como gráficas, tablas, notación y exploración de estructuras numéricas (Carraher & Schliemann, 2015).

Entonces, la noción algebraica, consiste en el dominio, por parte de estudiante, de sus procedimientos verbales, aritméticos y geométricos, tanto relacionales, como de generalización, integrados en sus saberes previos. En esa línea, Kieran (citado en Godino, 2012) sintetiza las actividades que caracterizan la noción algebraica, en tres tipos: “generacional, transformacional y global o de metanivel” (p. 287).

Respecto a las actividades de tipo generacional, se refieren a la concepción de expresiones, sobre todo, de tipo informal, para expresar aspectos de relación entre ciertos números, así como la modelización aritmética, para representar una situación dada. Por su parte, las actividades de tipo transformacional, consisten en la aplicación de los axiomas y teoremas de los números reales, para encontrar expresiones equivalentes a la concebida inicialmente, pero simplificadas. Asimismo, las actividades de tipo global, son un poco más abstractas en el análisis de expresiones aritméticas, la justificación, prueba e intentos informales de generalizar teóricamente relaciones entre números, a partir de la búsqueda de invariantes en sus procedimientos aritméticos (Godino, 2012).

En la siguiente tabla, se resume, en términos generales lo que representa la noción algebraica, de acuerdo a los macroprocesos mencionados anteriormente, tareas, objetos algebraicos y procedimientos.

Tabla 11. Componentes esenciales de la noción algebraica

MACROPROCESO	TAREA	OBJETO ALGEBRAICO	PROCEDIMIENTO
Transformacional	Ejecución de algoritmos	Propiedades de equivalencia, ecuaciones, patrones, símbolos	El símbolo o variable se asume como punto de llegada, no como un ente operacional más.
	Descomposición de números		
	Utilización de las relaciones inversas de las operaciones		
	Aplicación de axiomas teoremas de las operaciones básicas		
	Comprensión del significado de equivalencia de expresiones del signo igual		
Generacional	Concepción de cantidades		

PREPRINT

	indeterminadas
Generacional y Global	Invención de símbolos para representar cantidades indeterminadas: valor faltante, numero general, variable
Global	Representar, analizar y generalizar patrones, utilizando gráficas, tablas, descripciones verbales

Fuente: Adaptado de Godino (2017).

4.1.2. Estrategias metacognitivas

Para empezar, Flavell (citado en Rodríguez, 2006), define la metacognición como

> El conocimiento sobre los propios procesos cognoscitivos que están involucrados en la consecución de un objetivo, realización de una tarea o solución de un problema, y la regulación de ellos por parte del individuo, involucrando las características de las personas, las tareas. (p.26)

Por lo tanto, se puede afirmar que la metacognición, en primera instancia, se refiere al conocimiento que una persona tiene acerca de los propios procesos y productos cognitivos o cualquier otro asunto relacionado con ellos; en segunda instancia, se refiere a la supervisión activa o regulación, de los mencionados procesos cognitivos, con el fin de lograr un objetivo determinado.

Respecto al conocimiento metacognitivo, según Flavell (citado en Rodríguez, 2006), se refiere al acto consciente de un sujeto, sobre cómo percibe el problema que está

resolviendo, esto es, si "es una tarea muy difícil, lo está llevando a cabo de forma inadecuada, está cerca del resultado, etc." (p. 27).

Por otro lado, el mismo autor, Flavell (citado en Desoete, 2017), sostiene que la regulación de los procesos cognitivos implica los siguientes tres subprocesos

> La planeación, la cual consiste en la anticipación de las actividades a realizar; el control que involucra verificación, rectificación y revisión de la(s) estrategia(s) empleada(s) y; por último, la evaluación realizada antes de terminar la tarea y que consiste en valorar las estrategias empleadas para saber si han sido eficaces. (p.12)

Otra mirada sobre la metacognición es la de Brown (citado en Moreno & Daza, 2014) quien plantea

> Tres tipos diferentes de conciencia metacognitiva, a saber, conocimiento declarativo, conocimiento procedimental y conocimiento condicional. El conocimiento declarativo se refiere al conocimiento acerca de las cosas. El conocimiento procedimental se refiere al conocimiento cómo hacer las cosas. El conocimiento condicional se refiere al conocimiento de cuándo y por qué utilizar los conocimientos declarativo y procedimental. (p. 12)

Asimismo, el mencionado autor argumenta que dichos conocimientos, le dan significado a las posteriores actividades de planeación, monitoreo, revisión y evaluación como procesos esenciales de regulación del proceso cognitivo.

Con relación a las mencionadas actividades, Brown (citado en Moreno & Daza, 2014), explica que la planeación "es una actividad previa a la ejecución, que diseña el camino o rumbo de las acciones y estrategias a seguir"(p. 13); el monitoreo, "consiste en

la reflexión si el camino tomado conducirá a la solución"(p. 13); la revisión, "se refiere al proceso de rectificación de la estrategia empleada, si ésta fue empleada correctamente, si no, realizar correcciones sobre la marcha" (p. 14), por último, la evaluación "permite contrastar los resultados, implica valorar los resultados de la estrategia utilizada"(p. 14).

Después de describir el marco previo sobre el concepto de metacognición, ahora se definirá el concepto de estrategia metacognitiva. Para empezar, Weinstein y Mayer (citados en Osses & Jaramillo, 2008), definen estrategia metacognitiva como "el conjunto de acciones orientadas a conocer las propias operaciones y procesos mentales, qué, saber utilizarlas, cómo, y saber readaptarlas y/o cambiarlas cuando así lo requieran las metas propuestas" (p. 191).

Por su parte, para Gusmao (2006), las estrategias metacognitivas se refieren a

> La utilización y adaptación del conocimiento para la gestión de la actividad mental y consiste en predecir, planificar, controlar, regular y verificar esta actividad en la ejecución de una tarea. Su principal manifestación de desarrollo es el control y la regulación aportada constantemente durante la ejecución de una tarea. (p.58)

Además, Rodríguez (2005), resalta el papel de la heurística y el razonamiento plausible, una aproximación al razonamiento lógico, como herramientas incluidas en las estrategias metacognitivas en la resolución de problemas, mediante tareas como "elaborar un diagrama donde se representen las afirmaciones del problema, dividir el problema en partes o encontrar un problema relacionado" (p.36), las cuales, permiten formular hipótesis, contraejemplos, técnicas de tanteo, como estado transitorio en el proceso de resolución de problemas algebraicos.

Hasta este punto, analizando las descripciones sobre el concepto de metacognición de Flavell (citado en Rodríguez, 2006), Brown (citado en Moreno & Daza, 2014), así como de las estrategias metacognitivas de Weinstein y Mayer (citados en Osses & Jaramillo, 2008), Gusmao (2006) y Rodríguez (2005), se puede inferir que las estrategias metacognitivas implican la acción consciente de una serie de actividades cognitivas para el

logro de un objetivo previamente establecido, estructurada en los componentes de planeación, control y evaluación, para orientar los procesos cognitivos en la resolución del problema. Adicionalmente, la heurística y el razonamiento plausible, le confieren a dichos componentes metacognitivos, un sentido práctico, a través de la ejecución de tareas secundarias, que le permitan al sujeto acercarse progresivamente a la solución del problema algebraico.

Así, en la presente investigación se ha establecido como subcategorías: planeación, regulación o control y evaluación, las cuales serán descritas en la siguiente sección.

4.1.2.1. Planeación

Según Brown (citado en Caycedo, 2018) la planeación es una de las fases de la metacognición, que implica

> La selección de estrategias apropiadas y la localización de factores que afectan el rendimiento tales como la predicción, las estrategias de secuenciación y la distribución del tiempo o de la atención selectiva antes de realizar la tarea; es decir, consiste en anticipar las actividades, prever resultados, enumerar pasos. (p. 42)

Lo anterior, indica que la planeación es una estrategia dentro del proceso metacognitivo, que permite al estudiante organizar y comprender más fácilmente el planteamiento de un problema algebraico, para anticipar el procedimiento a seguir y el resultado que se espera obtener.

4.1.2.2. Regulación

Según Sanabria, Ibáñez & Valencia (2016) la regulación se refiere

PREPRINT

> Al proceso de reflexionar y evaluar en la fase ejecutiva, el cumplimiento de lo planeado, para continuar en la misma línea de las directrices iniciales, o, de ser necesario, realizar modificaciones de tipo conceptual o procedimental, pertinentes, para avanzar en la consecución del objetivo planeado en el problema. (p. 47)

De esta manera, la regulación se entiende como el proceso de análisis reflexivo y constante, sobre los avances obtenidos en las fases intermedias del problema, es decir, durante las acciones ejecutivas, para determinar si se va en el camino correcto hacia la solución, o es necesario cambiar de perspectiva. Además, según Naranjo & Gallardo (2014), la regulación implica la "verificación, valorización del propio desempeño, control de la tarea, corrección de errores y distracciones, reconducción del esfuerzo, rectificaciones y autorrefuerzo" (p. 303).

4.1.2.3. Evaluación

La evaluación metacognitiva es, para Mato, Espiñeira y López (2017), el proceso de

> Observación y comparación de las condiciones del problema con las respuestas dadas, la subsiguiente emisión de juicios de valor para aprobar el proceso, o identificar errores a corregir. También implica la realización de paráfrasis y esquema de conclusiones, contrastando los resultados obtenidos y estrategia utilizada, con lo planeado inicialmente, advirtiendo alternativas plausibles. (p. 97)

De acuerdo al mencionado concepto de evaluación metacognitiva, puede afirmarse que consiste en corroborar que la solución obtenida satisface las condiciones del enunciado problema algebraico. Adicionalmente, implica realizar la trazabilidad del proceso resolutivo, para identificar qué estrategias se ajustan más que otras a cierto tipo de

situaciones; conjeturar sobre variables, procesos, o sobre la metacognición misma del sujeto desde sus pensamientos, hasta pasos evidentes de resolución.

4.1.3. Transformación semiótica

Según Duval (2012), dada una representación inicial, propia de cierto registro, la transformación semiótica se refiere

> Al proceso de tratamiento, es decir, la construcción de otra representación dentro del mismo registro de la representación inicial; o al proceso de conversión, esto es, la construcción de la representación en otra representación de otro registro, en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. (p. 65)

Con referencia a la resolución de problemas algebraicos, Duval (citado en Muñoz, Erazo & Marmolejo, 2013) explica que la transformación semiótica es una actividad consciente o inconsciente de todo resolutor de problemas. Además, en el EOS de Godino, Font y Wilhelmi (2008), y la Teoría de Registros de Representación Semiótica, TRRS, de Duval (1998), se plantea el papel fundamental de las operaciones de tratamiento y/o conversión semiótica en los registros natural, algebraico, aritmético, pictográfico y figural, para resolver un problema matemático, en este caso, algebraico; referidas al uso de axiomas y teoremas de los números reales, para realizar procesos de tratamiento y conversión, en la resolución de ecuaciones de primer grado con una incognita, cuya contextualización, se constituye en la resolución del problema algebraico modelado.

Tras analizar los mencionados referentes teóricos, se ha concluido en esta investigación, que, para el caso del registro algebraico y aritmético, los conceptos de apoyo, para fundamentar las transformaciones de tratamiento, son los axiomas y teoremas de números reales, ya mencionados por el EOS. Análogamente, para realizar transformaciones

de tratamiento en el registro figural y pictográfico, sugiere la existencia de un sistema de axiomas y teoremas para la construcción de distintas representaciones al interior de dichos registros, tal como ocurre con el registro aritmético de los números reales, y si no, deben explicitarse de forma didáctica, para fortalecer los procesos transformacionales de tratamiento en el contexto educativo.

Para el caso del registro natural o verbal, solamente se puede hacer procesos transformacionales con las partículas semióticas que originalmente son del registro algebraico, pero han sido adaptadas al registro natural (Rojano, 2010). Con relación al resto de partículas semióticas de lenguaje natural, que no son de naturaleza algebraica, a pesar de tener reglas gramaticales, estas últimas no están enfocadas en procesos transformacionales de tratamiento según el interés de esta investigación, es decir, en el lenguaje natural no existen reglas gramaticales para obtener representaciones distintas que simplifiquen la información de cierta representación inicial, manteniendo el significado. Un ejemplo de esto es la ausencia de una construcción axiomática o forma de la idea principal, como representación de otra representación inicial, a saber, del texto de donde se origina (Estupiñan, Arias & García, 2010).

En ese sentido, dado que no existen axiomas o teoremas explícitos, o un compendio didáctico de los mismos, para algunos procesos de tratamiento y todos los de conversión, el saber heurístico se constituye en una alternativa práctica, de naturaleza no algorítmica, para orientar, a groso modo, al resolutor en sus tareas progresivas, de tratamiento y de conversión semiótica, para la resolución de problemas algebraicos (Guerra, Bruña & Alvarado, s.f.).

Probablemente, en futuras investigaciones se haga explícito, a través de axiomas y teoremas, el proceso de tratamiento en los registros pictográfico, figural; así como de conversión entre registros. Por ahora, en esta investigación se utilizarán heurísticas y aproximaciones teórico didácticas de los mencionados procesos de tratamiento y conversión, en la categoría de estrategias metacognitivas.

Volviendo al asunto central de esta sección, la definición conceptual de la transformación semiótica, Duval (2006) resalta que los procesos transformacionales de

tratamiento y conversión, se dan, a través de las funciones semióticas, las cuales permiten cambiar registros representacionales de un objeto matemático. Estas funciones actúan de la siguiente manera: dada una representación en cierto registro, se denomina antecedente, y se constituye en el argumento de la función semiótica. A su vez, esta procesa el antecedente, mediante reglas propias de la función, para obtener una nueva representación, llamada consecuente. En este punto, es necesario aclarar que cada registro y representación aporta información distinta sobre el objeto matemático que la origina, y por lo tanto, es un reflejo parcial del mismo, por lo que no puede pensarse que la representación semiótica es igual al objeto matemático (D'Amore, Pinilla, Lori & Matteuzzi, 2015).

Se observa claramente la teoría subyacente al proceso de conversión y tratamiento, pero no una explicitación didáctica que permita a cualquier estudiante realizar estos procesos, para todos los registros, así que, como se decía en las líneas anteriores, queda pendiente para investigaciones futuras.

Respecto a cierto objeto matemático, Duval (2012) define los registros y ejemplos de representaciones en cada uno de estos, a partir de un determinado concepto, siendo este, en últimas, la forma de acceso al objeto inicial, de acuerdo con su paradoja cognitiva. En ese sentido, según Duval (2006) y Godino (2008), dado un objeto matemático, para comprender los registros y sus representaciones se deben tener en cuenta las siguientes consideraciones[12]:

- Sea O, el conjunto de objetos matemáticos, y C, el conjunto de conceptos matemáticos, entonces $\exists!$ C / C = O
- Sea r^m =registro semiótico m-ésimo, con m $\in$ N
- R^m (A) = representación semiótica i-ésima, con $\in$ N, de un objeto A en el registro semiótico r^m.
- Existen infinitas maneras de realizar transformaciones de tratamiento y de conversión.
- Además, si se produce un cambio de registro semiótico también se modifica la representación semiótica, en cambio si se produce un cambio de representación semiótica, no necesariamente cambia el registro. (Duval, 2006, pp. 23-24)

[12] Las consideraciones aquí presentadas, son una adaptación de la propuesta de Duval (2006).

Dadas las precisiones anteriores, se presenta el siguiente ejemplo:

- Objeto matemático: O
- Concepto inherente: Numero generalizado

Registro semiótico r^1: Lenguaje natural

- Representación semiótica R^1_1: El triple(o) de cierta cantidad
- Representación semiótica R^1_2: La suma de la misma cantidad tres veces

Registro semiótico r^2: Lenguaje aritmético

- Representación semiótica R^2_1:

Cantidad	El triple
1	1+1+1
2	2+2+2
3	3+3+3
.	.
.	.
.	.

- Representación semiótica R^2_2:

Cantidad	El triple
1	3(1)
2	3(2)
3	3(3)
.	.
.	.
.	.

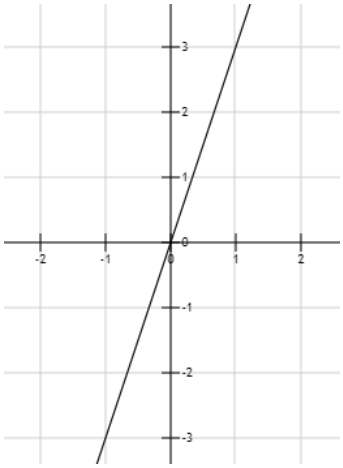
Registro semiótico r^3: Lenguaje algebraico

- Representación semiótica R^3_1: 3x
- Representación semiótica R^3_2: x+ x+ x

Registro semiótico r^4: Lenguaje figural

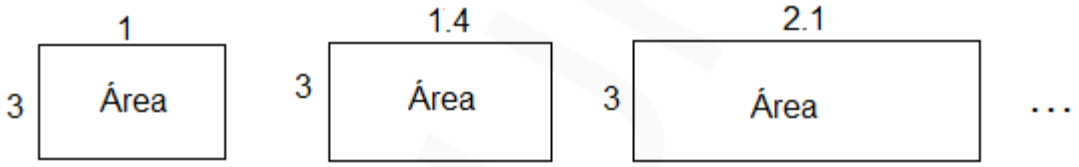
- Representación semiótica R^4_1:

REPOSITORIO UNEG



Registro semiótico r^5: Lenguaje pictográfico

- Representación semiótica $R^5{}_1$:

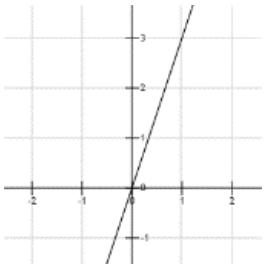


Para entender mejor el concepto de transformación semiótica, considere el siguiente ejemplo de una trasformación de tratamiento:

$R^3{}_1$	Tratamiento	$R^3{}_2$
x+ x+ x	→	3x

Se observa que la transformación de tratamiento, genera representaciones distintas, R_1 y R_2, en el mismo registro R^3

Ahora considere el siguiente ejemplo de una transformación semiótica de conversión.

$R^3{}_2$	Conversión	$R^4{}_1$
3x		

Nótese que la transformación de conversión, genera representaciones distintas, R_2 y R_1, en registros distintos, R^3 y R^4

Los dos ejemplos anteriores, permiten comprender que el cambio de registro, siempre implica un cambio de representación, pero el cambio de representación, no necesariamente implica un cambio de registro.

En síntesis, la transformación semiótica se refiere al proceso de tratamiento y conversión en los registros natural, algebraico, aritmético, pictográfico y figural, entendiendo el tratamiento, como la construcción de representaciones semióticas al interior de un mismo registro; la conversión, como la construcción de representaciones semióticas utilizando registros distintos, ambas transformaciones, representando al mismo objeto matemático, explícito a través su concepto, teniendo en cuenta que existen infinitas maneras de realizar transformaciones de tratamiento y de conversión para un mismo objeto. De esta forma, aprender a realizar transformaciones de tratamiento y conversión es importante para la comprensión adecuada de los problemas algebraicos, y la construcción de expresiones equivalentes a una dada, con el fin de resolverlos.

4.1.3.1. Nivel de algebrización intermedio

Según Palarea, el Álgebra se considera una parte de las matemáticas que

> Trata de la simbolización de las relaciones numéricas generales, de las estructuras matemáticas, y, de las operaciones de esas estructuras. En este sentido, el Álgebra

REPOSITORIO

> escolar se interpreta como una "aritmética generalizada" y como tal involucra la formulación y manipulación de relaciones y propiedades numéricas. (Citado en Rey, Quiroga & Martínez, 2012, p. 965)

En ese orden de ideas, para caracterizar la actividad algebraica, Godino (2012), ha estructurado la actividad algebraica, desde la perspectiva del EOS, en varios niveles, de los cuales, esta investigación se ocupa del intermedio. Este nivel de algebrización,

> Se caracteriza por la presencia de diferentes tipos de configuraciones ontosemióticas en las que intervienen prácticas, objetos y procesos que implican nuevos niveles de generalidad o de cálculo sintáctico, respecto a los niveles previos con que se viene de los procedimientos aritméticos, apoyado en representaciones simbólicas de los objetos correspondientes. (Godino, 2012, p. 52)

Lo anterior, también indica la intervención de los procesos de "unitarización, materialización y reificación implicados en los procesos de generalización y representación" (Godino et al., 2014, p.141). De esta manera, el nivel intermedio de algebrización para la secundaria, se relaciona con las distinciones ontosemióticas sugeridas por el EOS, particularmente en la presencia, uso y tratamiento de parámetros, tanto en actividades de tipo estructural como funcional.

Respecto a estas actividades, el EOS, precisa que el estudiante de secundaria debe comprender los distintos sentidos funcionales de la generalización, representada, por lo general, con una letra. Según Godino y Font (2003), dichos sentidos funcionales son: letra evaluada, letra ignorada, letra usada como objeto, letra usada como incógnita específica, letra usada como un número generalizado, letra usada como variable. Asimismo, respecto al concepto de signo igual, en una ecuación, deben comprender el sentido de equivalencia de las dos expresiones mediadas por dicho signo, más que, como un indicador de operacionalizar unilateralmente, la expresión que le precede a dicho signo.

Las actividades anteriores, en el nivel de algebrización intermedio, son condiciones, para que el estudiante pueda "aplicar y extender sus conocimientos previos de aritmética a expresiones algebraicas, razonar sobre y resolver ecuaciones con una variable, y representar y analizar relaciones cuantitativas entre variables dependientes e independientes" (Godino & Font, 2003, p. 36).

En síntesis, en el marco de la actividad algebraica de tipo transformacional, generacional y global, los tres criterios definitorios del nivel algebraico intermedio que se implementara en esta investigación son: la presencia de objetos algebraicos de tipo general indeterminados, los distintos tipos de registros semióticos y sus múltiples representaciones y las transformaciones aplicadas a dichos objetos, concretamente, operaciones, aplicación de axiomas o teoremas. La siguiente tabla, retoma los aspectos definitorios de la algebrización intermedia, abordados en esta sección.

Tabla 12. Nivel intermedio de algebrización en la resolución de problemas algebraicos

MACROPROCESO	TAREA	OBJETO ALGEBRAICO	PROCEDIMIENTO
Transformacional	Ejecución de algoritmos Descomposición de números Utilización de las relaciones inversas de las operaciones Aplicación de axiomas teoremas de las operaciones básicas, para simplificar ecuaciones, hasta la forma x= a Comprensión del significado de equivalencia de expresiones del signo	Propiedades de equivalencia, ecuaciones, patrones, expresiones algebraicas	La expresión algebraica, variable o incógnita, no solo se asume como punto de llegada, sino que se operacionaliza en los pasos de resolución, con los operadores aritméticos, es decir, se realizan operaciones aritméticas explícitas con las variables.

PREPRINT

	igual
	Interpretación de la interrelación de variables del enunciado del problema
Transformacional y generacional	Modelización del problema algebraico, a través de ecuaciones de la forma Ax + B = Cx + D
	Utilización de cantidades literales, para representar cantidades indeterminadas: valor faltante, numero general, variable
Global	Argumentación justificación de procedimientos, y planteamiento de conjeturas
	Representación, análisis y generalización de patrones, utilizando expresiones algebraicas

Fuente: Godino (2017). Adaptado.

Desde el punto de vista teórico, el análisis del nivel intermedio de algebrización, en el marco del EOS, permite identificar brechas o discontinuidades en la secuencia de configuraciones que integran los recorridos epistémicos de los respectivos procesos de análisis matemático (Godino, Contreras & Font, 2006). Tales brechas se refieren a objetos conceptuales, proposicionales, procedimentales y argumentativos de diferente grado de generalidad, es decir, objetos intensivos que emergen de otros intensivos, que permiten realizar los procesos transformacionales de tratamiento y conversión entre registros ontosemióticas implicados, a saber, los registros natural, algebraico, aritmético e icónico.

REPOSITORIO UNEC

Aquí, cabe hacer un paréntesis sobre lo mencionado en párrafos anteriores, respecto a las limitaciones de la transformación semiótica de Duval, por cuanto es de naturaleza descriptiva, no prescriptiva, es decir, no profundiza sobre los conceptos, procedimientos y argumentos que le permiten a un estudiante cualquiera, hacer dicha transformación. Al respecto, el EOS, reconoce estas discontinuidades, la dificultad que revisten para el progreso del aprendizaje, así como los aspectos que permiten cerrar dichas brechas y propone, precisamente, la construcción de niveles de algebrización, en un intento por acercarse más a la actividad algebraica y cerrar las brechas semióticas. No obstante, dichos niveles de algebrización, aunque suponen un avance teórico, siguen siendo descriptivos y no preescriben en detalle, los procedimientos, concretamente didácticos, para cerrar completamente las discontinuidades semióticas.

Por lo anterior, asumiendo una visión global de esta investigación, la exploración de los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica, desde la perspectiva del EOS, como objetivo general, se constituye en un acercamiento teórico didáctico más preciso, de los conceptos, procedimientos, y argumentos de la actividad matemática, para cerrar las discontinuidades ontosemióticas alrededor de la resolución de problemas algebraicos, como objeto.

4.2. Definición operacional

En esta sección se presenta la definición operacional de las categorías y subcategorías, presentando en cada una, criterios operativos, que dan cuenta de su apropiación didáctica. Así las cosas, en el siguiente subtema, se empieza con la definición operacional de primera categoría.

4.2.1. Saberes previos

En el presente trabajo investigativo, los saberes previos se refieren al dominio, tanto conceptual como procedimental de propiedades, operaciones básicas aritméticas, y sentido

algebraico, tales como los aspectos transformacionales, relacionales y de generalización que poseen los estudiantes de las instituciones focalizadas antes de la intervención didáctica. De manera más exhaustiva, también hacen parte de los saberes previos, nociones sobre la conversión semiótica de registros y las estrategias metacognitivas que posiblemente el estudiante utilice en su proceso de resolución de problemas algebraicos. No obstante, prescindiendo del estado en que se encuentren los estudiantes en torno a los aspectos anteriormente mencionados, se han establecido criterios de desempeño, a modo de referencia, que permitan visualizar los aprendizajes con que cuenta el estudiante antes de la intervención, para concertar de manera pertinente, los objetivos de aprendizaje en lo relacionado con la resolución de problemas algebraicos. En la siguiente sección, se describe la definición operacional para cada subcategoría de los saberes previos, así como sus referentes operativos.

4.2.1.1. Definiciones de las operaciones con números reales

Las definiciones de las operaciones aritméticas básicas se refieren a la significación matemática de la suma, la multiplicación y sus inversas. También implica conocer el significado de los números en el sistema de numeración decimal, el algoritmo correspondiente, y aplicarlo en la resolución de las operaciones mencionadas. Por esta razón, se construyeron los siguientes criterios operacionales que dan cuenta de las especificidades antes mencionadas:

- Comprende las definiciones de suma, multiplicación y sus inversas en los números reales
    - Reconoce el concepto de sumando, y el resultado obtenido, en la representación de problemas
    - Reconoce el concepto de minuendo y sustraendo, así como el resultado obtenido, en procesos de representación
    - Reconoce el concepto de multiplicando y multiplicador, y el resultado obtenido, en procesos de representación

    - Comprende el significado de los conceptos dividendo y divisor, y el resultado obtenido del algoritmo, en procesos de modelización y representación.
        - Entiende que la división del tipo a/0, con a E R, no está definida.

- Resuelve los algoritmos de la suma, multiplicación y sus inversos, en el conjunto de los números reales, teniendo en cuenta el valor posicional del sistema decimal

4.2.1.2. Axiomas y teoremas de los números reales

Tanto los axiomas, como los teoremas, se refieren a invariantes generales que rigen las operaciones entre los números reales, sin embargo, los axiomas no necesitan ser demostrados para ser aceptados. A partir de los axiomas, se deducen los teoremas de los números reales, los cuales determinan la forma de realizar las operaciones aritméticas básicas y permiten justificar o demostrar procesos algorítmicos en la transformación de expresiones numéricas en otras equivalentes. Para efectos de esta investigación, se han adaptado, operacionalmente, algunos axiomas y teoremas de los números reales, como referentes de desempeño, los cuales son:

4.2.1.2.1. De los signos

- Aplica el teorema de los signos, para resolver operaciones aritméticas.

4.2.1.2.2. De la igualdad

- Comprende los teoremas de reflexión, simetría y sustitución y los aplica para construir y transformar igualdades aritméticas.
- Reconoce el teorema de la unicidad, para aplicar la misma operación a ambos lados de la igualdad, sin afectarla.

4.2.1.2.3. De la suma

- Utiliza el axioma conmutativo en la manipulación estratégica de algoritmos
- Aplica el axioma asociativo en la manipulación estratégica de algoritmos
- Usa el axioma del inverso aditivo, para encontrar el termino desconocido en una ecuación aritmética del tipo a + x = b
- Operacionaliza el axioma del elemento neutro

4.2.1.2.4. De la resta

- Reconoce el teorema de la no conmutatividad de la resta de dos términos a y b
- Aplica el axioma asociativo en la manipulación estratégica de algoritmos
- Utiliza el axioma del inverso aditivo y multiplicativo para encontrar el termino desconocido en una ecuación aritmética del tipo a - x = b
- Operacionaliza el axioma del elemento neutro

4.2.1.2.5. De la multiplicación

- Utiliza el axioma conmutativo en la manipulación estratégica de algoritmos
- Usa el axioma asociativo en la manipulación estratégica de algoritmos
- Aplica el axioma distributivo respecto a la suma y resta, en la manipulación estratégica de algoritmos
- Operacionaliza el axioma del inverso multiplicativo, para resolver una ecuación del tipo cx=d, con a, b, c, d constantes.
- Identifica el axioma del elemento neutro

4.2.1.2.6. De la división

- Identifica el teorema de la no conmutatividad en la división de dos términos a y b.
- Operacionaliza el axioma del inverso multiplicativo, para resolver una ecuación del tipo c/x=d, x/a =b; con a, b, c, d constantes.
- Reconoce el axioma del elemento neutro

4.2.1.3. Noción algebraica

En esta investigación, el sentido práctico que cobra el concepto de noción algebraica, se refiere al uso operativo de conceptos, procedimientos y argumentos, estructurados en los saberes previos de los estudiantes, en torno a la identificación de patrones, o relaciones, en problemas aritméticos planteados, resolución de algoritmos de la suma, resta multiplicación, división, así como la combinación de estos, utilizando axiomas y teoremas de los números reales, tales como la asociatividad, conmutatividad, distributividad y el concepto de signo igual como equivalencia, de manera articulada, en la resolución de situaciones aritméticas.

Asimismo, para facilitar la operacionalización, teniendo en cuenta los macroaspectos de tipo transformacional, generacional y global, de la noción algebraica, se han definido referentes de dicha subcategoría, para partir de un diagnóstico objetivo, y garantizar la pertinencia de las estrategias metacognitivas y la transformación semiótica. Estos referentes operativos de noción algebraica son:

4.2.1.3.1. Transformación

- Modela un problema aritmético como una ecuación aritmética.
- Construye expresiones aritméticas equivalentes a otra expresión aritmética dada, mediante las propiedades aritméticas.
- Utiliza la jerarquía de operaciones aritméticas en la ejecución de algoritmos
- Utiliza estratégicamente las propiedades aritméticas en la sintetización progresiva del modelo aritmético o expresión concebida inicialmente.

4.2.1.3.2. Generación

- Construye patrones numéricos utilizando una regla general dada y lo grafica en pares ordenados.

- Expresa una misma información en el registro verbal, icónico y aritmético
    - Elabora una representación icónica para una expresión o ecuación aritmética dada
- Resuelve problemas verbales aplicando al menos una vez cualquier operación aritmética, e incluyendo reorganización de la información enunciada.

4.2.1.3.3. Globalización

- Comprende el significado de signo igual, como una equivalencia o reflexión entre dos expresiones.
- Analiza secuencias aritméticas en las tablas de sumar y multiplicar
- Explica el procedimiento realizado para representar o modelar situaciones y sus características.
- Justifica procesos aritméticos y de resolución de problemas
- Formula conjeturas sobre un caso particular, demostración o generalización, o forma de abordaje
- Propone criterios invariantes en los procesos de resolución de operaciones básicas, para reutilizarlos en un conjunto de situaciones.
    - Identifica relaciones de dependencia invariantes entre los términos del mismo valor temporal de dos secuencias aritméticas.
- Describe informalmente expresiones o símbolos para representar operaciones o procesos repetitivos

4.2.2. Estrategias metacognitivas

En esta investigación, las estrategias metacognitivas se refieren al conjunto de conocimientos declarativos y procedimentales, que se espera sean aprehendidos por los estudiantes de las seis instituciones educativas focalizadas, para manipular conscientemente sus procesos cognitivos en la resolución de problemas. Dichas estrategias tienen como eje

de análisis el lenguaje natural o verbal, dado que, siempre es posible representar en este registro la información contenida en los otros. Esta característica es, especialmente ventajosa, si se tiene en cuenta que la mayoría de los estudiantes analizan mejor la información dada en lenguaje natural (Olazábal, 2013). En síntesis se sugiere que, dado que es posible expresar cualquier concepto institucional y personal de manera verbal, el análisis exhaustivo de dicho rastro verbal permite identificar los procesos cognitivos del sujeto, para poder manipularlos, validarlos o reorientarlos conscientemente.

Operativamente hablando, las estrategias metacognitivas implican el análisis de cada paso adicional explícito, pensamiento o concepto sobre el abordaje de un determinado problema en cualquier fase del mismo, desde el comienzo hasta su resolución misma, de tal manera que se pueda cambiar la concepción y forma de abordaje del problema, sea para resolverlo desde otra perspectiva o conjeturar sobre cierto caso particular, una intento de generalización o demostración. En síntesis, se somete a crítica metacognitiva, los conceptos, relaciones y procedimientos, en adelante CRP, que están en la forma de lenguaje natural, icónico o algebraico evocables y expuestos en el momento, así como a los pasos secuenciales que se van concretando en la solución del problema.

Para precisar los elementos definitorios de las estrategias metacognitivas, se han establecido criterios operativos de análisis metacognitivo, desde los aspectos establecidos en las subcategorías de análisis, a saber, planeación, regulación y evaluación, que, en la perspectiva de esta investigación, son evidentes en el análisis de los procesos de interacción del sujeto-objeto, de manera transversal y desde el análisis de la autopercepción del sujeto de forma específica.

4.2.2.1. Criterios operativos generales de análisis metacognitivo desde la interacción sujeto-objeto

En esta sección se presentan algunos criterios operativos de analisis metacognitivo desde la interacción sujeto-objeto, propuestos por el autor. Estos consisten en el desdoble y fraccionamiento sintáctico, semántico y pragmático del objeto lingüístico.

4.2.2.1.1. Metacognición de primer nivel

- Utiliza la introspección para favorecer la emergencia de CRP[13] , derivados de fragmentos del enunciado-problema, por recordación o recordación-construcción, mediante el enfoque analítico.

    - Activa recuerdos en cualquiera de las formas de representación mental, a partir de los trazos del instrumento de digitación desde las expresiones lingüísticas: operadores, términos algebraicos, partículas icónicas.

    - Recuerda y construye continuamente nuevos CRP, dado que siempre existe uno adicional de alto valor resolutivo.

    - Reescribe conscientemente un problema a nivel de tratamiento y conversión semiótica, que constituya un avance hacia la comprensión de la relación de la variable desconocida con las variables conocidas.

        - Identifica un objeto matemático "O" en determinado registro y representación.

        - Describe el objeto "O" a través de al menos una proposición "P"

        - Utiliza estricta e inhibidamente los CRP contenidos en la proposición para recrear el objeto matemático en el registro y representación inicial e identifica si los CRP son insuficientes, poseen un exceso teórico o excluyen totalmente el objeto.

[13] Conceptos, Relaciones conceptuales, Proposiciones

        - Delimitar y ajustar continuamente la proposición descriptora para que se acerque al objeto matemático inicial, de manera que P represente lo más cerca posible a O, aunque nunca lleguen a representar el mismo contenido semántico. Tal como lo afirmo Duval (2016), la representación nunca será exactamente igual a al objeto, aunque sí se puede aproximar continuamente.

- Evalúa los CR desde la macroestructura gramatical semiótica hasta la estructura de mínima unidad gramatical semiótica del problema.

    - Conserva las ideas en la lectura del problema: reemplaza las partículas deícticas por el sustantivo y utiliza el significado del conector que separa dos proposiciones, para la construcción de ideas interproposicionales parciales.

    - Utiliza el significado inhibido de forma jerárquica desde la semántica global del problema, en el proceso de interrelación semántica de CRP del problema.

        - Identifica cada concepto, propiedad y ejemplo, de tipo personal, institucional o académico, dentro o fuera del contenido sintáctico del problema y lo analiza fraccionadamente, desde las macrounidades semánticas hasta la unidad mínima semiótica del problema, de manera aislada al significado que sugiere al relacionarla con el resto de proposiciones del problema.

        - Reinterpreta el problema teniendo en cuenta la identificación realizada en el criterio anterior.

    - Analiza el problema desde el plano general

PREPRINT

- Asigna estratégicamente un artículo, conjunción, preposición, conector, verbo, sustantivo, adverbio de la misma expresión como invariante y al resto de la expresión, símbolos para indicar su carácter variable y análisis estructural general. Ejemplo: El “x” de “y”.

- Analiza sus relaciones semánticas descendentemente del nivel macro al microestructural.

- Extrapola una expresión lingüística, desde el plano general a un particular, reemplazando los símbolos variables por expresiones distintas a las del problema, pero de interrelación conceptual semántica, similar y conocida, para favorecer la comprensión de la expresión inicial.

- Adiciona o sustrae estratégicamente CRP en cualquier fase explicita de inhibición, para facilitar la comprensión conceptual y procedimental de los pasos a realizar.

- Proyecta el carácter teleológico del problema en la planeación de pasos progresivos.

  - Anticipa a grandes rasgos cuales son los CRP intermedios que permiten asegurar que, al menos desde la teoría, se sabe la relación de un paso actual, con los anteriores y siguientes a ejecutar, siendo la construcción de cada paso un acercamiento progresivo a la solución.

    - Programa sus pasos de solución teniendo en cuenta lo siguiente: hay ciertas condiciones iniciales X_0 y un objetivo X_i. Se asume que para llegar a X_i, mirando en retroceso desde X_i hasta X_0, se necesita

REPOSITORIO

primero saber o calcular las variables a, b, c; denominadas X_{i-1}, a su vez, para saber al menos una de las variables de X_{i-1}, se necesita saber o calcular otras d, e, f variables, de $X_{i-2,}$ así, hasta llegar a las variables de X_{i-k}, con i=k, es decir, X_0.

- Sentido variacional y de movimiento de variables (efecto de funcionamiento en acto), para visualizar la situación problema y mejorar la comprensión, así como su asociación o conversión a otros registros y construir la forma analítica-abstracta del problema.

Con todo lo anterior, es preciso señalar que la interrelación semántica, se refiere, en el lenguaje natural, a la cohesión de sintaxis y de significado entre dos proposiciones, mediadas en muchos casos, a través de conectores, partículas deícticas, conjunciones gramaticales, o signos de puntuación. Estas partículas gramaticales, pudieran compararse análogamente con un operador, por cuanto cumplen una función parecida: dadas un par de proposiciones entrantes cualesquiera, antes y después de cierta conjunción gramatical, dicha conjunción siempre devuelve el mismo significado de relación entre ambas proposiciones. Esta propiedad es útil para establecer conscientemente estrategias de comprensión lectora asociadas a la sintetización de información, para modelar problemas verbales.

4.2.2.1.1.1. Metacognición evaluativa interacción sujeto-objeto

En cuanto a los constructos de tipo personal en relación con conceptos, propiedades, ejemplos y procedimientos, alrededor de cierto CRP del problema algebraico, estos deben someterse a ciertos criterios, denominados en esta investigación prelógicos, pues no alcanzan a llegar a un nivel lógico propiamente dicho, pero si permiten aproximarse al mismo. Estos criterios prelógicos permiten asignarle mayor o menor credibilidad a los constructos de tipo personal para ser integrados al proceso resolutivo, y, finalmente, si son validados por los métodos de demostración lógicos, entonces, dichos

constructos resolutivos serán aceptados por la comunidad matemática. Los criterios prelógicos y de demostración desde la lógica proposicional son:

- Criterios prelógicos
    - Establece una conjetura, sea concepto, propiedad, ejemplo o procedimiento, a partir de la observación de ejemplos particulares.
    - Otorga mayor crédito a la conjetura creada, a partir de su verificación en nuevos casos particulares.
    - Reconoce la estructura sintáctica semántica general de un CRP referente institucional, como criterio de evaluación de los construidos personalmente como caso análogo:
        - Construye un CRP personal, tal que coincide con el referente institucional en sus interrelaciones semánticas intraproposicionales, en las relaciones claramente definibles de sus partes respectivas.
- Criterios de demostración desde la lógica proposicional.
    - Aplica las reglas de inferencia, ponendo ponens, tollendo tollens
    - Utiliza el significado de los conectores lógicos, a partir de las tablas de verdad.
    - Justifica razonamientos de manera directa y por reducción al absurdo

4.2.2.1.2. Metacognición de segundo nivel

REDIMEC

- Expresa proposicionalmente las autosugestiones, preconcepciones y formas de razonar utilizadas en la ejecución de los constructos metacognitivos de nivel uno, para convertirlas en objeto de análisis.

    - Analiza críticamente las proposiciones anteriores, mediante la metacognición de primer nivel, para para identificar la línea subjetiva que se está tomando, y las plausibles, en el universo de caminos o concepciones de abordaje posibles del problema en cuestión.

Cabe aclarar, que los criterios operativos generales, expuestos anteriormente, son producto de la reflexión introspectiva del investigador, en su experiencia profesional y ocupacional, como resolutor de problemas matemáticos de nivel escolar y univesitario, así como del análisis de procesos metacognitivos de estudiantes y docentes del área. Están fundamentados en el poder comunicativo del concepto, relacionándose de esta manera, con la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2006) y la Teoría de los Campos Conceptuales, de Vergnaud (2016). Quizá, en futuras investigaciones, se trabaje en un modelo formal, para metacognizar de forma efectiva en la resolución de problemas, no restringidos al álgebra escolar.

4.2.2.2. Criterios operativos generales de análisis metacognitivo desde la autopercepción

Volviendo al sentido operacional de las estrategias metacognitivas, teniendo en cuenta los criterios anteriores y la clasificación dada por Brown (citado en Moreno & Daza, 2014) en el componente declarativo, procedimental y condicional, como componentes generales o aplicables en cualquier fase del proceso resolutivo, se tomaron los descriptores de desempeño metacognitivo, del Metacognitive Awearsnes Inventory, MAI, validado en Colombia por Huertas (2014) y se adaptaron, de la siguiente manera:

4.2.2.2.1. Conocimiento declarativo

- Comprendo mis fortalezas y debilidades intelectuales.

- Sé qué clase de información es más importante aprender.
- Soy bueno en organizar información.
- Sé lo que el maestro espera que aprenda.
- Soy bueno en recordar información.
- Tengo control sobre cuán bien aprendo.
- Soy un buen juez de cuán bien comprendo algo.
- Aprendo más cuando estoy interesado en el tema.

4.2.2.2.2. Conocimiento procedimental

- Trato de utilizar estrategias que han funcionado en el pasado.
- Tengo un propósito específico para cada estrategia que utilizo.
- Estoy consciente de qué estrategias utilizo cuando estudio.
- Me doy cuenta del uso de estrategias de aprendizaje útiles automáticamente.
- Voy más despacio cuando me encuentro con información importante.
- Enfoco conscientemente mi atención en la información importante.
- Me centro en el significado y el significado de la nueva información.
- Creo mis propios ejemplos para hacer la información más significativa.
- Hago dibujos o esquemas para ayudarme a comprender al aprender.
- Trato de traducir la nueva información en mis propias palabras.
- Utilizo la estructura organizativa del texto para ayudarme a aprender.
- Me pregunto si lo que leo está relacionado con lo que yo ya sé.
- Trato de romper estudiando abajo en pasos más pequeños.
- Me centro en el significado general en lugar del significado detallado.

4.2.2.2.3. Conocimiento condicional

PREPRINT

- Aprendo mejor cuando sé algo acerca del tema.
- Utilizo diferentes estrategias de aprendizaje dependiendo de la situación.
- Puedo motivarme para aprender cuando lo necesito.
- Utilizo mis fortalezas intelectuales para compensar mis debilidades.
- Sé cuándo cada estrategia que utilizo será más efectiva.

4.2.1.3. Criterios operativos por fase de análisis metacognitivo desde la autopercepción

En esta sección se presentan algunos criterios operativos de analisis metacognitivo desde la interacción sujeto-objeto, propuestos por el autor. Estos consisten en el desdoble y fraccionamiento sintáctico, semántico y pragmático del objeto lingüístico.

4.2.1.3.1. Planeación

En esta investigación, la planeación como estrategia metacognitiva se refiere, concretamente, al uso de conocimientos disponibles en los saberes previos, por parte del estudiante, de forma consciente, para organizar las ejecuciones progresivas que le permitan avanzar en la solución del problema algebraico.

Para operacionalizar esta subcategoría, se han adaptado los criterios del Metacognitive Awearsnes Inventory (MAI), desarrollado por Schraw y Denisson (citado en Huertas, 2014), que consiste en un conjunto de descriptores operativos de la planeación metacognitiva, los cuales han sido validados por Huertas (2014), para estudiantes colombianos. Estos criterios son:

- Autorregulo la velocidad de los tiempos al aprender para tener suficiente tiempo.
- Organizo la comprensión, desde lo específico a lo general en el problema
- Pienso lo que debo realmente aprender antes de empezar una tarea
- Establezco objetivos específicos antes de empezar una tarea.
- Me pregunto yo mismo acerca del material antes de empezar.

- Pienso en varias maneras de resolver un problema y escoger la mejor.
- Leo las instrucciones con cuidado antes de empezar una tarea.
- Organizo mi tiempo para lograr mejor mis objetivos.

4.2.2.3.2. Regulación o control

Operacionalmente, esta subcategoría se refiere a los procesos de monitoreo de los pensamientos y acciones evidentes de los estudiantes, en el transcurso del proceso de resolución de problemas algebraicos. Supone la revisión crítica de las ejecuciones, ya predeterminadas, hasta cierto punto, en la fase de planeación. Con el fin de precisar su descripción operacional, se tomó como referencia, el anteriormente mencionado MAI, para realizar la respectiva adaptación a esta investigación, de la siguiente manera:

- Me pregunto periódicamente si conozco mis objetivos.
- Considero varias alternativas a un problema antes que conteste.
- Me pregunto si he considerado todas las opciones al resolver un problema.
- Reviso periódicamente para ayudarme a comprender las relaciones importantes.
- Me doy cuenta analizando la utilidad de las estrategias mientras estudio.
- Me doy cuenta deteniéndome para verificar regularmente mi comprensión.
- Me pregunto yo mismo acerca de cuán bien lo hago mientras aprendo algo nuevo.
- Solicito ayuda a otros cuando no comprendo algo.
- Cambio de estrategias cuando fallo al comprender.
- Reevalúo mis suposiciones cuando estoy confundido.
- Paro y vuelvo a leer sobre la nueva información que no es clara.
- Paro y vuelvo a leer cuando estoy confundido.

4.2.2.3.3. Evaluación

PREPRINT

En esta investigación, se refiere al proceso de análisis para emitir juicios sobre la propia actividad cognitiva de resolución de problemas algebraicos, si el problema fue resuelto correctamente, que argumentos lo justifican, así como posibles alternativas de resolución o concepciones, con las que también pudo haberse abordado. Operacionalmente, se adaptaron los descriptores para dicha subcategoría, mencionados en el MAI, de la siguiente manera:

- Sé cuán bien lo hice una vez que termino un examen.
- Me pregunto si había una manera más fácil de hacer las cosas después de haber terminado una tarea.
- Resumo lo que he aprendido después de terminar.
- Me pregunto cuán bien logro mis objetivos una vez que he finalizado.
- Me pregunto si he considerado todas las opciones después de resolver un problema.
- Me pregunto si aprendí tanto como lo que podría haber aprendido una vez terminada una tarea.

Para finalizar, los descriptores operativos de metacognición están solapados, es decir, no pueden tratarse de manera disjunta, más bien, es posible aplicar un determinado descriptor, en cualquier fase de la resolución de problema algebraico.

4.2.3. Transformación semiótica

En esta investigación, la transformación semiótica se concibe como una técnica de análisis desde las macro unidades de significación, hasta las mínimas unidades semánticas que conforman un estado particular, en la trazabilidad de la resolución de un problema algebraico escolar, partiendo de la representación inicial y la posibilidad de expresión a nivel de tratamiento y conversión, en los siguientes registros: natural o verbal, algebraico,

aritmético e icónico[14]. A partir de dicha representación inicial, teniendo presente el dominio conceptual y propiedades aritméticas, en forma procedimental, se pretende expresar en distintas representaciones y/o registros, la relación existente entre cantidades desconocidas y conocidas del problema, hasta obtener la representación final, con la que queda resuelto el problema.

Esta perspectiva operativa de la resolución, permite concebir un problema algebraico, en el contexto de la presente investigación, como un enunciado con coherencia y cohesión sintáctico semántica, representado en, al menos, uno de los siguientes registros: natural o verbal, algebraico, aritmético e icónico, que describe la relación de equivalencia lineal, entre cantidades desconocidas y conocidas, con el objetivo de volver conocidas las cantidades desconocidas, hallando el valor particular de la variable, que satisface la mencionada relación de equivalencia, a través de la conversión entre, al menos, dos representaciones a nivel de tratamiento y conversión.

Para entender la definición anterior, es necesario precisar los siguientes conceptos, puramente operacionales:

- Cantidad desconocida o general: se compone de un coeficiente real, seguido de la variable o incógnita, con exponente igual a uno.
- Cantidad conocida o constante: se compone de un coeficiente real, seguido de la variable con exponente nulo, o simplemente un número.
- Valor particular: cualquier número que reemplaza la variable en la relación de equivalencia o ecuación.

Dadas las precisiones anteriores, con el fin de ser más específico en la operacionalización de la conversión semiótica para la resolución de problemas algebraicos, se define operacionalmente la subcategoría niveles de algebrización.

Valga aclarar que los criterios operacionales de dichos niveles no pueden entenderse como un constructo operacional de máxima densidad teórica, pues, cada referente puede desglosarse en nuevos subrreferentes, en un proceso continuo, similar a la búsqueda de un nuevo número racional, en el lugar geométrico comprendido por dos números racionales

[14] Este registro comprende el pictográfico y figural, mencionado por Duval (2016).

cualesquiera. Más bien, los referentes construidos deben utilizarse como lineamientos generales de guía para resolver problemas algebraicos escolares, y, colateralmente, potenciar en el resolutor su intuición algebraica.

4.2.3.1. Nivel de algebrización uno

El nivel de algebrización uno, desde la perspectiva del EOS, se refiere, en primera instancia, al dominio de los referentes operativos de las subcategorías de análisis que estructuran la categoría de saberes previos, a saber, operaciones aritméticas básicas, propiedades aritméticas, y sentido algebraico. Además, implica la comprensión previa de ciertos conceptos algebraicos, tales como variable, incógnita, coeficiente, despeje, axioma, teorema, etc. y de la estructura semántica, sintáctica y pragmática del problema, sus conceptos o ideas esenciales, como requisitos parciales para la resolución de problemas algebraicos (Godino, 2012).

Además, de manera general se entiende que las variables son separadas por los operadores de adición o sustracción, y la variable no referenciada, no tiene designación algebraica en la enunciación del problema.

En este nivel de algebrización se reconoce la generalidad de los objetos intensivos de grado 2, de manera explícita mediante el lenguaje natural, numérico, icónico o gestual, pero sin operar cuantitativamente con estos objetos. Además, en tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero en un lenguaje diferente al simbólico (Godino et al., 2012).

4.2.3.2. Nivel de Algebrización dos

Este nivel de algebrización se manifiesta en la intervención de variables indeterminadas o expresadas con lenguaje simbólico para referir a los intensivos de grado 2, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal. En tareas estructurales

las ecuaciones son de la forma $Ax + B = C$ (A, B, C $\in$ R). En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero "no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión" (Godino et al., 2012, p.19).

4.2.3.3. Nivel de algebrización tres

En este nivel de algebrización intervienen objetos intensivos de grado 2 y su representación de forma simbólica, con operaciones y transformaciones entre ellos (de equivalencia, por ejemplo). Lo anterior implica el tratamiento de ecuaciones, operación con incognitas y aplicación de axiomas y propiedades para resolver ecuaciones del tipo $Ax + B = Cx + D$ (A, B, C, D $\in$ R) y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones. Según Filloy y Rojano (citado en Godino et al., 2012) el elemento distintivo entre el nivel de algebrización 2 y 3 es la resolución de ecuaciones del tipo 3x+5 = 10, para el primer caso, mientras que las ecuaciones en las que la incógnita está en ambos miembros de la igualdad requieren del nivel de algebrización 3, para su resolución.

Concretamente, los referentes para facilitar el proceso de conversión semiótica y su delimitación operacional a los niveles de algebrización propuestos por el EOS, son:

- Identifica la relación de dependencia entre las variables conocidas y desconocidas del problema en lenguaje natural, y las expresa a través de una ecuación algebraica

Cuando hay una sola variable en el enunciado

  - Representa con números y letras la variable solicitada en el enunciado, utilizando marcadores lingüísticos presentes en el registro natural.
  - Relaciona la variable y la(s) constante(s) dada(s) en una ecuación, utilizando marcadores lingüísticos.

- Reconoce nueva información que aporta la nueva representación construida.
- Realiza procesos transformacionales, aplicando propiedades aritméticas, para sintetizar la ecuación inicial, hasta obtener la forma x= a, donde "a" es el valor de la variable solicitada.
- Traduce el valor de la variable encontrada, a la representación original del problema.
- Evalúa el sentido de la solución, en el contexto del problema
- Plantea conjeturas, sobre propiedades, casos particulares, caso general o demostración, previo uso de estrategias metacognitivas.

Cuando hay al menos dos variables en el enunciado

- Asigna a la variable no referenciada en el problema, una letra representativa, previa identificación de marcadores lingüísticos en el registro natural.
- Representa las demás variables del problema, incluyendo la solicitada, en términos de la representación asignada a la variable.
- Relaciona las variables representadas con las constantes del problema a través de una ecuación, previa identificación de marcadores lingüísticos en el registro natural.
- Reconoce nueva información que aporta la nueva representación relacional construida.
- Realiza procesos transformacionales, aplicando propiedades aritméticas, para sintetizar la ecuación inicial, hasta obtener la forma x= a, donde "a" es el valor de la variable solicitada.

- Representa icónicamente la relación entre variables expresadas en el lenguaje natural y viceversa.

PREPRINT

  - Reconoce y explica los marcadores lingüísticos institucionales, para asignarle a cierta expresión verbal, su correspondiente asociación icónica y viceversa.
  - Reconoce nueva información que aporta la nueva representación construida.
    - Evalúa el sentido de la nueva representación en el contexto del problema
    - Formula conjeturas, sobre propiedades, casos particulares, caso general o demostración, previo uso de estrategias metacognitivas.

- Encuentra casos aritméticos particulares, con la misma estructura de la relación propuesta entre variables, dada el lenguaje natural y viceversa.

  - Utiliza marcadores lingüísticos para identificar la(s) variable(s), y asignarle distintos valores numéricos número en varias iteraciones, y con la constante dada, forma una ecuación, sin importar su valor de verdad.
  - Explica la relación entre variables dadas a través del análisis de dichos casos concretos.
  - Reconoce nueva información que aporta la nueva representación construida.
    - Evalúa el sentido de la nueva representación en el contexto del problema
    - Formula conjeturas, previo uso de estrategias metacognitivas.

- Encuentra el término algebraico general, a partir de una secuencia aritmética y viceversa.

  - Prueba con ensayo y error utilizando las operaciones básicas, las relaciones entre un término aritmético y su consecutivo, y la comprueba o refuta en nuevas duplas de términos aritméticos.
  - Una vez encontrado el término algebraico general, predice el término aritmético correspondiente a una posición cualquiera de la secuencia.
  - Explica el sentido variacional subyacente a una representación algebraica.

PREPRINT

- Reconoce y explica la información nueva que aporta la nueva representación construida.
  - Evalúa el sentido de la nueva representación en el contexto del problema
  - Formula conjeturas, previo uso de estrategias metacognitivas.

- Construye al menos un caso aritmético que represente la relación de variables dadas inicialmente en el registro icónico y viceversa.

  - Adiciona o sustrae variables icónicas, como parte del proceso transformacional en cualquier fase de relación de dichas variables.
  - Reconoce y justifica propiedades aritméticas en forma de ecuación, que relacionan las variables que componen el registro icónico.
  - Rastrea nueva información aportada por el análisis de la representación aritmética construida
    - Evalúa el sentido de la nueva representación en el contexto del problema
    - Formula conjeturas, previo uso de estrategias metacognitivas.

- Expresa mediante una ecuación o expresión algebraica, las relaciones entre variables expresadas el registro icónico (tablas, figuras, plano R_2) y viceversa.

  - Identifica en una tabla de valores aritméticos que relaciona la variable dependiente e independiente, plano R_2, el término o expresión algebraica general
  - Representa una ecuación algebraica mediante una tabla de valores aritméticos.
  - Representa la tabla de valores aritmético en un plano R_2
  - Adiciona o sustrae variables icónicas, como parte del proceso transformacional en cualquier fase de relación de dichas variables.

REPOSITORIO

- Describe la nueva información que puede obtener, del análisis de la nueva representación
  - Evalúa el sentido de la nueva representación en el contexto del problema
  - Formula conjeturas, previo uso de estrategias metacognitivas.

- Reescribe la relación entre las variables del problema, a través de diversas representaciones a nivel de tratamiento.

  - Reconoce que existen procesos transformacionales entre el mismo registro a partir de propiedades rectoras de dichos procesos.
  - Aplica las propiedades de tratamiento, tales como marcadores intralingüísticos, para reducir, sintetizar una representación y facilitar su aprehensión.
  - Describe la nueva información que puede obtener, del análisis de la nueva representación
    - Evalúa el sentido de la nueva representación en el contexto del problema
    - Formula conjeturas, previo uso de estrategias metacognitivas.

5. Matriz de Variables / Categorías

En esta sección, se clasifican las categorías de análisis, descritas en el apartado anterior, en función del objetivo específico que desarrollan, de las subcategorías que las desagregan conceptualmente, de las fuentes de donde se extrae información relativa a estas, y en función de las técnicas que hacen posible la recolección de datos e información frente a cada categoría de análisis.

REPOSITORIO

Tabla 13. Matriz de Variables-Categorías

Objetivo específico	Categoría	Subcategoría	Conceptualización	Fuente	Técnica
Identificar los saberes previos en la resolución de problemas algebraicos, fundamentados en definiciones, propiedades, operaciones con números reales y su noción algebraica	Saberes previos	Definición de las operaciones en números reales Axiomas y teoremas de los números reales Noción algebraica	Nociones y concepciones en forma de modelo mental, analogías, imágenes; o proposicional (no en acto), prerrequisitos para comprender y posibilitar la resolución de un problema (Ausubel, 2012). En el ámbito algebraico, se refieren a las definiciones de operaciones con números reales, comprensión de propiedades de R, así como nociones algebraicas (Palarea, 2012). Aunque son construidos en acto (contexto de problemas), al asimilarse y acomodarse, se convierten en no en acto (Piaget, citado en Lacasa, 2015; Vergnaud, 2016). Sistema de creencias (no en acto, en un problema P) sobre la forma en que los estudiantes, incluso, cualquier persona, gestiona las nociones anteriormente mencionadas (Schoenfeld, citado en Campos, 2006; Esquivel, citado en Araya & Sánchez, 2008; Montes, Flores, Carmona, Huitrado & Flores, 2014; Otero & Elichiribehety, 2016).	Estudiantes de grado octavo de seis instituciones educativas del municipio de Chigorodó	Escala Likert mediante Google Forms Grupo focal mediante Google Meet
Describir las estrategias metacognitivas implicadas en la resolución de problemas algebraicos, desde los aspectos de la planeación, regulación o control y evaluación de tareas.	Estrategias metacognitivas	Planeación Regulación o control Evaluación	Procedimientos fundamentados en el autoconocimiento de las propias operaciones y procesos mentales (creencias sobre la forma de usar los saberes previos) para utilizarlas, readaptarlas y/o cambiarlas cuando así lo requieran las metas, mediante los procesos de planeación, regulación y evaluación. Su unidad de trabajo son los saberes previos, que se procesan (en acto y no en acto) mediante técnicas heurísticas, razonamiento plausible, formulación de hipótesis, tanteo y contraejemplo, para generar avances intermedios en la solución de un problema (Rodríguez, 2005; Gusmao, 2006; Weinstein, Mayer, Brown y Flavell, citados en Osses & Jaramillo, 2008).	Estudiantes de grado octavo de seis instituciones educativas del municipio de Chigorodó	Escala likert de habilidades metacognitivas, MAI, (Huertas, 2014) Grupo focal mediante Google Meet
Interpretar la transformación semiótica de registros de representación en la resolución problemas algebraicos, con base en los niveles uno, dos y tres de algebrización.	Transformación semiótica	Nivel de algebrización I Nivel de algebrización II Nivel de algebrización III	Cambio de representación de un objeto abstracto, mediante funciones semióticas de tratamiento y/o conversión en los registros natural, algebraico, aritmético, pictográfico y figural. Su unidad de interpretación son los productos de la aplicación de estrategias metacognitivas (avances intermedios y el objetivo). Particularmente, en el caso de los registros aritmético y algebraico, para el nivel de bachillerato, los tres niveles de algebrización implican procesos de tratamiento y conversión (Duval, 2012, D´Amore, 2012; Godino et al., 2015; Vergnaud, 2016).	Estudiantes de grado octavo de seis instituciones educativas del municipio de Chigorodó	Escala Likert mediante Google Forms Grupo focal mediante Google Meet

CAPÍTULO III. FUNDAMENTACIÓN METODOLÓGICA DE LA INVESTIGACIÓN

RED-UNEOT

En este capítulo se exponen los aspectos metodológicos que se definirán para la naturaleza de la investigación, el tipo de investigación, el diseño de investigación, la población y muestra, técnicas e instrumentos de recolección de información, validez y confiabilidad de los instrumentos, y técnicas de análisis de los datos.

En primer lugar, en el apartado "Naturaleza de la investigación", se indica que el paradigma es plurimetódico, con dominancia cuantitativa-cualitativa y el enfoque es empírico-analítico, interpretativo, con los argumentos que sustentan dicha elección. En segundo lugar, en el apartado "Tipo de investigación", se muestra que este es analítico así como los respectivos argumentos que lo sustentan. En tercer lugar, coherentemente con el tipo de investigación elegido, se plantea un diseño analítico donde se explica la trazabilidad de procedimientos metodológicos seguidos, desde la elección del paradigma hasta el proceso de triangulación de los resultados obtenidos por los instrumentos, desde cada método. En cuarto lugar, se realiza una breve descripción de la población así como los criterios de inclusión y exclusión de integrantes de la misma, además, se muestra el procedimiento cuantitativo y cualitativo para la escogencia de la muestra y submuestra: la primera con base en la ecuación de muestreo proporcional y la segunda, de manera intencional y por conveniencia.

En quinto lugar, las técnicas de recolección de la información que se utilizarán son prueba tipo Likert y el grupo focal, con base en los cuales se diseñarán los instrumentos correspondientes, que incluyan los aspectos disciplinares y metodológicos tomados de las categorías de análisis y los objetivos de investigación previamente establecidos. En sexto lugar, se definirán los criterios de validez y confiabilidad, referentes a la construcción del instrumento, por el método cuantitativo; así como los criterios de credibilidad y transferibilidad, por el método cualitativo.

Por último, se describirá brevemente la técnica de análisis utilizada para el procesamiento cuantitativo, mediante el software *Statistical Package for the Social Sciences* SPSS; así como el software ATLAS.TI, para el procesamiento de datos cualitativos y la posterior triangulación concurrente con los resultados parciales obtenidos de cada línea metódica.

1. Naturaleza de la investigación

En esta investigación se utilizará el paradigma plurimetódico con dominancia cuantitativa-cualitativa, para analizar aspectos integrales de los componentes que se estructuran en la resolución de problemas algebraicos, a saber, saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica.

Asimismo, el enfoque será empírico-analítico e interpretativo, con base en la revisión teórica de la literatura alrededor de las categorías de estudio, descripción y comprensión de los aspectos contextuales de las mismas, derivados de los datos recogidos por los instrumentos.

En ese sentido, inicialmente se analizarán los aspectos conceptuales del objeto de investigación desde el aspecto cuantitativo, el cual, según Bryman (citado en Binda & Balbastre, 2013), consiste en

> aplicar un marco de trabajo establecido a priori sobre el objeto de su investigación, donde las teorías y conceptos existentes suponen el punto de partida para la investigación y que se implica lo menos posible en el contexto social donde se desarrolla el fenómeno a ser estudiado. (p. 180)

Por lo tanto, se llevará a cabo un proceso revisión y análisis bibliográfico sobre el problema, el estado del arte y marco teórico frente a los aspectos medulares de esta investigación a saber, los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica, en la resolución de problemas algebraicos.

Sin embargo, cabe anotar que la tarea fundamental del investigador social no es solamente conocer las concepciones teóricas previas, antecedentes, el estado del problema en la literatura, y obtener resultados, conclusiones con base en estos aspectos, sino que debe enriquecerlas con la comprensión de la experiencia vivencial, desde la perspectiva de quienes la sienten, la expresan, sus diversas construcciones sociales particulares sobre el significado de los hechos y el conocimiento, dado que la investigación es en parte producto

de las construcciones del investigador y de las unidades de análisis en un proceso interactivo (Batthyány, 2011).

Por lo anterior, el paradigma cuantitativo se complementó con el cualitativo, precisamente para comprender e interpretar las concepciones y construcciones sociales sobre dichas categorías de análisis desde su operacionalización en campo. Esto concuerda con la postura de Lizcano (2013) quien plantea que en el paradigma cualitativo

> no hay una realidad objetiva, la realidad es edificada socialmente, por lo que múltiples construcciones mentales pueden ser aprehendidas sobre ésta, algunas de las cuales pueden estar en conflicto con otras. De este modo, las percepciones de la realidad son modificadas a través del proceso del estudio y el conocimiento es construido socialmente por las personas que participan en la investigación. (p.18)

Este hecho reafirma que el paradigma plurimetódico es pertinente para esta investigación, pues permite enriquecer y complementar la información y resultados obtenidos por medios cuantitativos y cualitativos.

Ahora bien, la elección de dicho paradigma no solo obedece a su amplitud metodológica intrínseca, sino a la naturaleza misma de los objetos de estudio, los componentes de la resolución de problemas durante la práctica matemática; los cuales se caracterizan por ser "dinámicos, complejos, pertenecientes al vasto horizonte de conocimientos sociohistóricos, que van desde la Epistemología, al de la Psicología, Antropología, Pedagogía, Filosofía, Lingüística, Sociología e Historia de la Ciencia" (Godino, citado en Binda & Balbastre, 2013, p. 180).

De esta manera, el carácter dinámico y complejo de los objetos implicados en la resolución de problemas matemáticos y en general, en la educación matemática, requieren para su análisis y comprensión un paradigma metodológico integrador para su estudio, dado que "la didáctica de las matemáticas se encuentra en el corazón de interacciones múltiples y debe desarrollar sus propias problemáticas y metodologías, incluyendo los aportes de las disciplinas conexas" (Godino, citado en Gusmao, 2006, p.18).

Por último, a modo de apoyo a la tesis del párrafo anterior, cabe mencionar que los objetos implicados en la resolución de problemas matemáticos poseen una dimensión personal e institucional, es decir, se estructuran con las interpretaciones particulares de los sujetos, respecto de los significados sociales, culturales e históricos ya establecidos, lo cual connota su naturaleza plurimetodológica (Godino, 2012).

2. Tipo de investigación

El tipo de investigación a utilizar es analítico toda vez que se desagregan los componentes de los saberes previos, estrategias metacognitivas, transformación semiótica, durante el proceso de resolución de problemas algebraicos, para facilitar su estudio y la posterior reintegración conceptual, contextualización o contrastación teórica (Hernández, Fernández & Baptista, 2014).

Para ello, se realizará un proceso de consulta, revisión y análisis de la información de marcos teóricos e investigaciones previas relacionadas y su contraste con los resultados evidenciados por los estudiantes en la recogida de datos de campo en lo relacionado con su proceso de resolución de problemas en las tres categorías de estudio. Además, se llevará a cabo un proceso de caracterización y valoración de las concepciones, constructos, significados de los estudiantes, para comprender la forma en que están implicados los aspectos de las categorías de análisis en sus procesos de resolución de problemas algebraicos (Díaz, 2009; Aguirre & Jaramillo, 2015).

De esta manera, se pretende complementar y ampliar el conocimiento que se tenía del objeto de estudio desde la información obtenida de la revisión y análisis de los marcos teóricos e investigaciones previas, con los datos recogidos de la inmersión en el contexto social específico.

3. Diseño de investigación

PREPRINT

Teniendo en cuenta la naturaleza y tipo de investigación, el diseño metodológico es analítico, orientado ontológicamente al estudio de los componentes que se estructuran en los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica, en la resolución de problemas algebraicos.

Así, el diseño metodológico de esta investigación comienza con la contextualización previa, a partir de la revisión de la literatura sobre las aristas del conocimiento y descripción del problema referente a la poca clarificación de los saberes previos, estrategias metacognitivas, transformación semiótica, y su concreción operacional en la definición de objetivos, así como las tendencias o estado del arte y teorías, conceptos asociados a las categorías de análisis previamente mencionadas. Con fundamento en lo anterior, dentro de la planificación metodológica se seleccionará el paradigma plurimetódico con dominancia cuantitativa-cualitativa, desde el enfoque empírico-analítico, interpretativo; de tipo descriptivo-comprensivo. A partir de estos referentes, se propone una ruta de diseño descriptiva-comprensiva, con los métodos cuantitativo y cualitativo.

En primer lugar, para la inmersión en el campo con el método cuantitativo, el tamaño muestral se calculará con base en la ecuación de muestreo proporcional, y se obtendrá de la población correspondiente al número total de estudiantes de grado octavo de seis instituciones educativas del municipio de Chigorodó, previa aplicación de criterios de inclusión, tales como el rendimiento académico medio (3.0 - 3.5) de sus estudiantes de grado 8° en el área de matemáticas según reportes del ICFES e institucionales; así como criterios de exclusión, tales como rendimientos insuficientes (1,0 – 2.0) y altos (4.0 -5.0) en dicha área. Posteriormente, a esta muestra de estudiantes se les aplicarán tres pruebas tipo escala Likert, cada una, estructurada con diez ítems de cuatro opciones sobre el nivel de acuerdo del estudiante respecto a la afirmación-problema del ítem. Por último, durante la fase de retirada del escenario o salida de campo, para el análisis de datos se utilizará el software estadístico, el SPSS, con el fin de cuantificar y medir los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica en la resolución de problemas algebraicos.

En segundo lugar, para la inmersión en el campo con el método cualitativo, se realizará un muestreo por conveniencia (un grupo focal de 8 estudiantes en cada una de las

6 instituciones educativas, para un total de 48 estudiantes) e intencional (conformado con el 50% de hombres y 50% de mujeres). Posteriormente a la submuestra se le aplicará un guión de entrevista semiestructurada, con preguntas que deben responderse de manera afirmativa o negativa, y complementar con una descripción, producto de la concepción personal sobre el hecho indagado. Por último, durante la fase de retirada del escenario o salida de campo, para el análisis de datos se utilizará el software ATLAS.TI, con el fin de procesar, codificar, categorizar e interpretar la información recogida.

Finalmente, se realizará una matriz de triangulación concurrente de los resultados obtenidos con ambos métodos, cuantitativo y cualitativo, para articular los resultados por separado de los mismos. En cuanto al diseño, dicha matriz se bifurca en dos partes, una para los resultados del método cualitativo; otra, para los resultados del método cuantitativo, cada una con las diferentes categorías de análisis y los resultados obtenidos según su método. Además, consta de un espacio de interpretación y crítica de ambos tipos de resultados, para precisar los aspectos de convergencia, complemento y ampliación conceptual, que permitan un mayor entendimiento, clarificación, visión integral, holística y completa, con el fin de enriquecer las teorías y referencias conceptuales previamente exploradas sobre los componentes de las categorías de estudio, en cumplimiento de los objetivos de esta investigación. De manera concreta, todo el proceso referente al diseño metodológico de esta investigación, aparece sintetizado en el siguiente esquema:

REPOSITORIO

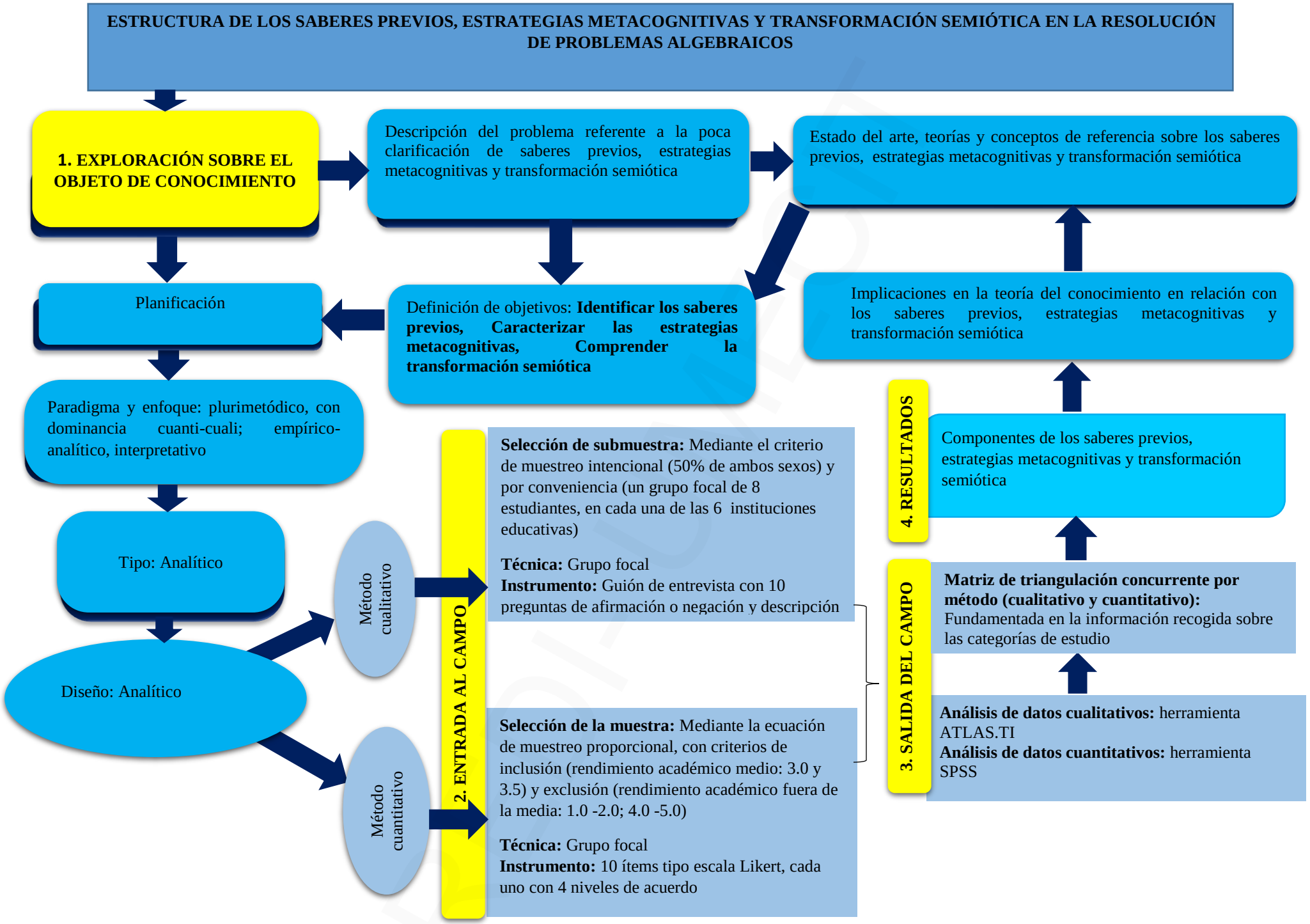


Figura 9. Estructura específica del diseño analítico.
Fuente: autor (2020)

4. Población y Muestra

En este apartado se muestra el procedimiento utilizado en la definición de la población y la muestra, para el trabajo de campo de esta investigación. En primer lugar, se realiza una breve descripción del contexto que rodea a los estudiantes que serán objeto de análisis, desde las características del departamento, la región, el municipio, las instituciones educativas y, por supuesto, las características de los estudiantes de dichas instituciones. Asimismo, se exponen los criterios de inclusión y exclusión de las instituciones educativas y estudiantes que se escogieron como población, de los cuales se obtuvo la muestra, para efectos del método cuantitativo, y la submuestra, para efectos del análisis cualitativo.

En relación con el método cuantitativo, se explicarán detalles sobre la selección de la muestra con base en la ecuación de muestreo proporcional, y la fracción de dicha muestra obtenida por institución educativa, con base en una constante de proporcionalidad.

Respecto al método cualitativo, a partir de la muestra calculada, se explicará la forma en que se seleccionará una submuestra, teniendo en cuenta el criterio de conveniencia de conformación de un grupo muestral, por institución educativa; y por intencionalidad, mediante la selección igualitaria de hombres y mujeres.

4.1. Población

Esta investigación se desarrolló en el departamento de Antioquia, subregión de Urabá, municipio de Chigorodó, con los estudiantes de grado octavo de seis instituciones educativas del mismo municipio. En primer lugar, el departamento de Antioquia está ubicado al noroccidente del territorio colombiano, en las regiones andina y caribe. En 2015 fue el departamento más poblado, y con 63 600 km², el sexto más extenso del país (Bullaro, 2017). En segundo lugar, Urabá es una de las nueve subregiones que conforman dicho departamento, reconocida por contar con una extraordinaria posición geográfica, dado que conecta el océano pacífico y el océano atlántico; por ser una región con muchos paisajes exóticos, gran diversidad cultural y la región bananera más importante del país en los mercados nacionales e internacionales. En tercer lugar, Chigorodó es uno de los once

municipios de la subregión de Urabá, cuya economía depende del banano, uno de los principales productos de exportación de Colombia, y de la ganadería, que atrae a muchos visitantes a sus tradicionales subastas, las más concurridas de toda la región (Bullaro, 2017).

En cuanto al objeto de estudio de esta investigación, en Chigorodó se encuentran diez instituciones educativas, de las cuales se tomaron seis, y de estas se seleccionaron a los estudiantes de grado octavo, por ser el grado donde comienza formalmente el aprendizaje del álgebra. En concreto, la población de estudiantes de grado octavo de las seis instituciones seleccionadas fue de 786 (ver tabla No. 1). Dicha selección o inclusión de instituciones y estudiantes obedeció a la presencia de características o criterios, tales como el desempeño académico medio (3.0 – 3.5) de sus estudiantes en algebra, en pruebas externas e internas; así como de condiciones socioeconómicas, motivacionales, psicológicas en el rango normal. Asimismo, se excluyeron instituciones educativas cuyos estudiantes presentaron un rendimiento bastante alejado de la media en el área de matemáticas (1.0 -2.0; 4.0 – 5.0), en las pruebas externas e internas y con manifestaciones motivacionales, psicológicas, y condiciones socioeconómicas fuera de lo habitual.

En relación con el carácter teleológico de estas instituciones educativas, su finalidad es formar ciudadanos críticos, reflexivos, participativos, con altos valores morales, espirituales y sociales, con competencias cognitivas que le permitan desenvolverse de una manera eficaz, eficiente y oportuna en las esferas personales, laborales y comunitarias. Todo lo anterior pretende lograrse mediante el establecimiento de reglas de conducta y un estilo de praxis, orientado a la adquisición de competencias disciplinares, en ocasiones contextualizadas y problematizadas.

Respecto a la información relacionada con datos sociodemográficos de los estudiantes de grado octavo de las mencionadas instituciones, estos tienen un rango de edad que oscila entre los 12 y 15 años, la mayoría de ellos vive en la zona urbana, pertenecientes al estrato económico uno y dos. En cuanto a su estructura familiar, en su mayoría se compone de familias monoparentales y en ocasiones adquieren empleos de fines de semana

o le ayudan a los padres en las tareas del hogar (SEDUCA[15], 2020). En el aspecto personal y académico, son jóvenes con espíritu de superación, con buena disposición para el aprendizaje, les gusta trabajar en equipo. No obstante, deben cultivar y ejercitar más el pensamiento crítico y reflexivo.

4.2. Muestra

En esta sección se explica el procedimiento aplicado para la obtención de la muestra, en el marco del paradigma cuantitativo; así como la submuestra, desde el paradigma cualitativo. En primer lugar, se calculó el número de muestrados con base en la siguiente ecuación de tamaño de muestra proporcional:

$$n = \frac{z^2.p.q.N}{e^2(N-1) + z^2.p.q}$$

De donde

$z = 95\%$ ó $0{,}95 = 1{,}96$

$p = porcentaje\ de\ éxito\ esperado = 0{,}5$

$q = porcentaje\ de\ fracaso\ esperado = 0{,}5$

$N = tamaño\ de\ la\ población = 786$

$e = porcentaje\ de\ error\ muestral = 5\%$ ó $0{,}05$

Así, el tamaño de muestra calculado fue de 258 estudiantes en las seis instituciones educativas. Ahora bien, con base en este número muestral (n), en cada institución se calculó el tamaño de los subgrupos muestrales correspondientes (s_k) de manera proporcional a la relación entre su número de estudiantes de grado octavo (x_k) y la población total de los mismos en las instituciones educativas (N). Para ello se utilizó la siguiente ecuación:

[15] Secretaría de Educación de Antioquia

$$s_k = n\frac{x_k}{N}\ , \qquad con\ k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Como ejemplo particular del cálculo del tamaño del subgrupo muestral para la Institución Educativa los Andes, cuyo número de estudiantes de grado octavo (x_k) es 162, se tiene que $s_k = 258\frac{162}{786} \approx 53$.

En ese orden de ideas, en la siguiente tabla se muestra el tamaño de subgrupos muestrales por institución educativa.

Tabla 14. Tamaño del subgrupo muestral por institución educativa

Institución Educativa	x_k	**Tamaño del subgrupo muestral(s_k)**
Los Andes	162	53
María Auxiliadora	121	40
Gonzalo Mejía	105	34
Agrícola de Urabá	177	58
Chigorodó	108	36
Juan evangelista Berrío	113	37
TOTAL	**786**	**258**

Fuente: SIMAT[16] (2020)

Por otro lado, con base el paradigma cualitativo, se conformó una submuestra con seis grupos focales por conveniencia, uno por cada institución educativa de las anteriormente señaladas, con 8 estudiantes de grado octavo por institución educativa, para

[16] Sistema Integrado de Matrícula

un total de 48 estudiantes. Con el fin de entenderlo mejor, en la siguiente tabla se muestra la conformación de grupos focales por institución educativa.

Tabla 15. Conformación de grupos focales por institución educativa

Institución educativa	No. Estudiantes/grupo focal
I.E. Los Andes	**8**
María Auxiliadora	**8**
Gonzalo Mejía	**8**
Agrícola de Urabá	**8**
Chigorodó	**8**
Juan Evangelista Berrío	**8**
TOTAL	**48**

Fuente: autor (2020)

Además, dicha submuestra se conformó de manera intencional, con el 50% de estudiantes de ambos sexos en cada institución educativa, tal como se indica en la siguiente tabla

Tabla 16. Número de hombres y mujeres en los grupos focales

Institución educativa	No. estudiantes/grupo focal	Hombres (50%)	Mujeres (50%)
Los Andes	8	4	4
María Auxiliadora	8	4	4

REPOSITORIO UNEC

Gonzalo Mejía	8	4	4
Agrícola de Urabá	8	4	4
Chigorodó	8	4	4
Juan Evangelista Berrío	8	4	4
TOTAL	48	24	24

Fuente: autor (2020)

5. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Las técnicas que se utilizarán para la recolección de datos e información de campo, en cumplimiento de los objetivos de esta investigación y en concordancia con las categorías de análisis, serán clasificadas en función del tipo de datos que van a recoger: para datos cuantitativos, la técnica será la prueba y los instrumentos serán 3 pruebas tipo escala Likert; para la recolección de datos cualitativos, la técnica será la entrevista y el instrumento un guión de entrevista. Cabe mencionar que por efecto del distanciamiento social, en el contexto de la pandemia del coronavirus en 2020, los instrumentos correspondientes a la prueba tipo escala Likert y el guion de entrevista semiestructura se digitalizarán en la herramienta online de Google Forms, desde la cual serán diligenciados por los estudiantes.

5.1. Técnica e instrumentos cuantitativos

Como se mencionó en el párrafo anterior, para la recolección de datos cuantitativos, la técnica a utilizar será la prueba. Según Chasteauneuf y Brace (citados en Sampieri et al., 2014), la prueba consiste en "un conjunto de preguntas respecto de una o más variables o categorías a medir […], además, debe ser congruente con los objetivos y puede estructurarse con base en dos tipos de preguntas: cerradas y abiertas" (p. 217).

De acuerdo con la técnica de la prueba, en esta investigación diseñarán los instrumentos cuantitativos con base en la escala de Likert, que, según Matas (2018) "son instrumentos psicométricos donde el encuestado debe indicar su acuerdo o desacuerdo sobre una afirmación, ítem o reactivo, lo que se realiza a través de una escala ordenada y unidimensional" (p.1).

En ese sentido, las pruebas tipo escala Likert, diseñadas para recoger información referente a los saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica, se componen de ítems cuyas opciones de respuesta corresponden al nivel de acuerdo que el estudiante tiene con cierta afirmación planteada en el enunciado: Totalmente de acuerdo, de acuerdo, en desacuerdo y totalmente en desacuerdo. Respecto al número de ítems de dichas pruebas, las de saberes previos y transformación semiótica constarán de 10 cada una, mientras que la prueba de estrategias metacognitivas, 25.

En relación con los detalles teórico-conceptuales que sustentarán la elaboración de las pruebas escala tipo Likert, se tendrá en cuenta la definición conceptual y operacional de las categorías de análisis propuestas en el marco teórico de esta investigación y el objetivo al que se orientan. Así, la prueba tipo escala Likert de saberes previos se orienta al cumplimiento del primer objetivo, a saber, identificar los saberes previos en la resolución de problemas algebraicos, fundamentados en axiomas, operaciones con números reales y noción algebraica. En ese sentido, dicho instrumento se estructurará con ítems que refieren implícita o explícitamente aspectos de los saberes previos, tales como axiomas, teoremas, definiciones, operaciones en R y noción algebraica (Ver anexo No. 1).

En cuanto a su estructura, dicho instrumento estará formado por ítems de un enunciado, en el que se realiza una afirmación o negación y 4 opciones genéricas de respuesta: completamente de acuerdo, de acuerdo, en desacuerdo y completamente en desacuerdo, a las cuales se les asignará una valoración, entre 1 y 4. Cabe mencionar que la mejor opción será "completamente de acuerdo" o "completamente en desacuerdo". Por lo tanto, las posibles valoraciones que puede tener un estudiante frente a un ítem, en función de su respuesta elegida y la mejor opción, son las siguientes:

Tabla 17. Valoración cuantitativa de saberes previos por ítem

POSIBLES OPCIONES ELEGIDAS POR EL ESTUDIANTE	**MEJOR OPCIÓN**	
	Completamente de acuerdo	**Completamente en desacuerdo**
Completamente de acuerdo	4	1
De acuerdo	3	2
En desacuerdo	2	3
Completamente en desacuerdo	1	4

Fuente: autor (2020)

Con base en la valoración asignada en cada ítem, según la tabla 17**, s**i un estudiante marca la opción "completamente de acuerdo" en un ítem cuya mejor opción era precisamente "completamente de acuerdo", se valorará con 4; por el contrario, si la mejor opción era completamente en desacuerdo, entonces se valorará con 1. Así, al finalizar la prueba, su nivel de saberes previos será estimado de acuerdo con el siguiente rango de valoración total

Tabla 18. Niveles de desempeño en saberes previos según la valoración total de ítems

Valoración	**Nivel**
[10-25]	Bajo
[26-35]	Medio
[36-40]	Alto

Fuente: autor (2020)

Igualmente, la prueba tipo escala Likert de estrategias metacognitivas se orienta al cumplimiento del segundo objetivo, a saber, caracterizar las estrategias metacognitivas implicadas en la resolución de problemas algebraicos, desde los aspectos de la planeación, regulación o control y evaluación de tareas. En ese sentido, dicho instrumento se estructurará con descriptores tomados del *Metacognitive Awearsnes Inventory*, MAI,

validado en Colombia por Huertas, Vesga y Galindo (2014), que refieren implícita o explícitamente aspectos de la planeación, regulación y evaluación durante la resolución de problemas algebraicos (Ver anexo No. 2).

En cuanto a su estructura, dicho instrumento estará formado por afirmaciones y 4 opciones genéricas de respuesta: completamente de acuerdo, de acuerdo, en desacuerdo y completamente en desacuerdo. A estas opciones se les asignará una valoración entre 1 y 4, así: 1 para la opción "completamente en desacuerdo"; 4 para la opción "completamente de acuerdo". Cabe mencionar que la mejor opción será "completamente de acuerdo". Por lo tanto, las posibles valoraciones que puede tener un estudiante frente a un ítem, en función de su respuesta elegida y la mejor opción, se describen a continuación

Tabla 19. Valoración cuantitativa de estrategias metacognitivas por afirmación

POSIBLES OPCIONES ELEGIDAS POR EL ESTUDIANTE	**MEJOR OPCIÓN** **Completamente de acuerdo**
Completamente de acuerdo	4
De acuerdo	3
En desacuerdo	2
Completamente en desacuerdo	1

Fuente: autor (2020)

Con base en la valoración asignada en cada ítem, según la tabla 19**,** y el número total de afirmaciones, se estableció un rango de valoración total de éstas, para representar el nivel de desempeño en el uso de estrategias metacognitivas, de la siguiente manera:

Tabla 20. Niveles de desempeño en estrategias metacognitivas según la valoración total

Valoración	**Nivel**

[25-50]	Bajo
[51-78]	Medio
[79-100]	Alto

Fuente: autor (2020)

Por último, la prueba tipo escala Likert de transformación semiótica se orienta al tercer objetivo, a saber, comprender la transformación semiótica de registros de representación en la resolución problemas algebraicos, con base en los niveles uno, dos y tres de algebrización. Así, dicho instrumento se estructurará con ítems que refieran implícita o explícitamente a los niveles de algebrización descritos por el EOS: uno, dos y tres (Ver anexo No. 3).

En cuanto a su estructura, dicho instrumento estará formado por ítems de un enunciado, en el que se realiza una afirmación o negación y 4 opciones genéricas de respuesta: completamente de acuerdo, de acuerdo, en desacuerdo y completamente en desacuerdo, a las cuales se les asignará una valoración entre 1 y 4. Cabe mencionar que la mejor opción será "completamente de acuerdo" o "completamente en desacuerdo". De esa manera, las posibles valoraciones que puede tener un estudiante frente a un ítem, en función de su respuesta elegida y la mejor opción, en la prueba de transformación semiótica, son:

Tabla 21. Valoración cuantitativa de transformación semiótica por ítem

POSIBLES OPCIONES ELEGIDAS POR EL ESTUDIANTE	**MEJOR OPCIÓN**	
	Completamente de acuerdo	**Completamente en desacuerdo**
Completamente de acuerdo	4	1
De acuerdo	3	2
En desacuerdo	2	3
Completamente en desacuerdo	1	4

Fuente: autor (2020)

REPUNIFOT

Con base en la valoración asignada en cada ítem, según la tabla 21**,** y el número total de ítems, se estableció un rango de valoración total de ítems, para representar el nivel de desempeño en la transformación semiótica, de la siguiente manera:

Tabla 22. Niveles de desempeño en transformación semiótica según la valoración total

Valoración	Nivel
[10-25]	Nivel I de algebrización
[26-35]	Nivel II de algebrización
[36-40]	Nivel III de algebrización

Fuente: autor (2020)

5.2. Técnica e instrumentos cualitativos

Para la recolección de datos cualitativos, la técnica a utilizar será el grupo focal, el cual, según Silveira, Colomé, Heck, Nunes y Viero (2015), "posibilita el diálogo sobre un asunto en especial, sobre aspectos particulares del entrevistado, a partir de estímulos específicos (preguntas)" (p.2).

En concordancia con la mencionada técnica, en esta investigación diseñará un instrumento cualitativo basado en un guion de entrevista semiestructurada, el cual, según Torrecilla (2006) es un instrumento utilizado para "determinar de forma oral y personalizada acontecimientos subjetivos del entrevistado, a partir de respuestas cerradas, pero con la posibilidad de añadir matices que doten a las mismas de un valor añadido en torno a la información que den" (p.8).

Para efectos de esta investigación, el guion de entrevista se estructurará con 10 preguntas, cuyas opciones de respuesta corresponden a la afirmación o negación (SI, NO) del proceso mencionado en cada enunciado desde la experiencia del estudiante, seguido de una breve descripción personal sobre la ejecución de dicho proceso.

Respecto a los detalles teórico-conceptuales que sustentarán la elaboración del guion de entrevista, se tendrá en cuenta la definición conceptual y operacional de las categorías de análisis propuestas en el marco teórico de esta investigación y el objetivo al que se orientan.

En ese sentido, para complementar la información previamente recogida en los instrumentos cuantitativos, referente a las categorías de análisis y los objetivos, la construcción metodológica de las preguntas del guion de entrevista semiestructurada se desarrollará así: 4 preguntas orientadas al cumplimiento del primer objetivo, es decir, a identificar los saberes previos en la resolución de problemas algebraicos, fundamentados en axiomas, operaciones con números reales y noción algebraica; 3 preguntas orientadas al cumplimiento del segundo objetivo, es decir, caracterizar las estrategias metacognitivas implicadas en la resolución de problemas algebraicos, desde los aspectos de la planeación, regulación o control y evaluación de tareas y 3 preguntas orientadas al tercer objetivo, es decir, comprender la transformación semiótica de registros de representación en la resolución problemas algebraicos, con base en los niveles uno, dos y tres de algebrización, para un total de 10 preguntas (Ver anexo No. 4,5 y 6).

A nivel general, en la siguiente tabla se explicita la contextualización metodológica de cada instrumento, referente a la categoría, subcategoría, objetivo, método y técnica al que pertenece.

REDIUFPSO

Tabla 23. Contextualización metodológica de los instrumentos

Categoría	Subcategorías	Objetivo	Método		Técnica	Instrumento
			Cuanti	Cuali		
Saberes previos	Axiomas, Operaciones en R, noción algebraica	Identificar los saberes previos en la resolución de problemas algebraicos, fundamentados en axiomas, operaciones con números reales y noción algebraica	**X**		Prueba	Prueba tipo escala Likert con 10 enunciados, para escoger el nivel de acuerdo en cada uno.
				X	Grupo focal	Guion de entrevista con 4 preguntas, para afirmar o negar y describir, según su experiencia.
Estrategias metacognitivas	Planeación, Regulación, Evaluación	Describir las estrategias metacognitivas implicadas en la resolución de problemas algebraicos, desde los aspectos de la planeación, regulación o control y evaluación de tareas	**X**		Prueba	Prueba tipo escala Likert con 26 enunciados tomados del MAI, para escoger el nivel de acuerdo en cada uno.
				X	Grupo focal	Guion de entrevista con 3 preguntas, para afirmar o negar y describir, según su experiencia.
Transformación semiótica	Nivel de algebrización: 1, 2, 3	Comprender la transformación semiótica de registros de representación en la resolución problemas algebraicos, con base en los niveles uno, dos y tres de algebrización	**X**		Prueba	Prueba tipo escala Likert con 10 enunciados, para escoger el nivel de acuerdo en cada uno.
				X	Grupo focal	Guion de entrevista con 3 preguntas, para afirmar o negar y describir, según su experiencia.

Fuente: autor (2020).

REDUMEC

Como puede observarse, los objetivos son comunes a los métodos, instrumentos y técnicas, lo que cambia es el tipo de información que recoge un instrumento, en función del método, sea cuantitativo o cualitativo. Asimismo, cabe aclarar que la entrevista estructurada es un solo instrumento de 10 preguntas y que en la tabla anterior, simplemente estas se desglosan por categorías, más no debe entenderse que el número de preguntas de cada desglose (4, 3, 3) representa un instrumento independiente.

Para finalizar, los datos e información proveniente de las pruebas tipo escala Likert, fueron alistados para el proceso de análisis, mediante el programa SPSS. Asimismo, los datos e información proveniente de la entrevista semiestructurada, fueron objeto de codificación, selección, preparación, con el fin de ingresarlos a la herramienta ATLAS.TI, para interpretar, abstraer conceptos e iniciar procesos de categorización y creación de redes conceptuales.

6. Criterios de calidad de los instrumentos

La presente investigación se sustenta en criterios de validez y confiabilidad, desde el paradigma cuantitativo y en criterios de credibilidad, transferibilidad, dependencia y confirmabilidad, desde el paradigma cualitativo.

6.1. Confiabilidad, Validez y Objetividad de los instrumentos cuantitativos

La confiabilidad de los instrumentos de medición de la variable saberes previos y transformación semiótica se realizó mediante el Alpha de Cronbach, utilizado para variables cuyo nivel de medición es el ordinal, que aplica en este caso, por tratarse de escala Likert. En ese sentido, el valor obtenido para el instrumento saberes previos fue de 0,82. Asimismo, el valor obtenido para el instrumento estrategias metacognitivas fue 0,86 y para el de transformación semiótica, 0,87. Estos valores se consideran buenos, según Hernández et al., (2014), quien indicó que valores comprendidos entre el rango 0,80 y 0,90, son buenos y deseables, ya que si es demasiado alto, es decir, entre 0,90 y 1,0, indica redundancia, y si está por debajo de 0,70, entonces es muy bajo.

Respecto a la validez del instrumento de estrategias metacognitivas, *Metacognitive Awareness Inventory*, MAI, ya fue validado en Colombia por Huertas et al. (2014) y se tomó sin alteraciones.

En cuanto a la validez de los instrumentos de la variable saberes previos y transformación semiótica se calculó el coeficiente de validez de contenido, mediante la valoración realizada por tres jueces expertos, en el área disciplinar como metodológica, cuyos resultados fueron, respectivamente, para el instrumento de saberes previos y transformación semiótica, de 0.8471 y 0.8221, el cual se puede valorar como bueno, dado que se acerca a 1,0 que es el valor del coeficiente ideal. En el apéndice 9 y 10 se evidencia la valoración de los expertos y la puntuación referida del coeficiente de validez de contenido de los instrumentos saberes previos y transformación semiótica, respectivamente.

6.2. Credibilidad, transferibilidad, dependencia y confirmabilidad de los instrumentos cualitativos

Respecto al contenido de dicho instrumento, sus ítems o preguntas se elaboraron con fundamento en los aspectos conceptuales previamente definidos en las categorías de análisis del marco teórico, así como los objetivos específicos. En cuanto a la credibilidad, los mismos estudiantes que participaron en la investigación indicaron que los resultados obtenidos de los instrumentos corresponden a sus concepciones y lo que pensaban en torno a lo indagado. Por último, los resultados obtenidos apoyan los obtenidos por otros instrumentos utilizados en antecedentes investigativos, en relación con el mismo tema, por lo que puede decirse que los instrumentos diseñados en esta investigación poseen validez concurrente y dependencia.

7. Técnica de análisis de los datos

La técnica de análisis de datos que se llevara a cabo en esta investigación consiste en el vaciado y procesamiento de la información de campo mediante programas informáticos. Así, para el caso de los datos cuantitativos, se utilizará el software SPSS, version 26.0; para el caso de los datos cualitativos, el software ATLAS.TI. En las siguientes secciones se explica con más detalle en consiste cada técnica, según el método, cuantitativo

o cualitativo y la posterior triangulación concurrente por método, a partir de los resultados obtenidos.

7.1. Técnica de análisis por el método cuantitativo

En relación con el método cuantitativo, se utilizará el software SPSS para sistematizar y procesar estadísticas descriptivas, tales como medias, tabulación de datos, frecuencias, representación gráfica de los datos; así como inferenciales, tales como el análisis de varianza, análisis factorial y regresión lineal, con el fin de realizar análisis e inferencias cuantitativas.

7.2. Técnica de análisis por el método cualitativo

Respecto al método cualitativo, se utilizará el software ATLAS.TI para ingresar datos cualitativos, segmentar el texto en pasajes o citas, codificar conceptos, escribir comentarios o anotaciones y todas aquellas actividades interpretativas que contribuyan a la categorización y creación de redes conceptuales, con el fin de reducir el volumen de datos, sin menoscabo de las significaciones globales implicadas, con el fin de realizar análisis e inferencias cualitativas.

7.3. Triangulación concurrente por método

Con posterioridad a la entrega de datos procesados por los respectivos programas informáticos y la realización de análisis e inferencias en cada línea metódica, se llevará a cabo un proceso de triangulación concurrente con el fin de complementar, fortalecer y ampliar la información obtenida del análisis por separado de cada método, tanto cuantitativo, como cualitativo.

Sobre la aplicación de la triangulación concurrente por método, según Onwuegbuzie y Johnson (citados en Hernández, Fernández & Baptista, 2014), dicho proceso implica recabar en paralelo y de forma separada datos cuantitativos y cualitativos, sin que uno se constituya sobre la base del otro análisis. Además, según los autores mencionados anteriormente, los resultados de ambos tipos de análisis no son consolidados en la fase de interpretación conjunta e inferencias, “sino hasta que ambos conjuntos de datos han sido

recolectados y analizados de manera separada" (p. 217), es decir, después de la recolección de los datos e interpretación de resultados de los métodos cuantitativo y cualitativo, se establecen una o varias metainferencias que integran los hallazgos, inferencias y conclusiones de cada método. En el caso particular de esta investigación, dichos hallazgos e inferencias se clasificarán según las categorías de análisis, de manera que las metainferencias (producto de las inferencias cuantitativas y cualitativas), puedan efectuarse por cada una de dichas categorías. Esto, con el fin de encontrar las implicaciones al respecto en la teoría del conocimiento, contrastar, complementar las tendencias investigativas y, desde la parte metodológica, cumplir cada objetivo de esta investigación. La siguiente figura resume el diseño del proceso de triangulación concurrente, por método, que se aplicará en esta investigación.

Figura 10. Estructura del proceso de triangulación

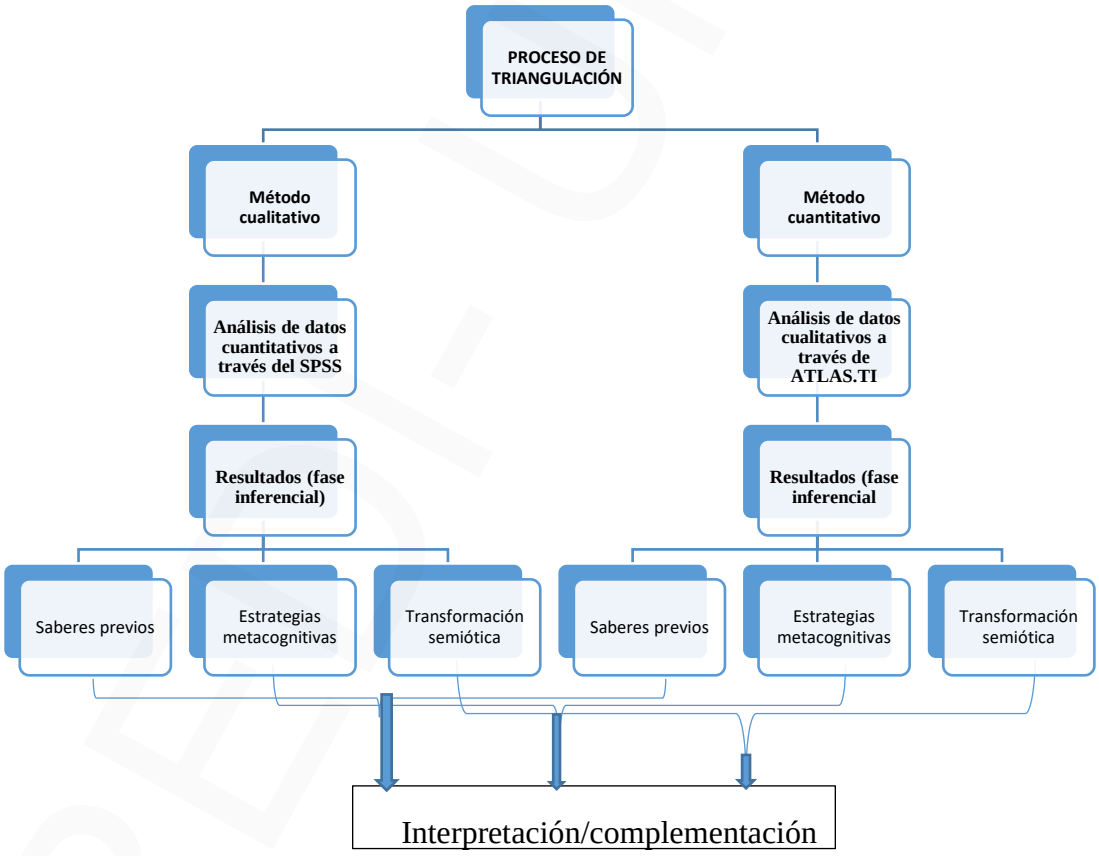


Figura 10. Diseño de triangulación concurrente por método. Fuente: autor (2020).

PREPRINT

CAPÍTULO IV. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

RED-UNEG

1. Aplicación de Técnicas de Análisis de Datos Cuantitativos y Cualitativos

En relación con el procesamiento de datos cuantitativos, la técnica utilizada consistió en aplicar test estadísticos para procesar los datos recogidos en forma numérica y detectar tendencias estadísticas representativas sobre el comportamiento de los resultados en torno a determinada variable, que permitiesen confirmar o contradecir aspectos relacionados, tratados en los antecedentes investigativos o teorías, así como explicar los resultados.

Respecto al procesamiento de datos cualitativos, la técnica utilizada fue la teoría fundamentada, mediante las fases de vaciado de la información, reducción del dato, codificación abierta, axial y selectiva, con las que se construyeron redes taxonómicas para contextualizar y jerarquizar los conceptos inductivos. De manera similar a las técnicas cuantitativas, el cuerpo de información proveniente del análisis cualitativo se confronta con la teoría, para verificarla o aportar conceptualmente a su desarrollo.

1.1. Procesamiento y Análisis de Datos Cuantitativos

En esta investigación se utilizó el paquete estadístico SPSS, version 26.0, para realizar el análisis de datos cuantitativos. Dicho análisis consistió en dos fases: descriptiva e inferencial. En primer lugar, se utilizaron los siguientes estadísticos descriptivos: tabla de frecuencias, gráfico de barras, gráfico circular, y media y desviación estándar. En segundo lugar, los estadísticos inferenciales utilizados fueron el ANOVA de un factor, para muestras independientes, con el fin de comparar las medias de cada variable a nivel interinstitucional; el análisis factorial, para extraer los factores de cada variable que mejor explican el desempeño en la misma, así como la regresión lineal, para medir el grado de dependencia y/o correlación entre las variables de estudio.

De manera más específica, los resultados por variable presentaron, en primer lugar, el análisis descriptivo y posteriormente, el inferencial, a nivel general de la variable y, posteriormente, por subvariable. Respecto a los estadísticos descriptivos, por variable, en primer lugar, las tablas de frecuencias se elaboraron con las valoraciones de los niveles de desempeño de la variable de análisis, el rango de puntuación que abarca cada nivel y el número de estudiantes que se ubicaron en cada nivel. Esta misma información se presentó

en un diagrama de barras y circular, especificando en este último, el número de estudiantes en cada nivel de desempeño. Asimismo, se construyó una tabla con la media y desviación típica, por ítem. En cuanto a los estadísticos inferenciales, se aplicó el ANOVA entre grupos, para determinar la existencia o no de diferencias significativas entre instituciones educativas. Posteriormente, se realizó un análisis factorial, para lo cual se aplicó la prueba de KMO y test de esfericidad de Bartlett, con una matriz de comunalidades por ítem y de componentes principales. Posteriormente, se rotó la tabla de comunalidades con el método Varimax y normalización Kaiser, para identificar las cargas de cada ítem en cada factor propuesto.

Por último, y de manera general a las variables, se aplicó la regresión lineal, para determinar la correlación y posible dependencia lineal entre variables. Para ello, se designaron dos modelos, cuya variable criterio fue la transformación semiótica, pero con diferencia en las variables predictoras: en el modelo 1, la variable estrategias metacognitivas; en el modelo 2, la variable saberes previos y estrategias metacognitivas. Con esta información de referencia, se construyó una tabla inicial, con las correlaciones por variable y el grado de significación de cada una. Posteriormente, se presentaron los ajustes por modelo, que presentan un indicio inicial sobre cuál de los dos modelos es el que mejor se ajusta a la variable criterio. Luego, se realizó un ANOVA de los modelos, para compararlos entre sí. Asimismo, se presentó una tabla con los coeficientes de la ecuación de regresión en cada modelo, las variables excluidas, por no aportar significativamente a cada modelo respectivo, los diagnósticos de colinealidad y, por último, la ecuación de regresión, del modelo de mejor ajuste.

1.2. Procesamiento y Análisis de Datos Cualitativos

La presente investigación siguió el procesamiento y análisis de datos cualitativos de forma manual, siguiendo las fases de la teoría fundamentada, a saber: vaciado de la información, reducción del dato cualitativo, codificación del dato (abierta, axial y selectiva) y construcción de recursos de análisis

En primer lugar, en el vaciado de la información se desarrolló mediante la transcripción las respuestas de las entrevistas por grupo focal, uno por institución educativa, a un conjunto de matrices manuales estructuradas por categoría, subcategoría, información

de entrevista, recurrencia, información de talleres a grupos focales, recurrencia de significados y códigos y código homologable o categoría inductiva.

En segundo lugar, la reducción del dato, como primer paso para la codificación abierta, se realizó en la sección de información de entrevista y empezó con el análisis de las unidades de registro y la asignación de un color distintivo, a las partes de dichas unidades que correspondían a la misma unidad conceptual, por estudiante y subcategoría. Con base en las partes de las unidades de registro con el mismo color, se construyó un concepto que representara la recurrencia, así como su codificación. Nuevamente, se realizó en mismo proceso de codificación, con base en las recurrencias, con el que se indujeron conceptos y proposiciones inductivas, por grupo focal.

Del constructo anterior, nuevamente se realizó un proceso de recurrencia de significados y códigos, con dichos conceptos y el número de veces que fue captado en los resultados.

Finalmente, de este proceso surge la última codificación, conocida como categorías inductivas o código homologable, el cual le da sentido a la codificación abierta. Así, con base en esta, se realizó la codificación axial, consistente en tomar los resultados de las categorías, subcategorías y categorías inductivas respectivas, para construir una red taxonómica con ellas. Posteriormente, la codificación selectiva consistió en tomar el tema central de la investigación, a saber, la resolución de problemas algebraicos y relacionarlos lógicamente con las codificaciones axiales, hasta conformar la red taxonómica completa, como posterior recurso de análisis investigativo y organización de hallazgos cualitativos.

2. Hallazgos de Datos Cuantitativos y Cualitativos

2.1. Hallazgos de Datos Cuantitativos

En esta sección se presentan los resultados cuantitativos en torno a las variables y subvariables de la presente investigación, mediante su descripción, interpretación, análisis y contextualización teórica de los mismos. En cada variable se presentan primero los resultados de la aplicación de los estadísticos descriptivos y, luego inferenciales. En el caso de los descriptivos, se muestran tablas de frecuencias, gráfico de barras y circulares y tablas

que contienen la media, y desviación típica, para variables y subvariables. En cuanto a los análisis inferenciales, se presentan los resultados de la comparación de medias por variable y subvariable, análisis factorial por variable y, finalmente, la regresión lineal entre variables.

2.1.1. Saberes Previos

2.1.1.1. Estadísticos Descriptivos

Los resultados descriptivos en relación con el nivel alcanzado en la variable saberes previos por los estudiantes que participaron en la presente investigación, se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 24. Número de estudiantes según el nivel de saberes previos

Nivel	Rango	No. Estudiantes
Bajo	[10-25]	185
Medio	[26-35]	70
Alto	[36-40]	3

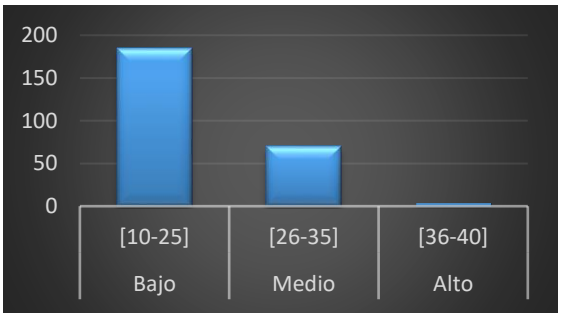
Fuente: autor (2022)

A partir de la información anterior se evidencia que 185 estudiantes están en un nivel bajo, 70 en un nivel medio y solo 3, en un nivel alto. Es decir, el número aproximado de estudiantes en bajo es 2,5 veces los que están en nivel medio y 62 veces los que están en alto, o bien, el número de estudiantes en nivel medio representan un 38% de los que están en bajo, y el número de estudiantes en nivel alto, un 4,3% de los que están en nivel medio.

Para continuar, en el siguiente gráfico expresa de otra forma la información de la tabla, con nuevos aspectos descriptivos.

Gráfico 7. Comparación del número de estudiantes y su nivel de saberes previos

REPOSITORIO

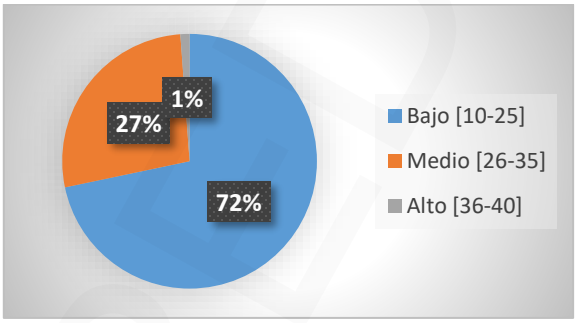


Fuente: autor (2022)

En el gráfico de barras, en el eje horizontal se muestran los diferentes rangos de puntaje en cada nivel de la subvariable y en el vertical, el número de estudiantes que se ubica en cada nivel. En dicho gráfico se observa claramente que existen más estudiantes en nivel bajo que en nivel medio, y, a su vez, más estudiantes en nivel medio que en bajo. En ese sentido, si se asume "nivel de saberes previos" como variable independiente y "número de estudiantes" como variable dependiente, podría afirmarse que poseen una correlación inversa, es decir, a mayor nivel de saberes previos, disminuye el número de estudiantes que se ubican en dicho nivel. De hecho, la disminución acelerada del número de estudiantes a medida que aumenta el nivel evaluado de saberes previos parece sugerir un decaimiento exponencial.

No obstante, también se representó la información en forma de grafico circular, tal como se muestra a continuación.

Gráfico 8. Porcentaje de estudiantes según el nivel de saberes previos



Fuente: autor (2022)

El gráfico circular muestra que el 72% de los estudiantes están en el nivel bajo, el 27% en el nivel medio y el 1% en el nivel alto. Con esto se muestra que la mayoría de las estudiantes, de hecho, casi las tres cuartas partes está en un nivel bajo, casi la cuarta parte restante, en nivel medio y un porcentaje mínimo, en nivel alto. Por último, en la siguiente tabla se muestra una descripción detallada de la media y desviación estándar, por cada ítem del instrumento de la variable saberes previos.

Tabla 25. Media y desviación típica de la variable saberes previos por ítem

Síntesis ítems	N	Mínimo	Máximo	Media	Desviación
1.Producto como adición	258	1	4	2,90	,852
2.Relación entre operaciones	258	1	4	2,27	,983
3.Ejecucion operacional	258	1	4	1,70	,700
4.Propiedad distributiva	258	1	4	2,27	,960
5.Factor común	258	1	4	1,65	,669
6.Propiedades de la igualdad	258	1	4	2,33	,939
7.Argmentacion de patrones	258	1	4	2,68	,947
8.Grafico de patrones	258	1	4	2,43	,949
9.Simbolización proto algebraica	258	1	4	2,17	,973
10.Resolución de proto-ecuaciones	258	1	4	2,26	,832

Fuente: autor (2022)

En la información anterior se muestran valores de la media por ítem de los saberes previos que oscilan entre 1,65 y 2,90. Asimismo, los ítems con media entre 1,65 y 2,0 son los siguientes: el ítem 3, con 1,70 y el ítem 5, con 1,65 y representan un 20% del total. Asimismo, los ítems con media entre 2,0 y 2,90, son los siguientes: ítem 1, con 2,90; ítem 2, con 2,27; ítem 4, con 2,27; ítem 6, con 2,33; ítem 7, con 2,68; ítem 9, con 2,17; ítem 10, con 2,26, que representan el otro 80%. De lo anterior, puede afirmarse que, en promedio, el 20% de los ítems tuvo un muy alto nivel de dificultad para los estudiantes evaluados y el 80% restante, alta dificultad, juicio que se concluye, dado que la media está

considerablemente por debajo del nivel óptimo, a saber, al menos 3, en la escala Likert, que puntúa entre 1 y 4.

Además, dado la desviación típica es una cuantificación del grado de heterogeneidad de las puntuaciones de los estudiantes, donde lo deseable es que esté lo más cercana a 0 y, teniendo en cuenta que los valores de la desviación típica oscilan entre 0,6 y 0,7, para el primer grupo, conformado por el ítem 3, con desviación típica de 0,700 y el ítem 5, con 0,699; y entre 0,8 y 1,0 para el segundo, conformado por el ítem 1, con 0,852; ítem 2, con ,983; ítem 4, con ,960; ítem 6, con ,939; ítem 7, con ,947; ítem 8, con ,949; ítem 9, con ,973 e ítem 10, con ,832, se puede inferir que, desde la individualidad de los ítems que componen el primer grupo, hubo más homogeneidad que el segundo, lo que revela que en cada uno de esos ítems, los estudiantes tuvieron un desempeño más similar, mientras que en cada uno de los ítems del segundo, la homogeneidad fue menor, es decir, los estudiantes tuvieron puntuaciones más dispersas, lo cual puede indicar que existen ciertas diferencias individuales en cuanto al conocimiento del aspecto de los saberes previos evaluado en cada ítem de dicho grupo. No obstante, a pesar de las leves diferencias individuales, la media de la puntuación por ítem de los saberes previos es baja.

2.1.1.2. Estadísticos Inferenciales

En primer lugar, se aplicó el análisis de varianza para comparar las medias de saberes previos a nivel institucional, con el de identificar si existen o no diferencias significativas, el cual comienza mostrando las puntuaciones medias y la desviación típica en cada una de las 6 instituciones educativas participantes. En la siguiente tabla se aprecian dichos resultados.

Tabla 26. Media de la puntuación en la variable saberes previos por institución

					95% del intervalo de confianza para la media			
	N	Media	Desviación	Desv. Error	Límite Inferior	Límite Superior	Mínimo	Máximo
1	58	2,272	,5857	,0769	2,118	2,426	1,3	3,5
2	36	2,289	,2926	,0488	2,190	2,388	1,7	3,1
3	34	2,291	,6240	,1070	2,073	2,509	1,4	3,7
4	37	2,254	,6076	,0999	2,051	2,457	1,5	3,8
5	53	2,264	,5864	,0806	2,103	2,426	1,2	3,5

6	40	2,230	,5506	,0871	2,054	2,406	1,3	3,5
Total	258	2,266	,5527	,0344	2,199	2,334	1,2	3,8

Fuente: autor (2022)

En la información anterior se observa un valor de la media entre 2,23 y 2,29 (redondeado a la centésima) en las 6 instituciones educativas, así: I.E.1 Agrícola de Urabá, con media de 2,27; I.E. 2 Chigorodó, con media 2,29; I.E. 3 Gonzalo Mejía, con media 2,29; I.E. 4 Juan Evangelista Berrío, con 2,25: I.E. 5 Los Andes, con 2,264; I.E.6 María Auxiliadora, con 2,27 y la media total, de las 6 instituciones, de 2,266, que corresponde a un nivel bajo, teniendo en cuenta que la media óptima es, al menos 3, en la escala Likert que puntúa entre 1 y 4. Respecto a la desviación típica, se observan valores entre 0,5 y 0,6, correspondiente a las siguientes instituciones educativas: Agrícola de Urabá, con 0,5857; Chigorodó, con 0,2926; Gonzalo mejía, con 0,6240; Juan evangelista Berrio, con 0,6076; Los Andes, con 0,5506 y María Auxiliadora, con 0,5527. Dichos valores sugieren una mediana homogeneidad en las puntuaciones medias, solamente a nivel intrainstitucional. Así, solo considerando esta información descriptiva, parecen no existir diferencias significativas en el nivel bajo, común a todas las instituciones educativas participantes. No obstante, el ANOVA (Análisis de varianza) propiamente dicho, presentado a continuación si permite obtener resultados concluyentes al respecto.

Tabla 27. Análisis de varianza de la variable saberes previos

	Suma de cuadrados	Gl	Media cuadrática	F	Sig.
Entre grupos	,100	5	,020	,064	,997
Dentro de grupos	78,397	252	,311		
Total	78,497	257			

Fuente: autor (2022)

En esta tabla se observa que el valor F es de ,064, con un valor de significación de ,997, lo cual se interpreta con base en el criterio de este estadístico para rechazar o aceptar la hipótesis nula: si el nivel de significación es menor a F, se rechaza; si el nivel de significación es mayor a F, se acepta. Dado que los resultados indican que el nivel de

significación es mayor a F (,997>,064), entonces, se acepta la hipótesis nula: No existen diferencias significativas en las medias de la variable saberes previos, a nivel interinstitucional.

En segundo lugar, para el análisis factorial se aplicó, en primer lugar, la prueba KMO y la prueba de esfericidad de Bartlett, tal como se indica a continuación.

Tabla 28. Medida de KMO y Prueba de Bartlett de la variable saberes previos

Medida Káiser-Meyer-Olkin de adecuación de muestreo	,874
Prueba de esfericidad de Bartlett aprox. Chi-cuadrado	723,121
Gl	45
Sig.	,000

Fuente: autor (2022)

En la tabla anterior se observa un valor de 0,874 para el KMO, así como la prueba de Bartlett, compuesta por el chi-cuadrado, con valor de 723,121, gl con valor de 45 y nivel de significación de 0,00. En cuanto a su interpretación, en primer lugar, el valor de KMO se considera notable, ya que es mayor o igual a 0,8, siendo lo ideal que esté lo más cercano a 1. Por su parte, la prueba de esfericidad de Bartlett indica que se puede continuar con la interpretación del modelo factorial, con nivel de significancia o error de 0,000.

Posteriormente, como parte de los resultados arrojados por el SPSS, se presenta en primera instancia la tabla de comunalidades, la cual indica el porcentaje en que cada ítem se ajusta al modelo, es decir, los ítems que afectan en mayor medida los resultados de los estudiantes.

Tabla 29. Comunalidades de la variable saberes previos por ítem

Síntesis ítems	Inicial	Extracción
1.Producto como adición	1,000	,638
2.Relación entre operaciones	1,000	,516
3.Ejecucion operacional	1,000	,841
4.Propiedad distributiva	1,000	,630
5.Factor común	1,000	,699

6.Propiedades de la igualdad	1,000	,479
7.Argmentacion de patrones	1,000	,575
8.Grafico de patrones	1,000	,589
9.Simbolización proto algebraica	1,000	,599
10.Resolución de proto-ecuaciones	1,000	,564

Nota: Se utilizó el método de extracción análisis de componentes principales
Fuente: autor (2022)

En la columna de extracción, se muestra, en una escala de 0 a 1, la cantidad de varianza con que cada ítem se ajusta al modelo factorial. Por efectos de selección, se describen solamente los ítems con valores iguales o mayores a 0,60. En ese sentido, el ítem 1 se ajusta al modelo con 0,638 puntos de varianza; el ítem 3, con 0,841; el ítem 4, con 0,63 y el ítem 5, con 0,699. Considerando la información hasta este punto, podría afirmarse que los ítems mencionados se ajustan mejor que el resto al modelo factorial, lo que probablemente sugiere que contengan los aspectos sustanciales de la variable evaluada saberes previos. Precisamente, la inducción de los posibles factores se presenta en la siguiente tabla.

Tabla 30. Factores explicativos de la variable saberes previos

Componente	**Total**	**% de varianza**	**% de acumulado**	**Total**	**% de varianza**	**% acumulado**	**Total**	**%de varianza**	**% acumulado**
1	4,014	40,142	40,142	4,014	40,142	40,142	3,534	35,345	35,345
2	1,097	10,967	51,109	1,097	10,967	51,109	1,437	14,367	49,712
3	1,020	10,202	61,311	1,020	10,202	61,311	1,160	11,599	61,311
4	,763	7,625	68,936						
5	,725	7,251	76,188						
6	,578	5,781	81,969						
7	,538	5,375	87,344						
8	,472	4,716	92,060						
9	,413	4,131	96,191						
10	,318	3,809	100,000						

Nota: Se utilizó el método de extracción análisis de componentes principales
Fuente: autor (2022)

En la tabla anterior, se resalta el porcentaje de varianza de cada uno de los diez ítems, tomados como componentes y tres factores inducidos de ellos (escogidos por poseer, al menos 1 punto en la columna total de autovalor inicial) que explican en mayor medida, la puntuación obtenida en el total de ítems de la variable saberes previos. En ese sentido, el primer factor participa en un 40,142% de la varianza total, el segundo, con un 10,967% y el tercero, con un 10,202%. En estos 3 factores, es de notar que el primero cuadruplica los dos restantes, que tienden a ser iguales, es decir, el primero es 4 veces más significativo o influyente sobre el desempeño en la variable saberes previos, que el resto de los factores.

Ahora bien, en la siguiente tabla se presenta la correspondencia entre ítems y factores, lo que permite, finalmente, determinar qué ítems pueden agruparse en cada factor representativo de los resultados obtenidos en la variable saberes previos.

Tabla 31.Matriz de componente rotado de la variable saberes previos

Síntesis ítems	Factores		
	1	2	3
8.Grafico de patrones	,755	,132	-,033
4.Propiedad distributiva	,748	,263	,036
10.Resolución de proto-ecuaciones	,735	-,029	,154
2.Relación entre operaciones	,695	,166	,074
9.Simbolización proto algebraica	,683	,339	,132
6.Propiedades de la igualdad	,633	,251	-,124
1.Producto como adición	,214	,759	,128
7.Argmentacion de patrones	,490	,577	,043
3.Ejecucion operacional	-,109	,299	,860
5.Factor común	,465	-,381	,581

Nota: Se utilizó el método de extracción análisis de componentes principales, con método de rotación Varimax con normalización Káiser.
Fuente: autor (2022)

En la tabla anterior se evidencian las puntuaciones en una escala numérica de razón, de -1 a 1, asignadas a cada ítem en cada uno de los tres factores. Además, en cada factor se

describen los ítems de mayor puntuación, es decir, que le aportan de manera más significativa. Así, en el factor 1, se tiene el ítem 8, con 0,755; el 4, con 0,748; el 10, con 0,735; el 2, con 0,695; el 9, con 0,683 y el 6, con 0,633. En el factor 2, el ítem 1, con 0,759 y el 7, con 0,577. En el factor 3, el ítem 3, con 0,86 y el 5, con 0,581.

Con base en estos resultados, respecto al factor 1, los ítems 8, 9 y 10 hacen parte de la subvariable noción algebraica. Asimismo, los ítems 4 y 6, hacen parte de la subvariable axiomas y propiedades de R. Por último, el ítem 2 hace parte de la subvariable definiciones y operaciones en R. En principio, cabría esperarse que la mayoría de los ítems del factor 1, correspondan a la misma subvariable, lo cual se observa, para el caso de la subvariable noción algebraica, con un 50% de coincidencia con dicho factor. No obstante, el hecho de que ese factor incluya en su grupo de ítems a las subvariables definiciones, operaciones con R y axiomas, propiedades de R, podría significar que existe una estrecha correlación en el desempeño de estas subvariables. En tal caso existe la posibilidad de incluirlas en una nueva categoría, que explique, en un 40,142%, los resultados de la variable saberes previos. De forma inductiva, se propone que dicha categoría o factor puede ser: "Procesos cognoscitivos transicionales de la aritmética al proto-algebra", ya que incluye los procesos de razonamiento desde la concepción de número, pasando por la abstracción de sus propiedades y la construcción de entes simbólicos, sin notación propiamente algebraica.

Respecto al factor 2, el ítem 1 hace parte de la subvariable definiciones y operaciones en R. De otro lado, el ítem 7 hace parte de la categoría hace parte de la subvariable noción algebraica. En principio, cabría esperarse que la mayoría de los ítems del factor 2, correspondan a la misma subvariable, lo cual no se observa. No obstante, el hecho de que ese factor incluya en su grupo a ítems de dos subvariables distintas podría significar que existe una estrecha correlación en el desempeño obtenida en la subvariable definiciones y operaciones en R y en la subvariable noción algebraica. No obstante, dado que estas subvariables ya están incluidas en el factor 1, parece ser que se trata de una categoría específica de la categoría del factor 1, la cual sería responsable de explicar el 10,967% de los resultados de la variable saberes previos. No obstante, dado que estas subvariables ya están incluidas en el factor 1, parece ser que se trata de un factor estrechamente relacionado con este, el cual sería responsable de explicar el 10,967% de los resultados de la variable saberes previos. De forma inductiva, se propone que dicho factor

puede ser: “relación entre los conceptos numéricos y su construcción proto-algebraica”, dado que los ítems de este factor muestran la interdependencia en el uso de conceptos para la generalización.

Respecto al factor 3, el ítem 3 hace parte de la subvariable definiciones y operaciones en R. De otro lado, el ítem 5 hace parte de la categoría hace parte de la subvariable axiomas y propiedades de R. En principio, cabría esperarse que la mayoría de los ítems del factor 3, correspondan a la misma subvariable, lo cual no se observa. No obstante, el hecho de que ese factor incluya en su grupo a ítems de dos subvariables distintas podría significar que existe una estrecha correlación en el desempeño obtenido en la subvariable definiciones y operaciones en R y en la subvariable axiomas y propiedades de R. No obstante, dado que estas subvariables ya están incluidas en el factor 1, parece ser que se trata de un factor estrechamente relacionado con el este, el cual sería responsable de explicar el 10,202% de los resultados de la variable saberes previos. De forma inductiva, se propone que dicha categoría o factor puede ser: “abstracción de conceptos y procedimientos aritméticos”, dado que el factor hallado sugiere la relación entre el concepto de número con las propiedades que se derivan de ellas.

2.1.1.3. Axiomas y Propiedades De R

2.1.1.3.1. Estadísticos Descriptivos

Los resultados descriptivos en relación con el nivel alcanzado en la subvariable axiomas y propiedades de los R, por los estudiantes que participaron en la presente investigación, se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 32.Número de estudiantes según su nivel en la subvariable axiomas y propiedades

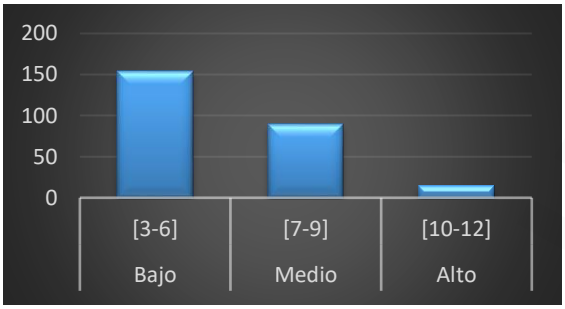
Nivel	Rango	No. Estudiantes
Bajo	[3-6]	154
Medio	[7-9]	89
Alto	[10-12]	15

Fuente: autor (2022)

A partir de la información anterior se evidencia que 154 estudiantes están en un nivel bajo, 89 en un nivel medio y solo 15, en un nivel alto. Es decir, el número aproximado de estudiantes en bajo es 1,73 veces los que están en nivel medio y 10 veces los que están en alto, o bien, el número de estudiantes en nivel medio representan un 58% de los que están en bajo, y el número de estudiantes en nivel alto, un 17% de los que están en nivel medio.

Como complemento a la descripción e interpretación anterior, en el siguiente gráfico expresa de otra forma la información de la tabla, con nuevos aspectos descriptivos.

Gráfico 9.Comparación del número de estudiantes y su nivel en los axiomas y propiedades

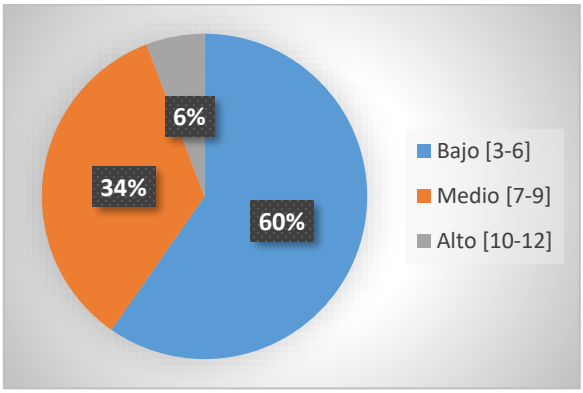


Fuente: autor (2022)

En el gráfico de barras, en el eje horizontal se muestran los diferentes rangos de puntaje en cada nivel de la subvariable y en el vertical, el número de estudiantes que se ubica en cada nivel. En dicho gráfico se observa claramente que existen más estudiantes en nivel bajo que en nivel medio, y, a su vez, más estudiantes en nivel medio que en bajo. En ese sentido, si se asume "nivel de axiomas y propiedades de los R" como variable independiente y "número de estudiantes" como variable dependiente, podría afirmarse que poseen una correlación inversa, es decir, a mayor nivel de axiomas y propiedades de los R, se espera que un menor número de estudiantes lo posea. De hecho, la disminución acelerada del número de estudiantes a medida que aumenta su nivel de axiomas y propiedades de los R parece sugerir un decaimiento exponencial.

No obstante, también se representó la información en forma de grafico circular, tal como se muestra a continuación,

Gráfico 10. Porcentaje de estudiantes, según su nivel en los axiomas y propiedades de R



Fuente: autor (2022)

El gráfico circular muestra que el 60% de los estudiantes están en el nivel bajo, el 34% en el nivel medio y el 6% en el nivel alto. Con esto se muestra que la mayoría de los estudiantes está en un nivel bajo; casi la tercera parte, en nivel medio y un porcentaje menor, en nivel alto.

2.1.1.3.2. Estadísticos Inferenciales

En primer lugar, se aplicó el análisis de varianza para comparar las medias de la subvariable axiomas y propiedades de R, a nivel institucional, con el fin de identificar si existen o no diferencias significativas. Para ello, se muestran las puntuaciones medias y la desviación típica en cada una de las 6 instituciones educativas participantes

Tabla 33. Media y desviación estándar de la subvariable axiomas y propiedades de R

					95% del intervalo de confianza para la media			
	N	Media	Desviación	Desv. Error	Límite inferior	Límite superior	Mínimo	Máximo
1	58	2,1092	,63180	,08296	1,9431	2,2753	1,00	3,67
2	36	2,2222	,59094	,09849	2,0223	2,4222	1,00	3,33
3	34	2,0294	,67354	,11551	1,7944	2,2644	1,33	3,67
4	37	2,0360	,67943	,11170	1,8095	2,2626	1,00	3,67
5	53	2,0377	,65588	,09009	1,8570	2,2185	1,00	3,67
6	40	2,0583	,60805	,09614	1,8639	2,2528	1,33	3,67
Total	258	2,0814	,63736	,03968	2,0033	2,1595	1,00	3,67

Fuente: autor (2022)

En la información anterior se observa un valor de la media entre 2,02 y 2,22 (redondeado a la centésima) en las 6 instituciones educativas, así: I.E.1 Agrícola de Urabá, con media de 2,11; I.E. 2 Chigorodó, con media 2,22; I.E. 3 Gonzalo Mejía, con media 2,03; I.E. 4 Juan Evangelista Berrio, con 2,04; I.E. 5 Los Andes, con 2,04; I.E.6 María Auxiliadora, con 2,05 y la media total, de las 6 instituciones, de 2,0814, que corresponde a un nivel bajo, teniendo en cuenta que la media óptima es, al menos 3, en la escala Likert que puntúa entre 1 y 4. Respecto a la desviación típica, se observan valores entre 0,5 y 0,7, correspondientes a las siguientes instituciones educativas: Agrícola de Urabá, con ,63180; Chigorodó, con ,59094; Gonzalo Mejía, con ,67354; Juan Evangelista Berrio, con ,67943; Los Andes, con ,65588 y María auxiliadora, con ,60805. Dichos resultados sugieren una mediana homogeneidad en las puntuaciones medias, solamente a nivel intrainstitucional. Así, solo considerando esta información descriptiva, parecen no existir diferencias significativas en el nivel bajo, común a todas las instituciones educativas participantes. No obstante, el ANOVA (Análisis de varianza) propiamente dicho, presentado a continuación si permite obtener resultados concluyentes al respecto.

Tabla 34. Análisis de varianza de la subvariable axiomas y propiedades de R

	Suma de cuadrados	Gl	Media cuadrática	F	Sig.
Entre grupos	1,049	5	,210	,512	,767
Dentro de grupos	103,353	252	,410		
Total	104,402	257			

Fuente: autor (2022)

En esta tabla se observa que el valor F es de ,512, con un valor de significación de ,767, lo cual se interpreta con base en el criterio de este estadístico para rechazar o aceptar la hipótesis nula: si el nivel de significación es menor a F, se rechaza; si el nivel de significación es mayor a F, se acepta. Dado que los resultados indican que el nivel de significación es mayor a F (,767>,512), entonces, se acepta la hipótesis nula: no existen diferencias significativas en las puntuaciones de la subvariable axiomas y propiedades de R, en los estudiantes de las 6 instituciones educativas.

2.1.1.4.Definiciones y Operaciones en R

2.1.1.4.1. Estadísticos Descriptivos

Los resultados descriptivos en relación con el nivel alcanzado en la subvariable definiciones y operaciones en R, por los estudiantes que participaron en la presente investigación, se muestran en la siguiente tabla,

Tabla 35. Número de estudiantes según el nivel de definiciones y operaciones en R

Nivel	Rango	No. Estudiantes
Bajo	[3-6]	117
Medio	[7-9]	127
Alto	[10-12]	14

Fuente: autor (2022)

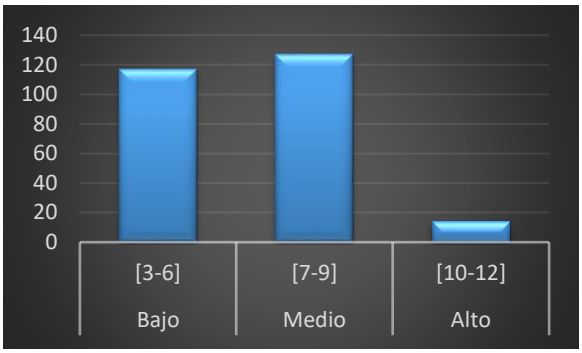
A partir de la información anterior se evidencia que 117 estudiantes están en un nivel bajo, 127 en un nivel medio y 14, en un nivel alto. Es de notar que el número de estudiantes en nivel medio es mayor que los de nivel bajo en esta subvariable, contrario al resultado de la subvariable axiomas y propiedades de R, y al de la variable saberes previos.

De hecho, el número aproximado de estudiantes en bajo es 0,92 veces los que están en nivel medio y 8,36 veces los que están en alto, o bien, el número de estudiantes en nivel medio representan un 108% de los que están en bajo, y el número de estudiantes en nivel alto, un 11% de los que están en nivel medio.

Como complemento a la descripción e interpretación anterior, en el siguiente gráfico expresa de otra forma la información de la tabla, con nuevos aspectos descriptivos.

Gráfico 11. Comparación del número de estudiantes respecto al nivel de definiciones y operaciones en R

PRELIMINAR

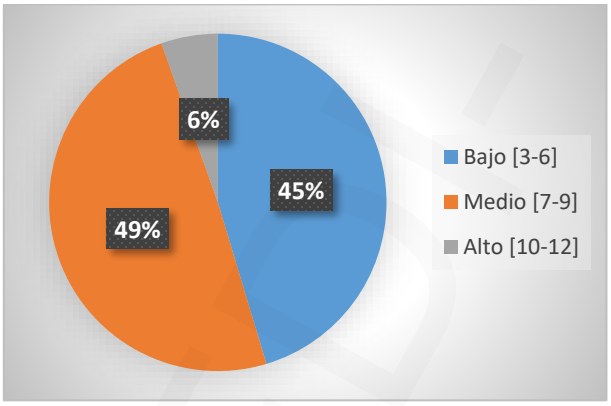


Fuente: autor (2022)

En el gráfico de barras, en el eje horizontal se muestran los diferentes rangos de puntaje en cada nivel de la subvariable y en el vertical, el número de estudiantes que se ubica en cada nivel. En dicho gráfico se observa claramente que existen más estudiantes en nivel medio que en nivel bajo, y, a su vez, más estudiantes en nivel medio que en alto. En ese sentido, no es clara la correlación entre un nivel de puntuación dado y el número de estudiantes que lo alcanzan.

No obstante, también se representó la información en forma de grafico circular, tal como se muestra a continuación,

Gráfico 12. Porcentaje según el nivel de la subvariable definiciones y operaciones en R



Fuente: autor (2022)

El gráfico circular muestra que el 45% de los estudiantes están en el nivel bajo, el 49% en el nivel medio y el 6% en el nivel alto. Con esto se muestra que casi la mitad de los

estudiantes está en un nivel medio, un 4% más que en bajo, y un porcentaje bajo, en nivel alto.

2.1.1.4.2. Estadísticos Inferenciales

En primer lugar, se aplicó el análisis de varianza para comparar las puntuaciones medias en la subvariable definiciones y operaciones en R a nivel interinstitucional, con el de identificar si existen o no diferencias significativas. Dicho análisis comienza mostrando las puntuaciones medias y la desviación típica en cada una de las 6 instituciones educativas participantes, tal como se aprecia en la siguiente tabla.

Tabla 36. Media de puntuación de la subvariable definiciones y operaciones en R

					95% del intervalo de confianza para la media			
	N	Media	Desviación	Desv. Error	Límite inferior	Límite superior	Mínimo	Máximo
1	58	2,2529	,58343	,07661	2,0995	2,4063	1,00	3,67
2	36	2,1204	,49859	,08310	1,9517	2,2891	1,00	3,33
3	34	2,4510	,60237	,10330	2,2408	2,6612	1,33	4,00
4	37	2,3333	,54433	,08949	2,1518	2,5148	1,33	3,67
5	53	2,3396	,59374	,08156	2,1760	2,5033	1,33	3,67
6	40	2,2583	,53636	,08481	2,0868	2,4299	1,33	3,67
Total	258	2,2907	,56669	,03528	2,2212	2,3602	1,00	4,00

Fuente: autor (2022)

En la información anterior se observa un valor de la media entre 2,12 y 2,45 (redondeado a la centésima) en las 6 instituciones educativas, así: I.E.1 Agrícola de Urabá, con media de 2,25; I.E. 2 Chigorodó, con media 2,12; I.E. 3 Gonzalo Mejía, con media 2,45; I.E. 4 Juan Evangelista Berrío, con 2,33; I.E. 5 Los Andes, con 2,34; I.E.6 María Auxiliadora, con 2,25 y la media total, de las 6 instituciones, de 2,2907, que corresponde a un nivel bajo, teniendo en cuenta que la media óptima es, al menos 3, en la escala Likert que puntúa entre 1 y 4.

Respecto a la desviación típica, se observan valores entre 0,4 y 0,6, correspondiente a las siguientes instituciones: Agrícola de Urabá, con ,58343; Chigorodó, con ,49859; Gonzalo Mejía, con ,60237; Juan Evangelista Berrio, con ,54433; Los Andes, con ,59374 y María Auxiliadora, con ,53636. Dichos valores sugieren una mediana homogeneidad en las

puntuaciones medias, solamente a nivel intrainstitucional. Así, solo considerando esta información descriptiva, parecen no existir diferencias significativas en el nivel bajo, común a todas las instituciones educativas participantes. No obstante, el ANOVA (Análisis de varianza) propiamente dicho, presentado a continuación si permite obtener resultados concluyentes al respecto.

Tabla 37. Análisis de varianza de la subvariable definiciones y operaciones en R

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Entre grupos	2,237	5	,447	1,404	,223
Dentro de grupos	80,294	252	,319		
Total	82,531	257			

Fuente: autor (2022)

En esta tabla se observa que el valor F es de 1,404 con un valor de significación de ,223, lo cual se interpreta con base en el criterio de este estadístico para rechazar o aceptar la hipótesis nula: si el nivel de significación es menor a F, se rechaza; si el nivel de significación es mayor a F, se acepta. Dado que los resultados indican que el nivel de significación es menor a F (,223<1,404), entonces, se rechaza la hipótesis nula: Sí existen diferencias significativas en las puntuaciones de la subvariable definiciones y operaciones en R, en los estudiantes de las 6 instituciones educativas.

2.1.1.3. Noción algebraica

2.1.1.3.1. Estadísticos Descriptivos

Los resultados descriptivos en relación con el nivel alcanzado en la subvariable noción algebraica por los estudiantes que participaron en la presente investigación, se muestran en la siguiente tabla

Tabla 38. Número de estudiantes según el nivel de la subvariable noción algebraica

Nivel	**Rango**	**No. Estudiantes**
Bajo	[4-8]	123

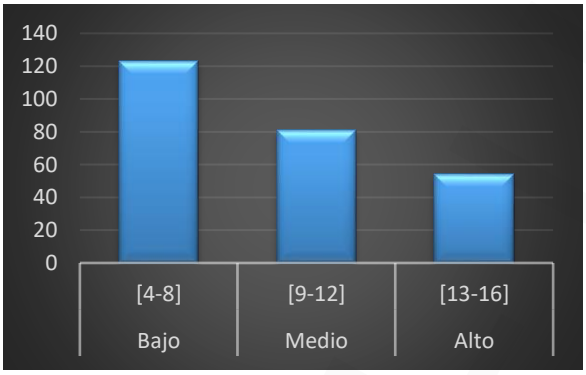
Medio	[9-12]	81
Alto	[13-16]	54

Fuente: autor (2022)

A partir de la información anterior se evidencia que 123 estudiantes están en nivel bajo, 81 en nivel medio y solo 54, en nivel alto. Es decir, el número aproximado de estudiantes en bajo es 1,5 veces los que están en nivel medio y 2,27 veces los que están en alto, o bien, el número de estudiantes en nivel medio representan un 66% de los que están en bajo, y el número de estudiantes en nivel alto, un 67% de los que están en nivel medio.

Como complemento a la descripción e interpretación anterior, en el siguiente gráfico expresa de otra forma la información de la tabla, con nuevos aspectos descriptivos

Gráfico 13. Comparación del número de estudiantes y su nivel en la subvariable noción algebraica

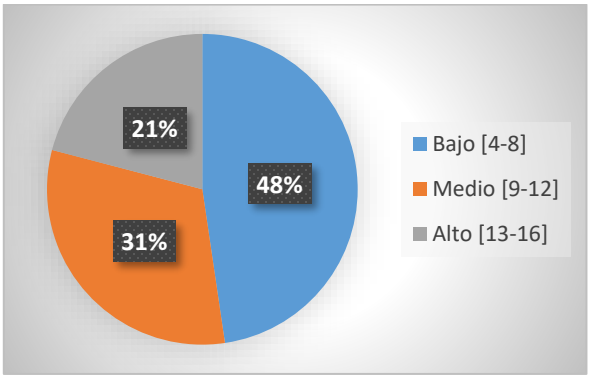


Fuente: autor (2022)

En el gráfico de barras, se observa claramente que existen más estudiantes en nivel bajo que en nivel medio, y, a su vez, más estudiantes en nivel medio que en bajo. En ese sentido, si se asume “nivel de noción algebraica” como variable independiente y “número de estudiantes” como variable dependiente, podría afirmarse que poseen una correlación inversa, es decir, a mayor nivel de la variable noción algebraica, menor número de estudiantes se ubican en dicho nivel.

No obstante, también se representó la información en forma de grafico circular, tal como se muestra a continuación,

Gráfico 14. Porcentaje de estudiantes según el nivel de la subvariable noción algebraica



Fuente: autor (2022)

El gráfico circular muestra que el 48% de los estudiantes están en el nivel bajo, el 31% en el nivel medio y el 21% en el nivel alto. Con esto se muestra que casi la mitad de los estudiantes está en nivel bajo, casi la tercera parte en nivel medio y la quinta parte en nivel alto.

2.1.1.3.2. Estadísticos Inferenciales

En primer lugar, se aplicó el análisis de varianza para comparar las puntuaciones medias en la subvariable noción algebraica a nivel interinstitucional, con el de identificar si existen o no diferencias significativas. Dicho análisis comienza mostrando las puntuaciones medias y la desviación típica en cada una de las 6 instituciones educativas participantes, tal como se aprecia en la siguiente tabla.

Tabla 39. Media y desviación típica de puntuación en la subvariable noción algebraica

					95% del intervalo de confianza para la media			
	N	Media	Desviación	Desv. Error	Límite inferior	Límite superior	Mínimo	Máximo
1	58	2,4095	,75029	,09852	2,2122	2,6068	1,00	3,75
2	36	2,4653	,55147	,09191	2,2787	2,6519	1,50	4,00
3	34	2,3676	,79352	,13609	2,0908	2,6445	1,00	4,00
4	37	2,3581	,80264	,13195	2,0905	2,6257	1,00	4,00
5	53	2,3774	,67336	,09249	2,1918	2,5630	1,00	3,75
6	40	2,3375	,67356	,10650	2,1221	2,5529	1,00	3,75

Total	258	2,3866	,70675	,04400	2,3000	2,4733	1,00	4,00

Fuente: autor (2022)

En la información anterior se observa un valor de la media entre 2,34 y 2,38 (redondeado a la centésima) en las 6 instituciones educativas, así: I.E.1 Agrícola de Urabá, con media de 2,41; I.E. 2 Chigorodó, con media 2,47; I.E. 3 Gonzalo Mejía, con media 2,37; I.E. 4 Juan Evangelista Berrío, con 2,36; I.E. 5 Los Andes, con 2,38; I.E.6 María Auxiliadora, con 2,34 y la media total, de las 6 instituciones, de 2,3866, que corresponde a un nivel bajo, teniendo en cuenta que la media óptima es, al menos 3, en la escala Likert que puntúa entre 1 y 4. Respecto a la desviación típica, se observan valores entre 0,5 y 0,8, correspondientes a las siguientes instituciones: Agrícola de Urabá, con ,75029; Chigorodó, con ,55147; Gonzalo Mejía, con ,79352; Juan Evangelista Berrio, con ,80264; Los Andes, con ,67336; María auxiliadora, con ,67356. Estos resultados sugieren una mediana homogeneidad en las puntuaciones medias, solamente a nivel intrainstitucional. Así, solo considerando esta información descriptiva, parecen no existir diferencias significativas en el nivel bajo, común a todas las instituciones educativas participantes. No obstante, el ANOVA (Análisis de varianza) propiamente dicho, presentado a continuación si permite obtener resultados concluyentes al respecto.

Tabla 40. Análisis de varianza de la subvariable noción algebraica

	Suma de cuadrados	Gl	Media cuadrática	F	Sig.
Entre grupos	,396	5	,079	,156	,978
Dentro de grupos	127,975	252	,508		
Total	128,371	257			

Fuente: autor (2022)

En esta tabla se observa que el valor F es de ,156, con un valor de significación de ,978, lo cual se interpreta con base en el criterio de este estadístico para rechazar o aceptar la hipótesis nula: si el nivel de significación es menor a F, se rechaza; si el nivel de significación es mayor a F, se acepta. Dado que los resultados indican que el nivel de significación es mayor a F (,978>,156), entonces, se acepta la hipótesis nula: no existen

diferencias significativas en el nivel de la subvariable noción algebraica de los estudiantes entre las 6 instituciones educativas.

2.1.2. Estrategias Metacognitivas

2.1.2.1. Estadísticos Descriptivos

Los resultados descriptivos en relación con el nivel alcanzado en la variable saberes previos por los estudiantes que participaron en la presente investigación, se muestran en la siguiente tabla,

Tabla 41. Número de estudiantes según el nivel en la variable estrategias metacognitivas

Nivel	Rango	No. Estudiantes
Bajo	[25-50]	156
Medio	[51-75]	80
Alto	[76-100]	22

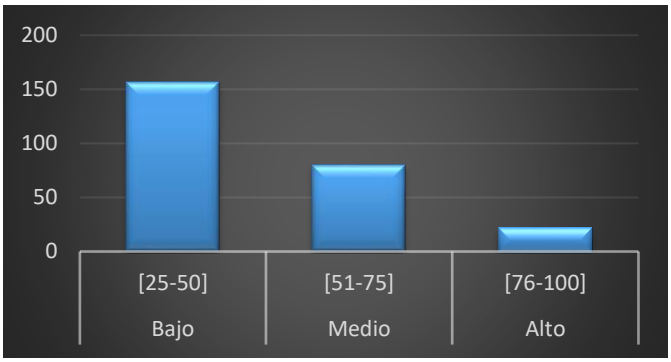
Fuente: autor (2022)

A partir de la información anterior se evidencia que 156 estudiantes están en un nivel bajo, 80 en un nivel medio y 22, en un nivel alto. Es decir, el número aproximado de estudiantes en bajo es 1,5 veces los que están en nivel medio y 7 veces los que están en alto, o bien, el número aproximado de estudiantes en nivel medio representan un 50% de los que están en bajo, y el número de estudiantes en nivel alto, un 28% de los que están en nivel medio.

Como complemento a la descripción e interpretación anterior, en el siguiente gráfico expresa de otra forma la información de la tabla, con nuevos aspectos descriptivos

Gráfico 15. Comparación del número de estudiantes por nivel de estrategias metacognitivas

REPOSITORIO UT

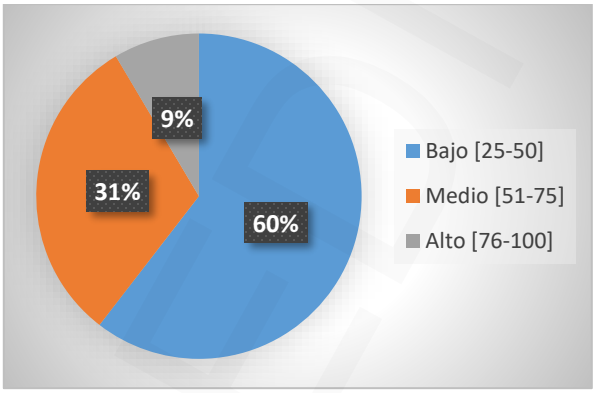


Fuente: autor (2022)

En el gráfico de barras, se observa claramente que existen más estudiantes en nivel bajo que en nivel medio, y, a su vez, más estudiantes en nivel medio que en bajo. En ese sentido, si se asume "nivel de estrategias metacognitivas" como variable independiente y "número de estudiantes" como variable dependiente, podría afirmarse que poseen una correlación inversa, es decir, a medida que aumenta el nivel evaluado de estrategias metacognitivas, menos estudiantes logran alcanzarlo. De hecho, la disminución acelerada del número de estudiantes a medida que aumenta su nivel de la variable estrategias metacognitivas parece sugerir un decaimiento exponencial pronunciado.

No obstante, también se representó la información en forma de grafico circular, tal como se muestra a continuación,

Gráfico 16. Porcentaje de estudiantes según el nivel de estrategias metacognitivas



Fuente: autor (2022)

El gráfico circular muestra que el 60% de los estudiantes están en el nivel bajo, el 31% en el nivel medio y el 9% en el nivel alto. Con esto se muestra que la mayoría de los estudiantes está en un nivel bajo, casi la tercera parte en nivel medio y la minoría, en nivel alto. Por último, en la siguiente tabla se muestra una descripción detallada de la media y desviación estándar, por cada ítem del instrumento de la variable estrategias metacognitivas.

Tabla 42. Media y desviación típica de la variable estrategias metacognitivas por ítem

Síntesis ítems	N	Mínimo	Máximo	Media	Desviación
1.Disposición de estrategias	258	1	4	2,19	1,026
2.Comprende y relaciona	258	1	4	2,36	,937
3.Sabe lo que desconoce	258	1	4	2,31	,985
4.Se traza objetivos	258	1	3	1,53	,618
5.Realiza auto preguntas	258	1	4	1,89	,906
6.Escoge entre posibilidades	258	1	4	2,49	,865
7.Lee instrucciones	258	1	4	1,83	,844
8.Metodo para recordar	258	1	4	1,71	,825
9.Revisa objetivos	258	1	4	2,07	,891
10.Considera alternativas	258	1	4	2,68	1,194
11.Comprende datos importantes	258	1	4	1,93	,894
12.Identifica estrategias para casos	258	1	4	2,22	,839
13.Revisa comprensión enunciado	258	1	4	2,57	,849
14.Autopregunta sobre eficacia	258	1	4	1,77	,868
15.Solicita ayuda	258	1	4	1,96	,951
16.Cambia de estrategia	258	1	4	2,84	,762
17.Realiza auto lecturas mentales	258	1	4	2,12	,999
18.Repasa información	258	1	4	1,73	,790

PREDITOR

19.Es autocrítico	258	1	4	1,76	,787
20.Analiza su autoeficacia	258	1	4	2,26	1,135
21.Analiza su auto eficiencia	258	1	4	1,75	,833
22.Conciencia de aprendizaje	258	1	4	1,85	,735
23.Hipotetiza sobre supuestos	258	1	4	2,24	1,022
24.Analiza procedimientos alternativos	258	1	4	2,07	,931
25.Analiza la transferencia de procesos y análisis	258	1	4	2,21	1,061

Fuente: autor (2022)

En la información anterior se muestran valores de la media por ítem de las estrategias metacognitivas que oscilan entre 1,53 y 2,84. Se observa un primer grupo de ítems cuya media está ubicada entre 1,53 y 2,0, y fueron los siguientes: el ítem 4, con media de 1,53; el ítem 5, con 1,89; el ítem 7, con 1,83; el ítem 8, con 1,71; el ítem 11, con 1,93; el ítem 14, con 1,77; el ítem 15, con 1,96; el ítem 18, con 1,73; el ítem 19, con 1,76; el ítem 21, con 1,75 y el ítem 22, con 1,87, los cuales representan un 44% del total de ítems. Asimismo, el otro grupo de ítems, entre 2,0 y 2,84, a saber, el ítem 1, con 2,19; el ítem 2, con 2,36; el ítem 3, con 2,31; el ítem 6, con 2,49; el ítem 9, con 2,07; el ítem 10, con 2,68; el ítem 12, con 2,22; el ítem 13, con 2,57; el ítem 16, con 2,84; el ítem 17, con 2,12; el ítem 20, con 2,26: el ítem 23, con 2,24; el ítem 24, con 2,07 y el ítem 25; con 2,21, los cuales representan el otro 56%. De lo anterior puede afirmarse que, en promedio, el 44% de los ítems tuvo un muy alto nivel de dificultad para los estudiantes evaluados y el 56% restante, alta dificultad, juicio que se concluye, dado que la media está considerablemente por debajo del nivel óptimo, a saber, al menos 3, en la escala Likert, que puntúa entre 1 y 4.

Asimismo, dado que la desviación típica es una cuantificación del grado de heterogeneidad de las puntuaciones de los estudiantes, donde lo deseable es que esté lo más cercana a 0 y, teniendo en cuenta que los valores de la desviación típica de las puntuaciones en los ítems, oscilan entre 0,6 y 0,9, para el primer grupo, así: ítem 4, con ,618; ítem 5 con ,906; ítem 7, con ,844; ítem 8, con ,825; ítem 11, con ,894; ítem 14, con ,868; ítem 15, con

,951; ítem 18, con ,790; ítem 19, con ,787; ítem 21, con ,833; ítem 22, con ,735; y entre 0,7 y 1,2 para el segundo grupo, así: ítem 1, con 1,026, ítem 2, con ,937; ítem 3, con ,985; ítem 6, con ,865; ítem 9 con ,891; ítem 10, con 1,194; ítem 12, con ,839; ítem 13, con ,849; ítem 16 con ,762; ítem 17 con ,999; ítem 20, con 1,135; ítem 23, con 1,022; ítem 24 con ,931; ítem 25, con 1,061, se puede inferir que, desde la individualidad de los ítems que componen el primer grupo, hubo más homogeneidad que el segundo, lo que revela que en cada uno de esos ítems, los estudiantes tuvieron un desempeño más similar, mientras que en cada uno de los ítems del segundo, la homogeneidad fue menor, es decir, los estudiantes tuvieron puntuaciones más dispersas, lo cual puede indicar que existen ciertas diferencias individuales en cuanto al conocimiento del aspecto de los saberes previos evaluado en cada ítem de dicho grupo. No obstante, a pesar de las leves diferencias individuales, la media de la puntuación en por ítem en la variable estrategias metacognitivas sigue siendo bajo.

2.1.2.2. Estadísticos Inferenciales

En primer lugar, se aplicó el análisis de varianza para comparar las medias de saberes previos a nivel institucional, con el de identificar si existen diferencias significativas. Para ello, la siguiente tabla tiene como objetivo mostrar las puntuaciones medias y la desviación típica en cada una de las 6 instituciones educativas participantes.

Tabla 43. Media y desviación típica en la variable estrategias metacognitivas por institución

					95% del intervalo de confianza para la media			
	N	Media	Desviación	Desv. Error	Límite inferior	Límite superior	Mínimo	Máximo
1	58	2,0841	,50322	,06608	1,9518	2,2165	1,52	3,16
2	36	2,0500	,39833	,06639	1,9152	2,1848	1,40	3,24
3	34	2,1753	,46866	,08037	2,0118	2,3388	1,44	3,48
4	37	2,0605	,37637	,06188	1,9351	2,1860	1,64	3,24
5	53	2,0966	,47234	,06488	1,9664	2,2268	1,56	3,12
6	40	2,1070	,52945	,08371	1,9377	2,2763	1,52	3,24
Total	258	2,0941	,46352	,02886	2,0373	2,1509	1,40	3,48

En la información anterior se observa un valor de la media entre 2,05 y 2,18 (redondeado a la centésima) en las 6 instituciones educativas, así: I.E.1 Agrícola de Urabá,

con media de 2,08; I.E. 2 Chigorodó, con media 2,05; I.E. 3 Gonzalo Mejía, con media 2,18; I.E. 4 Juan Evangelista Berrío, con 2,06; I.E. 5 Los Andes, con 2,10; I.E.6 María Auxiliadora, con 2,10 y la media total, de las 6 instituciones, de 2,0941, que corresponde a un nivel bajo, teniendo en cuenta que la media óptima es, al menos 3, en la escala Likert que puntúa entre 1 y 4. Respecto a la desviación típica, se observan valores entre 0,3 y 0,5, correspondiente a las siguientes instituciones educativas: Agrícola de Urabá, con ,50322; Chigorodó, con ,39833; Gonzalo Mejía, con ,46866; Juan Evangelista Berrio, con ,37637; Los Andes, con ,47234 y María Auxiliadora, con ,52945. Estos datos sugieren una mediana homogeneidad en las puntuaciones medias, solamente a nivel intrainstitucional. No obstante, considerando las diferencias entre instituciones, tanto de puntuaciones medias, parece que sí existen diferencias significativas en las puntuaciones medias por I.E. Precisamente, el ANOVA (Análisis de varianza), presentado a continuación si permite obtener resultados concluyentes al respecto.

Tabla 44. Análisis de varianza de la variable estrategias metacognitivas

	Suma de cuadrados	Gl	Media cuadrática	F	Sig.
Entre grupos	,349	5	,070	,320	,901
Dentro de grupos	54,869	252	,218		
Total	55,217	257			

Fuente: autor (2022)

En esta tabla se observa que el valor F es de ,320, con un valor de significación de ,901, lo cual se interpreta con base en el criterio de este estadístico para rechazar o aceptar la hipótesis nula: si el nivel de significación es menor a F, se rechaza; si el nivel de significación es mayor a F, se acepta. Dado que los resultados indican que el nivel de significación es mayor a F (,901>,320), entonces, se acepta la hipótesis nula: No existen diferencias significativas en las medias de la variable estrategias metacognitivas, a nivel interinstitucional.

En segundo lugar, para el análisis factorial se aplicó, en primer lugar, la prueba KMO y la prueba de esfericidad de Bartlett, tal como se indica a continuación,

Tabla 45. Medida de KMO y Prueba de Bartlett de la variable estrategias metacognitivas

Medida Kaiser-Meyer-Olkin de adecuación de muestreo	,867
Prueba de esfericidad de Bartlett aprox. Chi-cuadrado	3366,377
Gl	300
Sig.	,000

Fuente: autor (2022)

En la tabla anterior se observa un valor de 0,867 para el KMO, así como la prueba de Bartlett, compuesta por el chi-cuadrado, con valor de 3366,377, gl con valor de 300 y nivel de significación de 0,00. En cuanto a su interpretación, en primer lugar, el valor de KMO se considera notable, ya que es mayor o igual a 0,8, siendo lo ideal que esté lo más cercano a 1. Por su parte, la prueba de esfericidad de Bartlett indica que se puede continuar con la interpretación del modelo factorial, con nivel de significancia o error de 0,000.

Posteriormente, como parte de los resultados arrojados por el SPSS, se presenta en primera instancia la tabla de comunalidades, la cual indica el porcentaje en que cada ítem se ajusta al modelo, es decir, los ítems que afectan en mayor medida los resultados de los estudiantes.

Tabla 46. Comunalidades de la variable estrategias metacognitivas por ítem

Síntesis ítems	Inicial	Extracción
1.Disposición de estrategias	1,000	,703
2.Comprende y relaciona	1,000	,743
3.Sabe lo que desconoce	1,000	,808
4.Se traza objetivos	1,000	,442
5.Realiza auto preguntas	1,000	,625
6.Escoge entre posibilidades	1,000	,704
7.Lee instrucciones	1,000	,655
8.Metodo para recordar	1,000	,638
9.Revisa objetivos	1,000	,674
10.Considera alternativas	1,000	,787
11.Comprende	1,000	,687

datos importantes		
12.Identifica estrategias para casos	1,000	,743
13.Revisa comprensión enunciado	1,000	,786
14.Autopregunta sobre eficacia	1,000	,691
15.Solicita ayuda	1,000	,716
16.Cambia de estrategia	1,000	,702
17.Realiza auto lecturas mentales	1,000	,702
18.Repasa información	1,000	,560
19.Es autocrítico	1,000	,568
20.Analiza su autoeficacia	1,000	,735
21.Analiza su auto eficiencia	1,000	,670
22.Conciencia de aprendizaje	1,000	,768
23.Hipotetiza sobre supuestos	1,000	,774
24.Analiza procedimientos alternativos	1,000	,646
25.Analiza la transferencia de procesos y análisis	1,000	,697

Fuente: autor (2022)

En la columna de extracción, se muestra, en una escala de 0 a 1, la cantidad de varianza con que cada ítem se ajusta al modelo factorial. Para efectos de precisión, se describen solamente los ítems con valores iguales o mayores a 0,70. En ese sentido, el ítem 1 se ajusta al modelo con 0,703 puntos de varianza; el ítem 2, con 0,743; el ítem 3, con 0,808 y el ítem 6, con 0,704; el ítem 10, con 0,787; el ítem 12, con 0,743; el ítem 13, con 0,786; el ítem 15, con 0,716; el ítem 16, con 0,702; el ítem 17, con 0,702; el ítem 20, con 0,735; el ítem 22, con 0,768 y el ítem 23, con 0,774.

Considerando la información hasta este punto, podría afirmarse que los ítems mencionados se ajustan mejor que el resto al modelo factorial, lo que probablemente

sugiere que contengan los aspectos sustanciales de la variable evaluada estrategias metacognitivas. Precisamente, la inducción de los posibles factores se presenta en la siguiente tabla

Tabla 47. Factores explicativos de la variable estrategias metacognitivas

Componente	Total	% de varianza	% de acumulado	Total	% de varianza	% acumulado	Total	%de varianza	% acumulado
1	7,277	29,109	29,109	7,277	29,109	29,109	4,889	19,554	19,554
2	3,019	12,075	41,183	3,019	12,075	41,183	3,233	12,934	32,488
3	2,281	9,123	50,307	2,281	9,123	50,307	2,816	11,263	43,751
4	2,040	8,160	58,466	2,040	8,160	58,466	2,622	10,488	54,239
5	1,483	5,931	64,397	1,483	5,931	64,397	2,363	9,452	63,692
6	1,126	4,505	68,901	1,126	4,505	68,901	1,302	5,210	68,901
7	,814	3,258	72,159						
8	,709	2,836	74,995						
9	,611	2,442	77,437						
10	,566	2,263	79,700						
11	,538	2,151	81,851						
12	,499	1,995	83,846						
13	,433	1,733	85,579						
14	,426	1,706	87,285						
15	,410	1,604	88,925						
16	,401	1,604	90,529						
17	,355	1,418	91,947						
18	,344	1,376	93,323						
19	,309	1,236	94,560						
20	,285	1,139	95,699						
21	,278	1,111	96,809						
22	,236	,943	97,753						
23	,213	,850	98,603						
24	,182	,729	99,331						
25	,167	,669	100,000						

Fuente: autor (2022)

En la tabla anterior, se resalta el porcentaje de varianza de cada uno de los 25 ítems, tomados como componentes y 6 factores inducidos de ellos (escogidos por poseer, al menos 1 punto en la columna total de autovalor inicial) que explican en mayor medida, la puntuación obtenida en el total de ítems de estrategias metacognitivas. En ese sentido, el primer factor participa en un 29,109% de la varianza total; el segundo, con un 12,075%; el tercero, con un 9,123%; el cuarto, con 8,160%; el quinto, con 5, 931% y el sexto, con 4,505%. En estos 6 factores, es de notar que el primero representa más del doble del segundo, diferencia tan notable que no se observa en el consecutivo inferior, a partir del segundo factor, lo que evidencia que el primero tiene dos veces mayor significatividad respecto al resto de factores, en la puntuación de la variable estrategias metacognitivas.

Ahora bien, en la siguiente tabla se presenta la correspondencia entre ítems y factores, lo que permite, finalmente, determinar qué ítems pueden agruparse en cada factor representativo de los resultados obtenidos en la variable estrategias metacognitivas.

Tabla 48. Matriz de componente rotado de la variable estrategias metacognitivas

	Componente					
	1	2	3	4	5	6
7.Lee instrucciones	,780	,130	,125	,107	-,025	,043
5.Realiza auto preguntas	,778	,075	,075	,070	,016	,060
11.Comprende datos importantes	,747	,161	,216	,219	,067	,064
15.Solicita ayuda	,743	,138	,283	,225	,092	,079
9.Revisa objetivos	,715	,128	,206	,122	,298	-,033
2.Comprende y relaciona	,698	,125	-,260	,253	-,104	-,313
1.Disposición de estrategias	,659	,069	,090	,221	,455	,013
14.Autopregunta sobre eficacia	,653	,096	,126	-,415	-,162	,204
25.Analiza la transferencia de procesos y análisis	,271	,753	,095	,189	-,072	-,079
17.Realiza auto lecturas mentales	,224	,720	,141	,328	,023	,069
16.Cambia de estrategia	,005	,711	-,103	,052	,322	,282
24.Analiza	,124	,709	,237	,259	,056	-,037

procedimientos alternativos						
18.Repasa información	,033	,635	069	-,375	-,074	-,041
10.Considera alternativas	,115	,168	,847	,154	-,048	-,038
3.Sabe lo que desconoce	,384	,207	,784	,009	-,051	-,007
13.Revisa comprensión enunciado	,339	,106	,698	,040	,390	-,139
21.Analiza su auto eficiencia	,126	,216	,173	,744	,128	,085
19.Es autocrítico	,218	,216	,080	,668	,136	,054
12.Identifica estrategias para casos	,152	,017	-,523	,597	-,286	,093
8.Metodo para recordar	,014	,002	,024	,576	,497	-,240
20.Analiza su autoeficacia	,194	,109	,121	,097	,808	-,095
23.Hipotetiza sobre supuestos	,240	,577	,156	,103	,589	-,035
6.Escoge entre posibilidades	,293	,205	,362	-,122	-,569	-,328
22.Conciencia de aprendizaje	,102	,164	-,221	,149	-,018	,812
4.Se traza objetivos	,116	,178	-,284	,288	,233	-,422

Nota: Se utilizó el método de extracción análisis de componentes principales y método de rotación: Varimax con normalización Kaiser
Fuente: autor (2022)

En la tabla anterior se evidencian las puntuaciones en una escala numérica de razón, de -1 a 1, asignadas a cada ítem en cada uno de los 6 factores. Además, en cada factor se describen los ítems de mayor puntuación, es decir, que aportan, de manera más significativa al componente o factor explicativo de los resultados. Así, en el factor 1, es más significativo: 7, con 0,780; el 5, con 0,778; el 11, con 0,747; el 15, con 0,743; el 9, con 0,715; el 2, con 0,698 y el 1, con 0,659. En el factor 2, el ítem 25, con 0,753; el 17, con 0,72; el 16, con 0,711; el 24, con 0,709 y el 18, con 0,635. En el factor 3, el ítem 10, con 0,847; el ítem 3, con 0,784; el ítem 13, con 0,698; el ítem 12, con 0,523. En el factor 4, el ítem 21, con 0,744; el ítem 19, con 0,668; el ítem 12, con 0,597 y el ítem 8, con 0,576. En el factor 5, el ítem 20, con 0,808 y los ítems 23 y 6, con 0,589. En el factor 6, el ítem 22, con 0,812 y el ítem 4, con -0,422.

Con base en estos resultados, respecto al factor 1, los ítems 7, 5, 2 y 1 hacen parte de la subvariable planeación. Asimismo, los ítems 11, 15, 9 hacen parte de la subvariable regulación. En principio, cabría esperarse que la mayoría de los ítems del factor 1, correspondan a la misma subvariable, lo cual se observa en un 57% para la subvariable planeación y en un 43% para la subvariable regulación. No obstante, el hecho de que ese factor incluya en su grupo de ítems a aquellos que pertenecen a ambas subvariables, podría significar que existe una estrecha correlación y/o dependencia en el desempeño de los estudiantes en estas. En tal caso, existen ciertos aspectos de la planeación y regulación, correspondientes a dicho factor, que explican, en un 29,109 %, la variabilidad de los resultados de la variable estrategias metacognitivas. De forma inductiva, a partir de los núcleos conceptuales de los ítems, se propone que dicha categoría o factor puede ser: "procesos regulatorios en la planeación" y, análogamente, "procesos de planeación en la regulación", ya que incluye los ítems de dicho factor e implican la relación entre ambos subprocesos metacognitivos.

En relación con el factor 2, los ítems 25 y 24 hacen parte de la subvariable evaluación. Además, los ítems 17, 16 y 18 hacen parte de la subvariable regulación. En principio, cabría esperarse que la mayoría de los ítems del factor 2, correspondan a la misma subvariable, lo cual se observa en 40% para la subvariable evaluación y en un 60% para la subvariable regulación. No obstante, el hecho de que ese factor incluya en su grupo de ítems a aquellos que pertenecen a ambas subvariables, podría significar que existe una estrecha correlación y/o dependencia en el desempeño de los estudiantes en estas. En tal caso, existen ciertos aspectos de la regulación y evaluación implicados en un factor que explica, en un 12,075 %, la variabilidad de los resultados de la variable estrategias metacognitivas. De forma inductiva, a partir de los núcleos conceptuales de los ítems, se propone que dicho factor puede ser: "procesos regulatorios en la evaluación" o "procesos evaluativos de la regulación" ya que los ítems que integran dicho factor implican simultáneamente ambos subprocesos metacognitivos en su realización.

Respecto al factor 3, los ítems 10, 13 y 12 hacen parte de la subvariable regulación. Además, el ítem 3 hace parte de la subvariable planeación. En principio, cabría esperarse que la mayoría de los ítems del factor 3, correspondan a la misma subvariable, lo cual se observa en 75% para la subvariable regulación y en un 25% para la subvariable planeación.

No obstante, el hecho de que ese factor incluya en su grupo de ítems a aquellos que pertenecen a ambas subvariables, podría significar que existe una estrecha correlación y/o dependencia en el desempeño de los estudiantes en estas. En tal caso, existen ciertos aspectos regulatorios implicados en un factor que explica, en un 9,123 %, la variabilidad de los resultados de la variable estrategias metacognitivas. De forma inductiva, a partir de los núcleos conceptuales de los ítems, se propone que dicha categoría o factor puede ser: "revisión de procesos ejecutivos", dado que el punto conceptual común de los ítems que integran el factor.

Sobre el factor 4, los ítems 21 y 19 hacen parte de la subvariable evaluación. Además, el ítem 8 hace parte de la subvariable planeación y el ítem 12, de la subvariable regulación. En principio, cabría esperarse que la mayoría de los ítems del factor 4, correspondan a la misma subvariable, lo cual se observa en un 50% para la subvariable evaluación, 25% para la subvariable planeación y 25% para la subvariable regulación. No obstante, el hecho de que ese factor incluya en su grupo de ítems a aquellos que pertenecen a las tres subvariables, podría significar que existe una estrecha correlación y/o dependencia en el desempeño de los estudiantes en estas. En tal caso, existen ciertos aspectos de la planeación, regulación y evaluación, implicados en un factor que explica, en un 8,160 %, la variabilidad de los resultados de la variable estrategias metacognitivas. De forma inductiva, a partir de los núcleos conceptuales de los ítems, se propone que dicho factor puede ser: "articulación de tareas proyectivas, de revisión y valoración", pues los ítems de dicho factor implican, de forma simultánea, la interrelación entre los aspectos mencionados.

Frente al factor 5, los ítems 20 y 23 hacen parte de la subvariable evaluación. Además, el ítem 6 hace parte de la subvariable planeación. En principio, cabría esperarse que la mayoría de los ítems del factor 5, correspondan a la misma subvariable, lo cual se observa en un 67% para la subvariable evaluación, y en un 33% para la subvariable planeación. No obstante, el hecho de que ese factor incluya en su grupo de ítems a aquellos que pertenecen a ambas subvariables, podría significar que existe una estrecha correlación y/o dependencia en el desempeño de los estudiantes en estas. En tal caso, existen ciertos aspectos de la planeación y evaluación, implicados en un factor que explica, en un 5,931 %, la variabilidad de los resultados de la variable estrategias metacognitivas. De forma

inductiva, a partir de los núcleos conceptuales de los ítems, se propone que dicho factor puede ser: evaluación de los procesos de planeación, dado que este proceso es común en cada uno de los ítems que componen dicho factor.

Por último, en el factor 6, el ítem 22 hace parte de la subvariable evaluación. Además, el ítem 4 hace parte de la subvariable planeación. En principio, cabría esperarse que la mayoría de los ítems del factor 6, correspondan a la misma subvariable, lo cual se observa en un 50% para la subvariable evaluación, y en un 50% para la subvariable planeación. No obstante, el hecho de que ese factor incluya en su grupo de ítems a aquellos que pertenecen a ambas subvariables, podría significar que existe una estrecha correlación y/o dependencia en el desempeño de los estudiantes en estas. En tal caso, existen ciertos aspectos de la planeación y evaluación están implicados en un factor que explica, en un 4,505 %, la variabilidad de los resultados de la variable estrategias metacognitivas. De forma inductiva, a partir de los núcleos conceptuales de los ítems, se propone que dicho factor puede ser: planeación del proceso de evaluación, dado que los ítems que componen el factor evalúan dicha actividad cognoscitiva en su realización.

2.1.2.3. Planeación

2.1.2.3.1. Estadísticos descriptivos

Los resultados descriptivos en relación con el nivel alcanzado en la subvariable planeación por los estudiantes que participaron en la presente investigación, se muestran en la siguiente tabla,

Tabla 49. Número de estudiantes según su nivel en la subvariable planeación

Nivel	Rango	No. estudiantes
Bajo	[8-16]	179
Medio	[17-25]	76
Alto	[26-32]	3

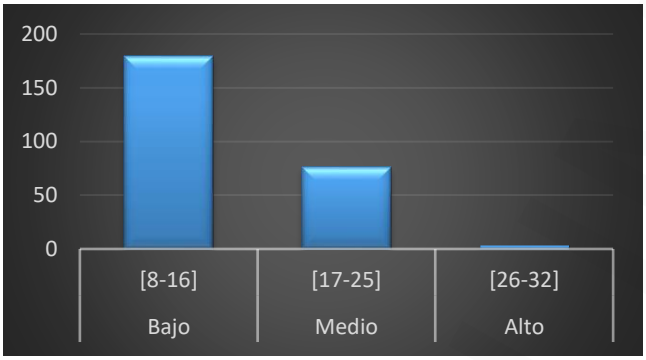
Fuente: autor (2022)

REPOSITORIO

A partir de la información anterior se evidencia que 179 estudiantes están en un nivel bajo, 76 en un nivel medio y solo 3, en un nivel alto. Es decir, el número aproximado de estudiantes en bajo es 2,4 veces los que están en nivel medio y 60 veces los que están en alto, o bien, el número aproximado de estudiantes en nivel medio representan un 42% de los que están en bajo, y el número de estudiantes en nivel alto, un 4% de los que están en nivel medio.

Como complemento a la descripción e interpretación anterior, en el siguiente gráfico expresa de otra forma la información de la tabla, con nuevos aspectos descriptivos,

Gráfico 17. Comparación del número de estudiantes por nivel de la subvariable planeación

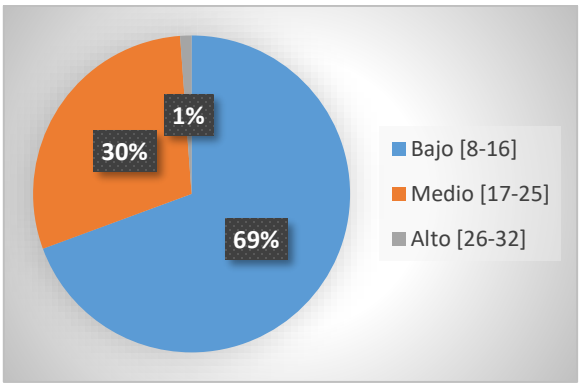


Fuente: autor (2022)

En el gráfico de barras, se observa claramente que existen más estudiantes en nivel bajo que en nivel medio, y, a su vez, más estudiantes en nivel medio que en bajo. En ese sentido, si se asume "nivel de planeación" como variable independiente y "número de estudiantes" como variable dependiente, podría afirmarse que poseen una correlación inversa, es decir, a medida que aumenta el nivel evaluado de la subvariable planeación, menos estudiantes logran alcanzarlo. De hecho, la disminución acelerada del número de estudiantes a medida que aumenta su nivel de la subvariable planeación, parece sugerir un decaimiento exponencial.

No obstante, también se representó la información en forma de grafico circular, tal como se muestra a continuación,

Gráfico 18. Porcentaje de estudiantes, según su nivel en la subvariable planeación



Fuente: autor (2022)

El gráfico circular muestra que el 69% de los estudiantes están en el nivel bajo, el 30% en el nivel medio y el 1% en el nivel alto. Con esto se muestra que la mayoría de los estudiantes, de hecho, casi las dos terceras partes está en un nivel bajo, casi la tercera parte restante, en nivel medio y un porcentaje insignificante, en nivel alto.

2.1.2.3.2. Estadísticos inferenciales

En primer lugar, se aplicó el análisis de varianza para comparar las puntuaciones medias en la subvariable planeación en R a nivel interinstitucional, con el de identificar si existen o no diferencias significativas. Dicho análisis comienza mostrando las puntuaciones medias y la desviación típica en cada una de las 6 instituciones educativas participantes, tal como se aprecia en la siguiente tabla,

Tabla 50. Media y desviación estándar de la subvariable planeación por institución

					95% del intervalo de confianza para la media			
	N	Media	Desviación	Desv. Error	Límite inferior	Límite superior	Mínimo	Máximo
1	58	1,9504	,52667	,06915	1,8120	2,0889	1,25	3,25
2	36	2,0382	,45299	,07550	1,8849	2,1915	1,50	3,13
3	34	2,1176	,46562	,07985	1,9552	2,2801	1,50	3,13
4	37	2,0777	,46524	,07649	1,9226	2,2328	1,63	3,13
5	53	2,0660	,42148	,05789	1,9499	2,1822	1,63	3,13
6	40	2,0281	,60081	,09500	1,8360	2,2203	1,25	3,38
Total	258	2,0388	,49124	,03058	1,9785	2,0990	1,25	3,38

Fuente: autor (2022)

En la información anterior se observa un valor de la media entre 1,95 y 2,11 (redondeado a la centésima) en las 6 instituciones educativas, así: I.E.1 Agrícola de Urabá, con media de 1,95; I.E. 2 Chigorodó, con media 2,04; I.E. 3 Gonzalo Mejía, con media 2,12; I.E. 4 Juan Evangelista Berrio, con 2,08; I.E. 5 Los Andes, con 2,07; I.E.6 María Auxiliadora, con 2,03 y la media total, de las 6 instituciones, de 2,0388, que corresponde a un nivel bajo, teniendo en cuenta que la media óptima es, al menos 3, en la escala Likert que puntúa entre 1 y 4. Respecto a la desviación típica, se observan valores entre 0,3 y 0,5, correspondientes a las siguientes instituciones: Agrícola de Urabá, con ,52667; Chigorodó, con ,45299; Gonzalo Mejía, con ,46562; Juan Evangelista Berrio, con ,46524; Los Andes, con ,42148 y María Auxiliadora, con ,60081. Estos resultados sugieren una considerable homogeneidad en las puntuaciones medias, solamente a nivel intrainstitucional. No obstante, considerando las diferencias de puntuaciones medias entre instituciones, parece que sí existen diferencias significativas en las puntuaciones medias por I.E. No obstante, el ANOVA (Análisis de varianza) propiamente dicho, presentado a continuación si permite obtener resultados concluyentes al respecto.

Tabla 51. Análisis de varianza de subvariable planeación

	Suma de cuadrados	Gl	Media cuadrática	F	Sig.
Entre grupos	,764	5	,153	,629	,678
Dentro de grupos	61,254	252	,243		
Total	62,019	257			

Fuente: autor (2022)

En esta tabla se observa que el valor F es de ,629, con un valor de significación de ,678, lo cual se interpreta con base en el criterio de este estadístico para rechazar o aceptar la hipótesis nula: si el nivel de significación es menor a F, se rechaza; si el nivel de significación es mayor a F, se acepta. Dado que los resultados indican que el nivel de significación es mayor a F (,678>,629), entonces, se acepta la hipótesis nula: No existen diferencias significativas en las medias de la subvariable planeación, a nivel interinstitucional.

2.1.2.4. Regulación

2.1.2.4.1. Estadísticos Descriptivos

Los resultados descriptivos en relación con el nivel alcanzado en la subvariable regulación por los estudiantes que participaron en la presente investigación, se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 52. Número de estudiantes según su nivel en la subvariable regulación

Nivel	Rango	No. Estudiantes
Bajo	[11-22]	145
Medio	[23-34]	99
Alto	[35-44]	14

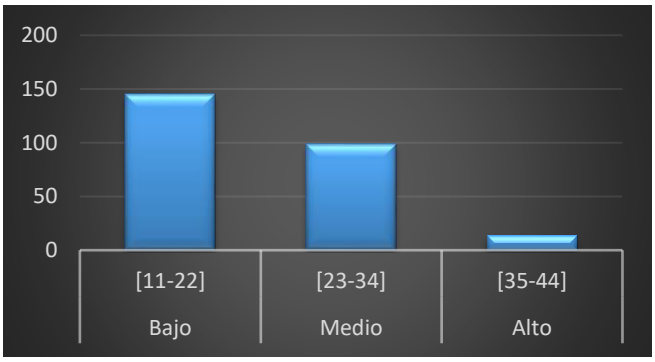
Fuente: autor (2022)

A partir de la información anterior se evidencia que 145 estudiantes están en un nivel bajo, 99 en un nivel medio y solo 14, en un nivel alto. Es decir, el número aproximado de estudiantes en bajo es 1,47 veces los que están en nivel medio y 10 veces los que están en alto, o bien, el número aproximado de estudiantes en nivel medio representan un 68% de los que están en bajo, y el número de estudiantes en nivel alto, un 14% de los que están en nivel medio.

Como complemento a la descripción e interpretación anterior, en el siguiente gráfico expresa de otra forma la información de la tabla, con nuevos aspectos descriptivos.

Gráfico 19. Comparación del número de estudiantes por nivel en los axiomas y propiedades

REPOSITORIO

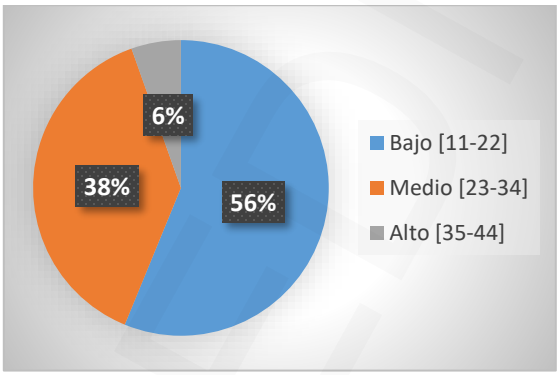


Fuente: autor (2022)

En el gráfico de barras, se observa claramente que existen más estudiantes en nivel bajo que en nivel medio, y, a su vez, más estudiantes en nivel medio que en bajo. En ese sentido, si se asume "nivel de la subvariable regulación" como variable independiente y "número de estudiantes" como variable dependiente, podría afirmarse que poseen una correlación inversa, es decir, a medida que aumenta el nivel evaluado de la subvariable regulación, disminuye el número de estudiantes que se ubican en ese nivel. Incluso, la disminución acelerada del número de estudiantes a medida que aumenta su nivel de la subvariable regulación parece sugerir un decaimiento exponencial.

No obstante, también se representó la información en forma de grafico circular, tal como se muestra a continuación.

Gráfico 20. Porcentaje de estudiantes, según su nivel en la subvariable regulación



Fuente: autor (2022)

El gráfico circular muestra que el 56% de los estudiantes están en el nivel bajo, el 38% en el nivel medio y el 6% en el nivel alto. Es decir, la mayoría poseen un nivel bajo, casi dos quintos está en nivel medio y un dieciseisavo, en alto.

2.1.2.4.2. Estadísticos Inferenciales

En primer lugar, se aplicó el análisis de varianza para comparar las puntuaciones medias en la subvariable regulación a nivel interinstitucional, con el de identificar si existen o no diferencias significativas. Dicho análisis comienza mostrando las puntuaciones medias y la desviación típica en cada una de las 6 instituciones educativas participantes, tal como se aprecia en la siguiente tabla,

Tabla 53. Media y desviación estándar de la subvariable regulación por institución

					95% del intervalo de confianza para la media			
	N	Media	Desviación	Desv. Error	Límite inferior	Límite superior	Mínimo	Máximo
1	58	2,1003	,48813	,06410	1,9720	2,2287	1,55	3,18
2	36	2,1111	,46817	,07803	1,9527	2,2695	1,27	3,45
3	34	2,2754	,51692	,08865	2,0950	2,4558	1,45	3,64
4	37	2,1425	,43994	,07233	1,9958	2,2892	1,55	3,27
5	53	2,1835	,51317	,07049	2,0421	2,3250	1,55	3,27
6	40	2,1091	,49159	,07773	1,9519	2,2663	1,64	3,27
Total	258	2,1494	,48726	,03034	2,0897	2,2091	1,27	3,64

Fuente: autor (2022)

En la información anterior se observa un valor de la media entre 2,10 y 2,28 (redondeado a la centésima) en las 6 instituciones educativas, así: I.E.1 Agrícola de Urabá, con media de 2,10; I.E. 2 Chigorodó, con media 2,11; I.E. 3 Gonzalo Mejía, con media 2,28; I.E. 4 Juan Evangelista Berrio, con 2,14; I.E. 5 Los Andes, con 2,18; I.E.6 María Auxiliadora, con 2,11 y la media total, que corresponde al total de instituciones, de 2,1494, todas en nivel bajo, teniendo en cuenta que la media óptima es, al menos 3, en la escala Likert que puntúa entre 1 y 4. Respecto a la desviación típica, se observan valores entre 0,4 y 0,5, correspondiente a las siguientes instituciones: Agrícola de Urabá, con ,48813; Chigorodó, con ,46817; Gonzalo Mejía, con ,51692; Juan Evangelista Berrio, con ,43994;

Los Andes, con ,51317 y María Auxiliadora, con ,49159. Estos estadígrafos sugieren una considerable homogeneidad en las puntuaciones medias, solamente a nivel intrainstitucional. No obstante, considerando las diferencias de puntuaciones medias entre instituciones, parece que sí existen diferencias significativas en las puntuaciones medias por I.E. No obstante, el ANOVA (Análisis de varianza) propiamente dicho, presentado a continuación si permite obtener resultados concluyentes al respecto.

Tabla 54. Análisis de varianza de la subvariable regulación

	Suma de cuadrados	Gl	Media cuadrática	F	Sig.
Entre grupos	,861	5	,172	,721	,608
Dentro de grupos	60,157	252	,239		
Total	61,018	257			

Fuente: autor (2022)

En esta tabla se observa que el valor F es de ,721, con un valor de significación de ,608, lo cual se interpreta con base en el criterio de este estadístico para rechazar o aceptar la hipótesis nula: si el nivel de significación es menor a F, se rechaza; si el nivel de significación es mayor a F, se acepta. Dado que los resultados indican que el nivel de significación es mayor a F (,608<,721), entonces, se rechaza la hipótesis nula: Sí existen diferencias significativas en las medias de la subvariable regulación, a nivel interinstitucional, es decir, el desempeño en la subvariable regulación, es esencialmente distinto, entre al menos 2 de las instituciones educativas.

2.1.2.5. Evaluación

2.1.2.5.1. Estadísticos Descriptivos

Los resultados descriptivos en relación con el nivel alcanzado en la subvariable evaluación, por los estudiantes que participaron en la presente investigación, se muestran en la siguiente tabla

Tabla 55. Número de estudiantes según su nivel en la subvariable evaluación

REPOSITORIO

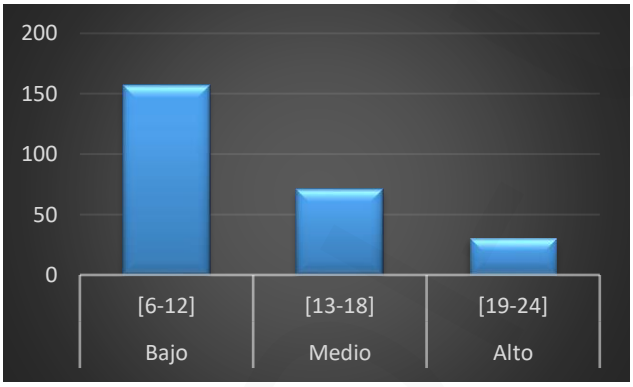
Nivel	Rango	No. Estudiantes
Bajo	[6-12]	157
Medio	[13-18]	71
Alto	[19-24]	30

Fuente: autor (2022)

A partir de la información anterior se evidencia que 157 estudiantes están en un nivel bajo, 71 en un nivel medio y 30, en un nivel alto. Es decir, el número aproximado de estudiantes en bajo es 2,21 veces los que están en nivel medio y 5,2 veces los que están en alto, o bien, el número aproximado de estudiantes en nivel medio representan el 45% de los que están en bajo, y el número de estudiantes en nivel alto, el 42% de los que están en nivel medio.

Como complemento a la descripción e interpretación anterior, en el siguiente gráfico expresa de otra forma la información de la tabla, con nuevos aspectos descriptivos,

Gráfico 21. Comparación del número de estudiantes por nivel en la subvariable evaluación



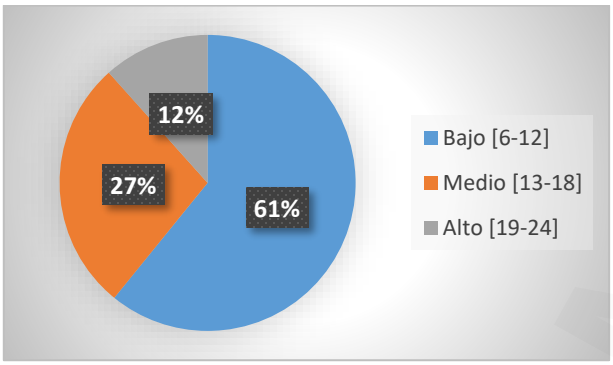
Fuente: autor (2022)

En el gráfico de barras, se observa claramente que existen más estudiantes en nivel bajo que en nivel medio, y, a su vez, más estudiantes en nivel medio que en bajo. En ese sentido, si se asume “nivel de subvariable evaluación” como variable independiente y “número de estudiantes” como variable dependiente, podría afirmarse que poseen una correlación inversa, es decir, a medida que aumenta el nivel evaluado de la subvariable evaluación, disminuye el número de estudiantes que se ubican en dicho nivel. De hecho, la

disminución a una tasa más o menos constante (45% y 42%) del número de estudiantes a medida que aumenta su nivel de saberes previos parece sugerir un decaimiento exponencial.

No obstante, también se representó la información en forma de grafico circular, tal como se muestra a continuación.

Gráfico 22. Porcentaje de estudiantes, según su nivel en la subvariable evaluación



Fuente: autor (2022)

El gráfico circular muestra que el 61% de los estudiantes están en el nivel bajo, el 27% en el nivel medio y el 12% en el nivel alto. Con esto se muestra que casi tres quintos de los estudiantes están en un nivel bajo, casi la cuarta parte en nivel medio y casi la octava parte, en nivel alto.

2.1.2.5.2. Estadísticos Inferenciales

En primer lugar, se aplicó el análisis de varianza para comparar las puntuaciones medias en la subvariable evaluación a nivel interinstitucional, con el de identificar si existen o no diferencias significativas. Dicho análisis comienza mostrando las puntuaciones medias y la desviación típica en cada una de las 6 instituciones educativas participantes, tal como se aprecia en la siguiente tabla.

Tabla 56. Media y desviación estándar de la subvariable evaluación

					95% del intervalo de confianza para la media			
	N	Media	Desviación	Desv.	Límite	Límite	Mínimo	Máximo

				Error	inferior	superior		
1	58	2,2328	,59558	,07820	2,0762	2,3894	1,33	3,50
2	36	1,9537	,59577	,09929	1,7521	2,1553	1,17	3,33
3	34	2,0686	,72372	,12412	1,8161	2,3211	1,00	3,67
4	37	1,8874	,50008	,08221	1,7207	2,0541	1,33	3,33
5	53	1,9780	,58656	,08057	1,8163	2,1397	1,00	3,17
6	40	2,2083	,61758	,09765	2,0108	2,4058	1,50	3,50
Total	258	2,0665	,61170	,38808	1,9915	2,1415	1,00	3,67

Fuente: autor (2022)

En la información anterior se observa un valor de la media entre 1,89 y 2,23 (redondeado a la centésima) en las 6 instituciones educativas, así: I.E.1 Agrícola de Urabá, con media de 2,23; I.E. 2 Chigorodó, con media 1,96; I.E. 3 Gonzalo Mejía, con media 2,07; I.E. 4 Juan Evangelista Berrío, con 1,89; I.E. 5 los Andes, con 1,98; I.E.6 María Auxiliadora, con 2,21, y la media total de las 6 instituciones, de 2,0665, que corresponde a un nivel bajo, teniendo en cuenta que la media óptima es, al menos 3, en la escala Likert que puntúa entre 1 y 4. Respecto a la desviación típica, se observan valores entre 0,3 y 0,7, correspondiente a las siguientes instituciones: Agrícola de Urabá, con ,59558; Chigorodó, con ,59577; Gonzalo Mejía, con ,72372; Juan Evangelista Berrio, con ,50008; Los Andes, con ,58656 y María Auxiliadora, con ,61758. Estos resultados sugieren una considerable homogeneidad en las puntuaciones medias, solamente a nivel intrainstitucional. No obstante, considerando las diferencias de puntuaciones medias entre instituciones, parece que sí existen diferencias significativas en las puntuaciones medias por I.E. No obstante, el ANOVA (Análisis de varianza) propiamente dicho, presentado a continuación si permite obtener resultados concluyentes al respecto.

Tabla 57. Análisis de varianza de la subvariable evaluación

	Suma de cuadrados	Gl	Media cuadrática	F	Sig.
Entre grupos	4,468	5	,894	2,456	,034
Dentro de grupos	91,695	252	,364		
Total	96,163	257			

Fuente: autor (2022)

En esta tabla se observa que el valor F es de 2,456, con un valor de significación de ,034, lo cual se interpreta con base en el criterio de este estadístico para rechazar o aceptar

la hipótesis nula: si el nivel de significación es menor a F, se rechaza; si el nivel de significación es mayor a F, se acepta. Dado que los resultados indican que el nivel de significación es mayor a F (,034>2,456), entonces, se rechaza la hipótesis nula: Si existen diferencias significativas en las medias de la subvariable evaluación, a nivel interinstitucional, es decir, el desempeño en la subvariable evaluación, es esencialmente distinto, entre al menos 2 de las instituciones educativas.

2.1.3. Transformación Semiótica

2.1.3.1. Estadìsticos Descriptivos

Los resultados descriptivos en relación con el nivel alcanzado en la variable transformación semiótica por los estudiantes que participaron en la presente investigación, se muestran en la siguiente tabla,

Tabla 58. Número de estudiantes según su nivel en la variable transformación semiótica

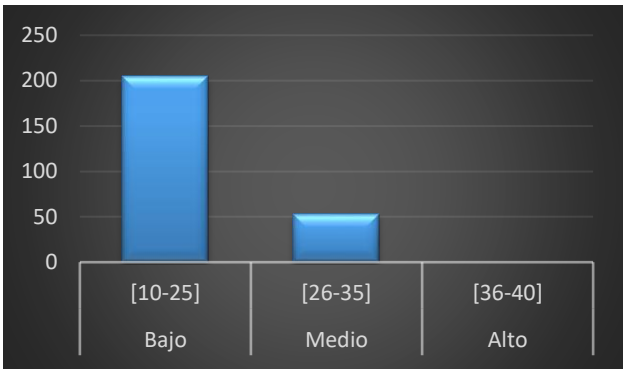
Nivel	Rango	No. estudiantes
Bajo	[10-25]	205
Medio	[26-35]	53
Alto	[36-40]	0

Fuente: autor (2022)

A partir de la información anterior se evidencia que 205 estudiantes están en un nivel bajo, 53 en un nivel medio y ninguno, en un nivel alto. Es decir, el número aproximado de estudiantes en bajo es 4 veces los que están en nivel medio, o bien, el número aproximado de estudiantes en nivel medio representan un 26% de los que están en bajo, y el número de estudiantes en nivel alto, un 0% de los que están en nivel medio.

Como complemento a la descripción e interpretación anterior, en el siguiente gráfico expresa de otra forma la información de la tabla, con nuevos aspectos descriptivos,

Gráfico 23. Comparación del número de estudiantes por nivel de la variable transformación semiótica

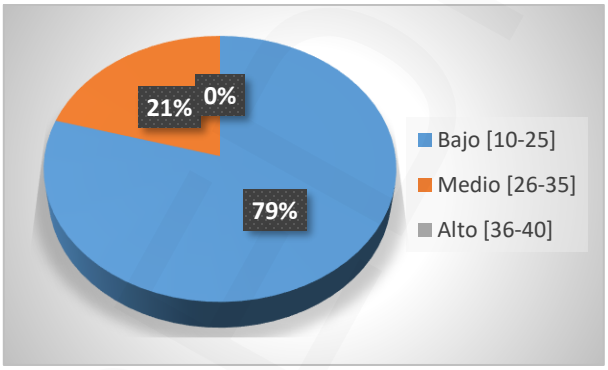


Fuente: autor (2022)

En el gráfico de barras, se observa claramente que existen más estudiantes en nivel bajo que en nivel medio, y, que no existen estudiantes en el nivel alto. En ese sentido, si se asume "nivel de transformación semiótica" como variable independiente y "número de estudiantes" como variable dependiente, podría afirmarse que poseen una correlación inversa, es decir, a medida que aumenta el nivel evaluado de la variable transformación semiótica, menos estudiantes se ubican en dicho nivel. De hecho, la disminución acelerada del número de estudiantes a medida que aumenta su nivel de transformación semiótica parece sugerir un decaimiento exponencial.

No obstante, también se representó la información en forma de grafico circular, tal como se muestra a continuación,

Gráfico 24. Porcentaje de estudiantes, según su nivel en la variable transformación semiótica



Fuente: autor (2022)

El gráfico circular muestra que el 79% de los estudiantes están en el nivel bajo, el 21% en el nivel medio y el 0% en el nivel alto. Con esto se muestra que la mayoría de los estudiantes, de hecho, casi las cuatro quintas cuartas partes están en un nivel bajo, casi la cuarta parte restante, en nivel medio y un ínfimo porcentaje, en nivel alto.

Por último, en la siguiente tabla se muestra una descripción detallada de la media y desviación estándar, por cada ítem del instrumento de la variable transformación semiótica.

Tabla 59. Media y desviación estándar de la variable transformación semiótica por ítem

Síntesis ítems	N	Mínimo	Máximo	Media	Desviación
1.Clausura de expresiones algebraicas	258	1	4	2,69	,912
2.Tratamiento de proto-ecuaciones	258	1	4	2,22	1,007
3.Identificacion de secuencias algebraicas	258	1	4	1,94	,833
4.Representaciones algebraicas equivalentes	258	1	3	1,62	,632
5.Modelacion algebraica de enunciados	258	1	4	1,86	,809
6.Identificacion de variable referente	258	1	3	1,61	,628
7.Modelacion algebraica de patrones	258	1	3	1,67	6,74
8.Modelación y resolución Ax+B=C	258	1	4	2,12	1,035
9.Representacion verbal de modelos Ax+B=Cx+D	258	1	4	2,14	,903
10.Modelación de secuencias gráficas	258	1	4	2,41	1,103

Fuente: autor (2022)

En la información anterior se muestran valores de la media por ítem de la variable transformación semiótica que oscilan entre 1,61 y 2,7. Asimismo, los ítems cuyas medias están entre 1,61 y 2,0 son los siguientes: el ítem 3, con 1,94; ítem 4, con 1,62; ítem 5, con 1,86; ítem 6, con 1,61 e ítem 7, con 1,67. De otro lado, los ítems cuyas medias oscilan entre

2 y 2,7, son los siguientes: el ítem 1, con 2,69; ítem 2, con 2,22; ítem 8, con 2,12; ítem 9, con 2,14; ítem 10, con 2,41.

Teniendo en cuenta lo anterior, el primer grupo de ítems representa un 50% del total, al igual que el otro grupo. Ahora bien, teniendo en cuenta que la media óptima es, al menos 3, en la escala Likert que puntúa entre 1 y 4, puede afirmarse que, en promedio, el 50% de los ítems tuvo un muy alto nivel de dificultad para los estudiantes evaluados y el 50% restante, alta dificultad, juicio que se concluye, dado que la media está considerablemente por debajo del nivel óptimo, a saber, al menos 3, en la escala Likert, que puntúa entre 1 y 4.

Asimismo, dado la desviación típica es una cuantificación del grado de heterogeneidad de las puntuaciones de los estudiantes, donde lo deseable es que esté lo más cercana a 0 y, teniendo en cuenta que los valores de la desviación típica oscilan entre 0,6 y 0,7, para el primer grupo, conformado por los siguientes ítems: ítem 3, con ,833; ítem 4, con ,632; ítem 5, con ,809; ítem 6, con ,628 e ítem 7, con 6,74; y entre 0,8 y 1,0 para el segundo grupo, conformado por los siguientes ítems: ítem 1, con ,912; ítem 2, con 1,007; ítem 8, con 1,035; ítem 9, con ,903 e ítem 10, con 1,103; se puede inferir, desde la individualidad de los ítems que componen el primer grupo, que hubo más homogeneidad que el segundo, lo que revela que en cada uno de esos ítems, los estudiantes tuvieron un desempeño más similar, mientras que en cada uno de los ítems del segundo, la homogeneidad fue menor, es decir, los estudiantes tuvieron puntuaciones más dispersas, lo cual puede indicar que existen ciertas diferencias individuales en cuanto al conocimiento del aspecto de la transformación semiótica evaluado en cada ítem de dicho grupo. No obstante, a pesar de las leves diferencias individuales, la media de la puntuación en por ítem en la variable transformación semiótica, sigue siendo bajo.

2.1.3.2. Estadísticos Inferenciales

En primer lugar, se aplicó el análisis de varianza para comparar las medias de saberes previos a nivel institucional, con el de identificar si existen diferencias significativas. Para ello, la siguiente tabla tiene como objetivo mostrar las puntuaciones medias y la desviación típica en cada una de las 6 instituciones educativas participantes.

Tabla 60. Media y desviación típica de la variable transformación semiótica por institución

					95% del intervalo de confianza para la media			
	N	Media	Desviación	Desv. Error	Límite inferior	Límite superior	Mínimo	Máximo
1	58	1,988	,5722	,0751	1,837	2,138	1,1	3,1
2	36	2,049	,5308	,0729	1,903	2,195	1,3	3,1
3	34	2,091	,6607	,1133	1,861	2,322	1,2	3,4
4	37	2,019	,5686	,0948	1,827	2,212	1,3	3,3
5	53	1,957	,5434	,0893	1,776	2,138	1,3	3,3
6	40	2,085	,6290	,0995	1,884	2,286	1,3	3,4
Total	258	2,029	,5774	,0359	1,958	2,100	1,1	3,4

Fuente: autor (2022)

En la información anterior se observa un valor de la media entre 1,96 y 2,10 (redondeado a la centésima) en las 6 instituciones educativas, así: I.E.1 Agrícola de Urabá, con media de 1,99; I.E. 2 Chigorodó, con media 2,05; I.E. 3 Gonzalo Mejía, con media 2,10; I.E. 4 Juan Evangelista Berrio, con 2,02; I.E. 5 Los Andes, con 1,96; I.E.6 María Auxiliadora, con 2,09, y la media global, de 2,029, que corresponde a un nivel bajo, teniendo en cuenta que la media óptima es, al menos 3, en la escala Likert que puntúa entre 1 y 4. Respecto a la desviación típica, se observan valores entre 0,5 y 0,7, correspondiente a las siguientes instituciones: Agrícola de Urabá, con ,5722; Chigorodó, con ,5308; Gonzalo Mejía, con ,6607; Juan Evangelista Berrio, con ,5686; Los Andes, con ,5434 y María Auxiliadora, con ,6290. Estos datos sugieren una mediana homogeneidad en las puntuaciones medias, solamente a nivel intrainstitucional. No obstante, considerando las diferencias de puntuaciones medias entre instituciones, parece que no existen diferencias significativas en las puntuaciones medias por I.E. No obstante, el ANOVA (Análisis de varianza) propiamente dicho, presentado a continuación si permite obtener resultados concluyentes al respecto.

Tabla 61. Análisis de varianza de la variable transformación semiótica

	Suma de cuadrados	Gl	Media cuadrática	F	Sig.
Entre grupos	,572	5	,114	,339	,889
Dentro de grupos	85,100	252	,338		

Total	85,672	257

Fuente: autor (2022)

En esta tabla se observa que el valor F es de ,339, con un valor de significación de ,889, lo cual se interpreta con base en el criterio de este estadístico para rechazar o aceptar la hipótesis nula: si el nivel de significación es menor a F, se rechaza; si el nivel de significación es mayor a F, se acepta. Dado que los resultados indican que el nivel de significación es mayor a F (,889>,339), entonces, se acepta la hipótesis nula: no existen diferencias significativas en las medias de la variable transformación semiótica, a nivel interinstitucional.

En segundo lugar, para el análisis factorial se aplicó, en primer lugar, la prueba KMO y la prueba de esfericidad de Bartlett, tal como se indica a continuación,

Tabla 62. Medida de KMO y Prueba de Bartlett de la variable transformación semiótica

Medida Kaiser-Meyer-Olkin de adecuación de muestreo	,878
Prueba de esfericidad de Bartlett aprox. Chi-cuadrado	1013,335
Gl	45
Sig.	,000

Fuente: autor (2022)

En la tabla anterior se observa un valor de 0,878 para el KMO, así como la prueba de Bartlett, compuesta por el chi-cuadrado, con valor de 1013,335, gl con valor de 45 y nivel de significación de 0,00. En cuanto a su interpretación, en primer lugar, el valor de KMO se considera notable, ya que es mayor o igual a 0,8, siendo lo ideal que esté lo más cercano a 1. Por su parte, la prueba de esfericidad de Bartlett indica que se puede continuar con la interpretación del modelo factorial, con nivel de significancia o error de 0,000.

Posteriormente, como parte de los resultados arrojados por el SPSS, se presenta en primera instancia la tabla de comunalidades, la cual indica el porcentaje en que cada ítem se ajusta al modelo, es decir, los ítems que afectan en mayor medida los resultados de los estudiantes.

Tabla 63. Comunalidades de los ítems de la variable transformación semiótica

Síntesis ítem	Inicial	Extracción
1.Clausura de expresiones algebraicas	1,000	,647
2.Tratamiento de proto-ecuaciones	1,000	,646
3.Identificacion de secuencias algebraicas	1,000	,551
4.Representaciones algebraicas equivalentes	1,000	,621
5.Modelacion algebraica de enunciados	1,000	,293
6.Identificacion de variable referente	1,000	,356
7.Modelacion algebraica de patrones	1,000	,504
8.Modelación y resolución Ax+B=C	1,000	,761
9.Representacion verbal de modelos Ax+B=Cx+D	1,000	,673
10.Modelación de secuencias gráficas	1,000	,636

Nota: se utilizó el método de extracción: análisis de componentes principales
Fuente: autor (2022)

En la columna de extracción, se muestra, en una escala de 0 a 1, la cantidad de varianza con que cada ítem se ajusta al modelo factorial. Para efectos de mejor ajuste, se describen solamente los ítems con valores iguales o mayores a 0,60. En ese sentido, el ítem 1 se ajusta al modelo con 0,647 puntos de varianza; el ítem 2, con 0,646; el ítem 4, con 0,621; el ítem 8, con 0,761; el ítem 9, con 0,673 y el ítem 10, con 0,636. Considerando la información hasta este punto, podría afirmarse que los ítems mencionados se ajustan mejor que el resto al modelo factorial, lo que probablemente sugiere que contengan los aspectos sustanciales de la variable evaluada transformación semiótica. Precisamente, la inducción de los posibles factores se presenta en la siguiente tabla

Tabla 64. Factores explicativos de la variable transformación semiótica

	Autovalores iniciales			Sumas de cargas al cuadrado de la extracción			Sumas de cargas al cuadrado de la rotación		
Componen	Total	% de	% de	Total	% de	%acumulado	Total	%de	% acumulado

te		varianza	acumulado		varianza			varianza	
1	4,482	44,823	44,823	4,482	44,823	44,823	3,892	38,916	38,916
2	1,205	12,054	56,877	1,205	12,054	56,877	1,796	17,961	56,877
3	,913	9,126	66,003						
4	,793	7,933	73,936						
5	,707	7,072	81,007						
6	,549	5,490	86,497						
7	,443	4,425	90,922						
8	,346	3,457	94,380						
9	,308	3,085	97,465						
10	,254	2,535	100,000						

Nota: se utilizó el método de extracción: análisis de componentes principales
Fuente: autor (2022)

En la tabla anterior, se resalta el porcentaje de varianza de cada uno de los diez ítems, tomados como componentes y dos factores inducidos de ellos (escogidos por poseer, al menos 1 punto en la columna total de auto valor inicial) que explican en mayor medida, la puntuación obtenida en el total de ítems de la variable saberes previos. En ese sentido, el primer factor participa en un 44,823% de la varianza total; el segundo, con un 12,054%. En estos 2 factores, es de notar que el primero triplica cómodamente el otro, es decir, el primero es 4 veces más influyente sobre el desempeño en la variable transformación semiótica, que el otro factor.

Ahora bien, en la siguiente tabla se presenta la correspondencia entre ítems y factores, lo que permite, finalmente, determinar qué ítems pueden agruparse en cada factor representativo de los resultados obtenidos en la variable transformación semiótica.

Tabla 65. Matriz de componente rotado de la variable transformación semiótica

Síntesis ítem	Componente	
	1	2
8.Modelación y resolución Ax+B=C	,858	,159
9.Representacion verbal de modelos Ax+B=Cx+D	,810	,126
1.Clausura de expresiones algebraicas	,784	,180
3.Identificacion de secuencias algebraicas	,738	-,079
10.Modelación de secuencias gráficas	,726	,331
2.Tratamiento de	,677	,432

proto-ecuaciones		
5.Modelacion algebraica de enunciados	,454	,295
4.Representaciones algebraicas equivalentes	-,029	,787
7.Modelacion algebraica de patrones	,361	,611
6.Identificacion de variable referente	,125	,583

Nota: Se utilizó el método de extracción análisis de componentes principales, con método de rotación Varimax con normalización Kaiser.
Fuente: autor (2022)

En la tabla anterior se evidencian las puntuaciones en una escala numérica de razón, de -1 a 1, asignadas a cada ítem en cada uno de los dos factores. Además, en cada factor se describen los ítems de mayor puntuación, es decir, que aportan, de manera más significativa al factor explicativo de los resultados. Así, en el factor 1, son más significativos los siguientes ítems: el ítem 8, con 0,858; el 9, con 0,810; el 1, con 0,784; el 3, con 0,738; el 10, con 0,726 y el 2, con 0,677. En el factor 2, el ítem 4, con 0,787; el 7, con 0,611 y el 6, con 0,583.

Con base en estos resultados, respecto al factor 1, los ítems 8, 9 y 10 hacen parte de la subvariable nivel de algebrización III. Asimismo, los ítems 1, 2 y 3 hacen parte de la subvariable nivel de algebrización I. Adicionalmente, el ítem 5 hace parte de la subvariable nivel de algebrización II. En principio, cabría esperarse que la mayoría de los ítems del factor 1, correspondan a la misma subvariable, lo cual se observa en un 43% para la subvariable nivel de algebrización III, 43% para la subvariable nivel de algebrización I y 14% para la subvariable nivel de algebrización II. No obstante, el hecho de que ese factor incluya en su grupo de ítems a aquellos que pertenecen a las tres subvariables, podría significar que existe una estrecha correlación y/o dependencia en el desempeño de los estudiantes en estas. En tal caso, existen ciertos aspectos de los 3 niveles de algebrización que convergen en el mencionado factor que explica, en un 44,823%, la variabilidad de los resultados de la variable transformación semiótica. De forma inductiva, a partir de los núcleos conceptuales de los ítems, se propone que dicho factor puede ser: modelación con notación algebraica y razonamiento hipotético inductivo-deductivo-creativo, dado que los ítems que componen al factor evalúan procesos algebraicos asociados a dichos tipos de razonamiento.

Respecto al factor 2, los ítems 4, 6 y 7 hace parte de la subvariable nivel de algebrización II. En principio, cabría esperarse que la mayoría de los ítems del factor 2, correspondan a la misma subvariable, hecho que, efectivamente ocurre, otorgándole validez de constructo a dichos ítems en el sentido de que refieren a la misma categoría conceptual evaluada. En ese sentido, se puede decir que el factor correspondiente a la subvariable nivel de algebrización II explica en un 12,054% la variabilidad de los resultados de la variable transformación semiótica. De forma inductiva, a partir de los núcleos conceptuales de los ítems, se propone que dicho factor puede ser: razonamiento interpretativo, argumentativo y modelativo con notación algebraica, dado que los ítems que componen al factor evalúan procesos algebraicos asociados a dichas competencias.

2.1.3.3. Nivel de Algebrización I

2.1.3.3.1. Estadísticos Descriptivos

Los resultados descriptivos en relación con el nivel alcanzado en la subvariable nivel de algebrización I, por los estudiantes que participaron en la presente investigación, se muestran en la siguiente tabla,

Tabla 66. Número de estudiantes en la subvariable nivel de algebrización I

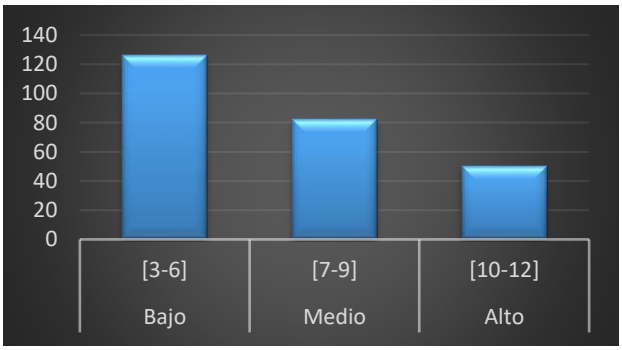
Nivel	Rango	No. Estudiantes
Bajo	[3-6]	126
Medio	[7-9]	82
Alto	[10-12]	50

Fuente: autor (2022)

A partir de la información anterior se evidencia que 126 estudiantes están en el nivel bajo, 82 en el nivel medio y 50, en el nivel alto. Es decir, el número aproximado de estudiantes en bajo es 1,54 veces los que están en nivel medio y 2,5 veces los que están en alto, o bien, el número aproximado de estudiantes en nivel medio representan un 65% de los que están en bajo, y el número de estudiantes en nivel alto, un 61% de los que están en nivel medio.

Como complemento a la descripción e interpretación anterior, en el siguiente gráfico expresa de otra forma la información de la tabla, con nuevos aspectos descriptivos

Gráfico 25. Comparación del número de estudiantes en la subvariable nivel de algebrización I

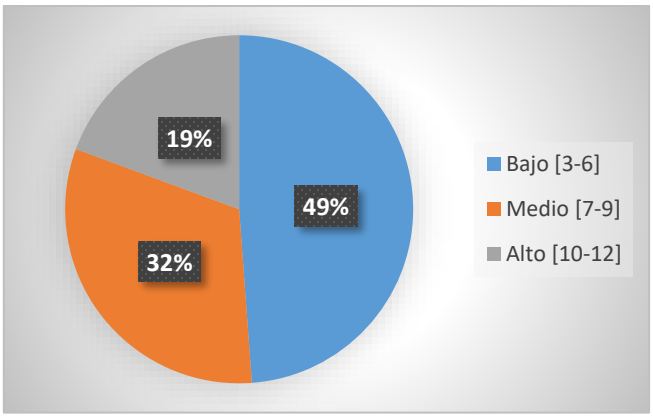


Fuente: autor (2022)

En el gráfico de barras, se observa claramente que existen más estudiantes en nivel bajo que en nivel medio, y, a su vez, más estudiantes en nivel medio que en bajo. En ese sentido, si se asume "nivel de la subvariable nivel de algebrización I" como variable independiente y "número de estudiantes" como variable dependiente, podría afirmarse que poseen una correlación inversa, es decir, a medida que aumenta el nivel evaluado de la subvariable nivel de algebrización I, menos estudiantes se ubican en dicho nivel. De hecho, retomando el estadígrafo tomado de la interpretación de la tabla anterior, la similaridad de la tasa de estudiantes al pasar de un nivel a otro más alto: 65% del nivel bajo al nivel medio y 61% de este al nivel alto, sugiere un decaimiento exponencial constante.

No obstante, también se representó la información en forma de grafico circular, tal como se muestra a continuación,

Gráfico 26. Porcentaje de estudiantes según su nivel de algebrización



Fuente: autor (2022)

El gráfico circular muestra que el 49% de los estudiantes están en el nivel bajo, el 32% en el nivel medio y el 19% en el nivel alto. Con esto se muestra que casi la mitad de los estudiantes está en un nivel bajo; casi la tercera parte restante, en nivel medio y casi la quinta parte, en nivel alto.

2.1.3.3.2. Estadísticos Inferenciales

En primer lugar, se aplicó el análisis de varianza para comparar las puntuaciones medias en la subvariable nivel de algebrización I a nivel interinstitucional, con el de identificar si existen o no diferencias significativas. Dicho análisis comienza mostrando las puntuaciones medias y la desviación típica en cada una de las 6 instituciones educativas participantes, tal como se aprecia en la siguiente tabla

Tabla 67. Media y desviación estándar de la subvariable nivel de algebrización I

					95% del intervalo de confianza para la media			
	N	Media	Desviación	Desv. Error	Límite inferior	Límite superior	Mínimo	Máximo
1	58	2,2241	,72920	,09575	2,0324	2,4159	1,00	3,67
2	36	2,2963	,72496	,12083	2,0510	2,5416	1,33	3,67
3	34	2,2843	,80876	,13870	2,0021	2,5665	1,00	3,67
4	37	2,1712	,83007	,13646	1,944	2,4479	1,00	3,67
5	53	2,3522	,68692	,09436	2,1629	2,5415	1,00	3,67
6	40	2,3667	,75786	,11983	2,1243	2,6090	1,33	3,67
Total	258	2,2829	,74655	,04648	2,1914	2,3745	1,00	3,67

Fuente: autor (2022)

En la información anterior se observa un valor de la media entre 2,17 y 2,37 (redondeado a la centésima) en las 6 instituciones educativas, así: I.E.1 Agrícola de Urabá, con media de 2,22; I.E. 2 Chigorodó, con media 2,30; I.E. 3 Gonzalo Mejía, con media 2,29; I.E. 4 Juan Evangelista Berrio, con 2,17; I.E. Los Andes 5, con 2,35; I.E.6 María Auxiliadora, con 2,37 y la media global, con 2,2829, que corresponde a un nivel bajo, teniendo en cuenta que la media óptima es, al menos 3, en la escala Likert que puntúa entre 1 y 4. Respecto a la desviación típica, se observan valores entre 0,7 y 0,8, correspondiente a las siguientes instituciones: Agrícola de Urabá, con ,72920; Chigorodó, con ,72496; Gonzalo Mejía, con ,80876; Juan Evangelista Berrio, con ,83007; Los Andes, con ,68692 y María Auxiliadora, con ,75786. Estos datos sugieren una mediana homogeneidad en las puntuaciones medias, solamente a nivel intrainstitucional. No obstante, considerando las diferencias de puntuaciones medias entre instituciones, parece que no existen diferencias significativas. No obstante, el ANOVA (Análisis de Varianza) propiamente dicho, presentado a continuación si permite obtener resultados concluyentes al respecto.

Tabla 68. Análisis de varianza de la subvariable nivel de algebrización I

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Entre grupos	1,204	5	,241	,427	,830
Dentro de grupos	142,030	252	,564		
Total	143,234	257			

Fuente: autor (2022)

En esta tabla se observa que el valor F es de ,427, con un valor de significación de ,830, lo cual se interpreta con base en el criterio de este estadístico para rechazar o aceptar la hipótesis nula: si el nivel de significación es menor a F, se rechaza; si el nivel de significación es mayor a F, se acepta. Dado que los resultados indican que el nivel de significación es mayor a F (,830>,427), entonces, se acepta la hipótesis nula: No existen diferencias significativas en las medias de la subvariable nivel de algebrización I, a nivel interinstitucional.

PREPRINT

2.1.3.4. Nivel de Algebrización II

2.1.3.4.1. Estadísticos Descriptivos

Los resultados descriptivos en relación con el nivel alcanzado en la variable nivel de algebrización II por los estudiantes que participaron en la presente investigación, se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 69. Número de estudiantes según en la subvariable nivel de algebrización II

Nivel	Rango	No. Estudiantes
Bajo	[4-8]	137
Medio	[9-11]	65
Alto	[12-16]	56

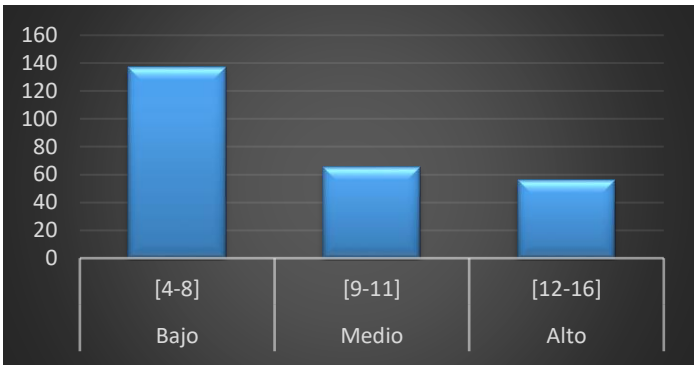
Fuente: autor (2022)

A partir de la información anterior se evidencia que 137 estudiantes están en un nivel bajo, 65 en un nivel medio y 56, en un nivel alto. Es decir, el número aproximado de estudiantes en bajo es 2 veces los que están en nivel medio y 2,5 veces los que están en alto, o bien, el número aproximado de estudiantes en nivel medio representan un 48% de los que están en bajo, y el número de estudiantes en nivel alto, un 86% de los que están en nivel medio.

Como complemento a la descripción e interpretación anterior, en el siguiente gráfico expresa de otra forma la información de la tabla, con nuevos aspectos descriptivos,

Gráfico 27. Comparación del número de estudiantes en el nivel de algebrización II

REPOSITORIO

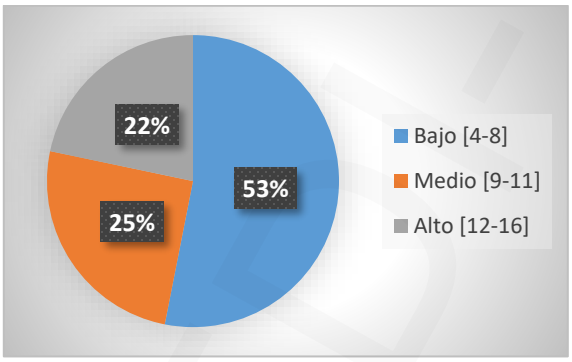


Fuente: autor (2022)

En el gráfico de barras, se observa claramente que existen más estudiantes en nivel bajo que en nivel medio, y, a su vez, más estudiantes en nivel medio que en bajo. En ese sentido, si se asume "nivel de la subvariable nivel de algebrización II" como variable independiente y "número de estudiantes" como variable dependiente, podría afirmarse que poseen una correlación inversa, es decir, a medida que aumenta el nivel evaluado de la subvariable nivel de algebrización II, menos estudiantes se ubican en dicho nivel.

No obstante, también se representó la información en forma de grafico circular, tal como se muestra a continuación.

Gráfico 28. Porcentaje de estudiantes según el nivel de algebrización III



Fuente: autor (2022)

El gráfico circular muestra que el 53% de los estudiantes están en el nivel bajo, el 25% en el nivel medio y el 22% en el nivel alto. Con esto se muestra que la mayoría de los

estudiantes, de hecho, casi la mitad está en un nivel bajo, y casi la cuarta parte, en nivel medio y otra cuarta parte, en nivel alto.

2.1.3.4.2. Estadísticos Inferenciales

En primer lugar, se aplicó el análisis de varianza para comparar las puntuaciones medias en la subvariable nivel de algebrización II a nivel interinstitucional, con el de identificar si existen o no diferencias significativas. Dicho análisis comienza mostrando las puntuaciones medias y la desviación típica en cada una de las 6 instituciones educativas participantes, tal como se aprecia en la siguiente tabla.

Tabla 70. Media y desviación estándar de la subvariable nivel de algebrización II

					95% del intervalo de confianza para la media			
	N	Media	Desviación	Desv. Error	Límite inferior	Límite superior	Mínimo	Máximo
1	58	2,0710	,49374	,06483	1,9412	2,2009	1,25	3,79
2	36	2,0000	,62106	,10351	1,7899	2,2101	1,25	4,25
3	34	2,0985	,53279	,09137	1,9126	2,2844	1,00	3,35
4	37	2,0473	,67144	,11038	1,8234	2,2712	1,25	3,00
5	53	1,9994	,50437	,06928	1,8604	2,1385	1,25	3,67
6	40	2,1563	,64720	,10233	1,9493	2,3632	1,00	3,00
Total	258	2,0598	,56937	,03545	1,9900	2,1296	1,00	4,25

Fuente: autor (2022)

En la información anterior se observa un valor de la media entre 2,00 y 2,15 (redondeado a la centésima) en las 6 instituciones educativas, así: I.E.1 Agrícola de Urabá, con media de 2,07; I.E. 2 Chigorodó, con media 2,00; I.E. 3 Gonzalo Mejía, con media 2,10; I.E. 4 Juan Evangelista Berrio, con 2,05; I.E. 5 Los Andes, con 2,00; I.E.6 María Auxiliadora, con 2,16 y la media global, de 2,0598 que corresponde a un nivel bajo, teniendo en cuenta que la media óptima es, al menos 3, en la escala Likert que puntúa entre 1 y 4. Respecto a la desviación típica, se observan valores entre 0,4 y 0,7, que corresponden a las siguientes instituciones: Agrícola de Urabá, con ,49374; Chigorodó, con ,62106; Gonzalo Mejía, con ,53279; Juan evangelista Berrío, con ,67144; Los Andes, con ,50437 y María Auxiliadora, con ,64720. Estos estadígrafos sugieren una mediana homogeneidad en las puntuaciones medias, solamente a nivel intrainstitucional. No obstante, considerando las

diferencias de puntuaciones medias entre instituciones, parece que no existen diferencias significativas.

No obstante, el ANOVA (Análisis de varianza) propiamente dicho, presentado a continuación si permite obtener resultados concluyentes al respecto.

Tabla 71. Análisis de varianza de la subvariable nivel de algebrización II

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Entre grupos	,758	5	,152	,463	,804
Dentro de grupos	82,557	252	,328		
Total	83,315	257			

Fuente: autor (2022)

En esta tabla se observa que el valor F es de ,463, con un valor de significación de ,804, lo cual se interpreta con base en el criterio de este estadístico para rechazar o aceptar la hipótesis nula: si el nivel de significación es menor a F, se rechaza; si el nivel de significación es mayor a F, se acepta. Dado que los resultados indican que el nivel de significación es mayor a F (,804>,463), entonces, se acepta la hipótesis nula: no existen diferencias significativas en las medias de la subvariable nivel de algebrización II, a nivel interinstitucional.

2.1.3.5. Nivel De Algebrización III

2.1.3.5.1. Estadísticos Descriptivos

Los resultados descriptivos en relación con el nivel alcanzado en la subvariable nivel de algebrización III por los estudiantes que participaron en la presente investigación, se muestran en la siguiente tabla,

Tabla 72. Número de estudiantes según su nivel de algebrización III

Nivel	**Rango**	**No. Estudiantes**
Bajo	[3-7]	169
Medio	[8-10]	49

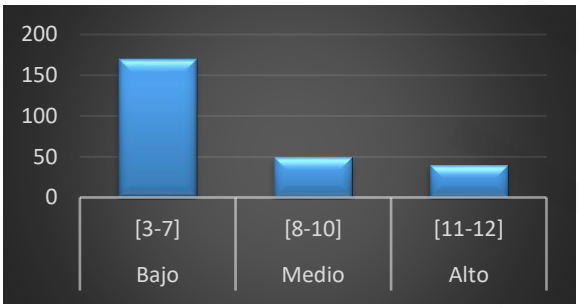
Alto	[11-12]	40

Fuente: autor (2022)

A partir de la información anterior se evidencia que 169 estudiantes están en un nivel bajo, 49 en un nivel medio y 40, en un nivel alto. Es decir, el número aproximado de estudiantes en bajo es 3,45 veces los que están en nivel medio y 4,23 veces los que están en alto, o bien, el número aproximado de estudiantes en nivel medio representan un 29% de los que están en bajo, y el número de estudiantes en nivel alto, un 82% de los que están en nivel medio.

Como complemento a la descripción e interpretación anterior, en el siguiente gráfico expresa de otra forma la información de la tabla, con nuevos aspectos descriptivos

Gráfico 29. Comparación del número de estudiantes por nivel en los axiomas y propiedades



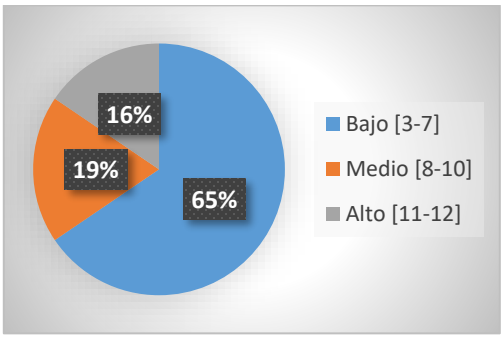
Fuente: autor (2022)

En el gráfico de barras, se observa claramente que existen más estudiantes en nivel bajo que en nivel medio, y, a su vez, más estudiantes en nivel medio que en bajo. En ese sentido, si se asume "nivel de la subvariable nivel de algebrización III" como variable independiente y "número de estudiantes" como variable dependiente, podría afirmarse que poseen una correlación inversa, es decir, a medida que aumenta el nivel evaluado en la subvariable nivel de algebrización III, disminuye el número de estudiantes que se ubican en dicho nivel. De hecho, retomando el estadígrafo tomado de la interpretación de la tabla anterior, la similaridad de la tasa de estudiantes al pasar de un nivel a otro más alto: 29% del nivel bajo al nivel medio y 82% de este al nivel alto, sugiere una tendencia, al igual que

en el gráfico de la subvariable nivel de algebrización III, a tener mayor porcentaje relativo en el nivel alto.

No obstante, también se representó la información en forma de grafico circular, tal como se muestra a continuación,

Gráfico 30. Porcentaje de estudiantes según su nivel en los axiomas y propiedades en R



Fuente: autor (2022)

El gráfico circular muestra que el 65% de los estudiantes están en el nivel bajo, el 19% en el nivel medio y el 16% en el nivel alto. Con esto se muestra que la mayoría de los estudiantes, de hecho, casi las dos terceras partes está en un nivel bajo, casi la quinta parte restante, en nivel medio y, casi la sexta parte, en nivel alto.

2.1.3.5.2. Estadísticos Inferenciales

En primer lugar, se aplicó el análisis de varianza para comparar las puntuaciones medias en la subvariable nivel de algebrización III a nivel interinstitucional, con el de identificar si existen o no diferencias significativas. Dicho análisis comienza mostrando las puntuaciones medias y la desviación típica en cada una de las 6 instituciones educativas participantes, tal como se aprecia en la siguiente tabla,

Tabla 73. Media y desviación estándar de la subvariable nivel de algebrización III

					95% del intervalo de confianza para la media

	N	Media	Desviación	Desv. Error	Límite inferior	Límite superior	Mínimo	Máximo
1	58	1,6207	,39803	,05226	1,5160	1,7253	1,00	2,75
2	36	1,6458	,42416	,07069	1,5023	1,7893	1,00	3,00
3	34	1,8309	,56649	,09715	1,6332	2,0285	1,00	3,00
4	37	1,7162	,46459	,07638	1,5613	1,8711	1,25	3,00
5	53	1,6604	,33287	,04572	1,5686	1,7521	1,00	2,25
6	40	1,7375	,51872	,08202	1,5716	1,9034	1,00	3,00
Total	258	1.6919	,44603	,02777	1,6372	1,7465	1,00	3,00

Fuente: autor (2022)

En la información anterior se observa un valor de la media entre 1,62 y 1,83 (redondeado a la centésima) en las 6 instituciones educativas, así: I.E.1 Agrícola de Urabá, con media de 1,62; I.E. 2 Chigorodó, con media 1,65; I.E. 3 Gonzalo Mejía, con media 1,83; I.E. 4 Juan Evangelista Berrio, con 1,72; I.E. 5 Los Andes, con 1,66; I.E.6 María Auxiliadora, con 1,74 y la media global, de 1,6919 que corresponde a un nivel bastante bajo, de hecho, es el más bajo en comparación con los otros niveles de algebrización y respecto a otras subvariables; teniendo en cuenta que la media óptima es, al menos 3, en la escala Likert que puntúa entre 1 y 4. Respecto a la desviación típica, se observan valores entre 0,3 y 0,6, correspondiente a las siguientes instituciones: Agrícola de Urabá, con ,39803; Chigorodó, con ,42416; Gonzalo Mejía, con ,56649; Juan Evangelista Berrio, con ,46459; Los Andes, con ,33287 y María Auxiliadora, con ,51872. Estos datos sugieren una considerable homogeneidad en las puntuaciones medias, solamente a nivel intrainstitucional. No obstante, considerando las diferencias de puntuaciones medias entre instituciones, parece que no existen diferencias significativas. No obstante, el ANOVA (Análisis de varianza) propiamente dicho, presentado a continuación si permite obtener resultados concluyentes al respecto.

Tabla 74. Análisis de varianza de la subvariable nivel de algebrización III

	Suma de cuadrados	Gl	Media cuadrática	F	Sig.
Entre grupos	1,159	5	,232	,301	,912
Dentro de grupos	193,802	252	,769		
Total	194,961	257			

Fuente: autor (2022)

En esta tabla se observa que el valor F es de ,301, con un valor de significación de ,912, lo cual se interpreta con base en el criterio de este estadístico para rechazar o aceptar la hipótesis nula: si el nivel de significación es menor a F, se rechaza; si el nivel de significación es mayor a F, se acepta. Dado que los resultados indican que el nivel de significación es mayor a F (,912>,301), entonces, se acepta la hipótesis nula: no existen diferencias significativas en las medias de la subvariable nivel de algebrización III, a nivel interinstitucional.

2.1.4. Regresión lineal de las variables saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica

La regresión lineal se aplicó con el fin de construir un modelo predictor de la variable transformación semiótica, tomada a priori como variable dependiente, a partir de dos modelos: el primero, donde se tomó a la variable estrategias metacognitivas como predictor o variable independiente y el segundo, donde se tomó a la variable estrategias metacognitivas y saberes previos, como variables independientes o variables predictoras. En ese sentido, se aplicaron los modelos de regresión lineal simple y múltiple, utilizado el modelo de entrada forzada para ambos.

Para ello, en primer lugar, se realizó la siguiente tabla de correlaciones entre variables.

Tabla 75. Correlaciones entre variables

		Transformación Semiótica	Estrategias Metacognitivas	Saberes Previos
Correlación de Pearson	Transformación Semiótica	1,000	,806	,139
	Estrategias Metacognitivas	,806	1,000	,127
	Saberes Previos	,139	,127	1,000
Sig. (unilateral)	Transformación Semiótica		,000	,013
	Estrategias Metacognitivas	,000		,021
	Saberes Previos	,013	,021	
N	Transformación Semiótica	258	258	258
	Estrategias	258	258	258

Metacognitivas			
Saberes Previos	258	258	258

Fuente: autor (2022)

En la tabla anterior se resalta la correlación de Pearson y el nivel de significación unilateral en cada una de las variables de forma cruzada. En esta se observa que la variable estrategias metacognitivas tienen una correlación de 0,806 con la variable transformación semiótica; a su vez, la transformación semiótica tiene una correlación de 0,139 con los saberes previos. Asimismo, la variable saberes previos tienen una correlación de 0,127 con la variable estrategias metacognitivas. Además, el nivel de significación de la correlación entre las estrategias metacognitivas y la transformación semiótica es de 0,00; el de la correlación entre la variable transformación semiótica y la variable saberes previos es de 0,013. Por último, el nivel de significación de la correlación entre la variable saberes previos y la variable estrategias metacognitivas es de 0,021.

Para la interpretación de correlaciones, teniendo en cuenta que, en la escala de correlaciones de Pearson, una correlación entre 0,7 y 0,89 es una correlación positiva alta, es posible inferir que la correlación entre la variable estrategias metacognitivas y la variable transformación semiótica es alta. Además, en la misma escala de correlaciones, las comprendidas entre 0,01 y 0,19, son correlaciones positivas muy bajas. Por tanto, puede decirse que la correlación entre la variable transformación semiótica y la variable saberes previos; así como la existente entre la variable saberes previos y estrategias metacognitivas, son positivas muy bajas. Ahora bien, en relación con el nivel de significación unilateral, que se refiere a la zona de rechazo de la hipótesis nula (es decir, para valores menores a 0,05) cabe mencionar que todas las correlaciones poseen un nivel de significación menor al valor previamente establecido, lo cual indica que se rechaza la hipótesis nula, es decir, las correlaciones halladas son altamente confiables. De esta forma, continuando con el análisis de regresión lineal, se presenta la siguiente tabla, se presenta el ajuste de los modelos de regresión lineal, tanto simple como múltiple.

Tabla 76. Ajuste de los modelos de regresión

					Estadísticos de cambio				
Modelo	R	R cuadrado	R cuadrado	Error estándar	Cambio de R	Cambio en F	Gl1	Gl2	Sig. Cambio

			ajustado	de la estimación	cuadrado				en F
1	,806	,649	,648	,3425	,649	474,380	1	256	,000
2	,807	,651	,648	,3425	,001	1,035	1	255	,310

Nota: en el modelo 1, el predictor es la variable estrategias metacognitivas; en el modelo 2, los predictores son las variables estrategias metacognitivas y saberes previos.
Fuente: autor (2022)

En la tabla anterior, la columna modelo, que contiene los valores 1 y 2, hace referencia a la regresión lineal simple y múltiple, respectivamente. En la segunda columna, se muestran los valores de los coeficientes de correlación múltiple entre los predictores y la variable criterio, en cada modelo. En el caso del modelo 1, de regresión lineal simple, el valor de la correlación fue de ,806, lo que indica una correlación positiva alta entre las estrategias metacognitivas y la transformación semiótica. Por otro lado, en el modelo 2, de regresión lineal múltiple, el valor de la correlación fue de ,807, lo que indica una correlación positiva alta entre las estrategias metacognitivas y saberes previos, como variables predictoras de la transformación semiótica. En principio, se observa que la inclusión de la variable saberes previos en el modelo parece no aumentar de manera tan significativa la correlación, lo que podría sugerir que quizá, no es tan relevante en el mejoramiento de la puntuación en la variable transformación semiótica de los estudiantes. Continuando el análisis, en la tercera columna el R cuadrado mostró un valor de 0,649 para el primer modelo y 0,651, para el segundo, lo que representa una diferencia de 0,02 que no es significativa y, por ende, indica que la adición de la variable predictora, saberes previos no influye significativamente en la variable transformación semiótica.

Adicionalmente, en la columna “cambio en R cuadrado” y “cambio en F” con los valores de 0,649, 0,01 y 474,380, 1,035, respectivamente, indican que la adición al modelo de regresión lineal simple de la variable saberes previos no afecta significativamente a dicho modelo.

Además, la última columna, de significación de cambio en F, muestra valores de 0,00 y 0,310, respectivamente, para los modelos 1 y 2, lo cual indica que en el modelo 2 se acepta la hipótesis nula, es decir, la adición de la variable saberes previos no mejora significativamente dicho modelo.

No obstante, como complemento a la información anterior, se presenta la siguiente tabla con el Análisis de varianza (ANOVA), con el fin de probar si el modelo 2 es

significativamente mejor para predecir el resultado, que usar la media como mejor estimación.

	Modelo	Suma de cuadrados	Gl	Media cuadrática	F	Sig.
1	Regresión	55,644	1	55,644	474,380	,000
	Residuo	30,028	256	,117		
	Total	85,672	257			
2	Regresión	55,765	2	27,883	237,740	,000
	Residuo	29,907	255	,117		
	Total	85,672	257			

Tabla 77. Análisis de varianza de los modelos de regresión lineal

Nota: En ambos modelos la variable criterio o dependiente es la transformación semiótica.
Fuente: autor (2022)

En la tabla anterior, en la quinta columna, se evidencia que el valor de F es de 474,380 para el modelo 1 y de 237,740 para el modelo 2. Se observa que, en el segundo modelo, el valor de F es menor, lo cual significa que el modelo inicial mejoró la capacidad de predecir el resultado de la variable transformación semiótica, respecto al modelo 2, lo cual se confirma, con los valores de significación, en ambos casos de 0,000.

En la siguiente tabla se muestran los coeficientes de las variables predictoras, con el fin de definir el modelo matemático de regresión.

Tabla 78. Coeficientes de los modelos de regresión lineal

		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados			Estadísticas de colinealidad	
	Modelo	B	Desv. Error	Beta	t	Sig.	Tolerancia	VIF
1	(Constante)	-,073	,099		-,740	,460		
	Estrategias Metacognitivas	1,004	,046	,806	21,780	,000	1,000	1,000
2	(Constante)	-,150	,125		-1,206	,229		
	Estrategias Metacognitivas	,998	,046	,801	21,477	,000	,984	1,016
	Saberes Previos	,040	,039	,038	1,017	,310	,984	1,016

Fuente: autor (2022)

En la tabla anterior se observan los modelos 1 y 2, las variables predictoras en cada uno y un valor inicial, llamado “constante”. A cada uno de estos, corresponde un valor de la subcolumna B, correspondiente a la columna “coeficientes no estandarizados”. Así, en el modelo 1, la constante en la columna B, posee un valor de -0,073; la variable estrategias metacognitivas, un valor de 1,004. Asimismo, en el modelo 2, la constante tiene un valor de -,0150; la variable estrategias metacognitivas, un valor de 0,998 y la variable saberes previos, un valor de 0,40. Estos valores dan cuenta de que tanto afecta cada variable predictora a la transformación semiótica. Por ejemplo, en el segundo modelo, si la variable saberes previos se mantiene constante, entonces, el valor de la transformación semiótica aumentara 0,998 unidades, por cada unidad que aumente la variable estrategias metacognitivas.

En ese sentido, a cada variable predictora, les corresponde su coeficiente, que indica la contribución de cada una en su respectivo modelo. La constante, sería un valor fijo de la ecuación de regresión en ambos casos.

Ahora bien, se observa que los valores de significación, en el modelo 1, son 0,46 y 0,00 para la constante y la variable estrategias metacognitivas, respectivamente, mientras que en el modelo 2, son 0,229; 0,00 y 0,310, respectivamente. De esta manera, se acepta la hipótesis alternativa, solo para la variable estrategias metacognitivas, es decir, que esta variable si contribuye significativamente a la puntuación de la variable transformación semiótica. Para confirmar que los saberes previos no son necesarios en el modelo, la siguiente tabla muestra algunos estadígrafos a considerar en ello.

Tabla 79. Variables excluidas de los modelos de regresión lineal

	Modelo	En beta	t	Sig.	Correlación parcial	Tolerancia	VIF	Tolerancia mínima
1	Sabores Previos	,038	1,017	,310	,064	,984	1,016	,984

Fuente: autor (2022)

En la tabla anterior, el valor t es 1,017 y el nivel de significación es de 0,310. Dado que este último valor debe ser menor a 0,05, se concluye que puede prescindirse de la variable saberes previos en el modelo de regresión. Por último, se hace la prueba de colinealidad, que se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 80. Diagnósticos de colinealidad en los modelos de regresión lineal

					Proporciones de varianza	
Modelo	Dimensión	Autovalor	Índice de condición	Constante	Estrategias Metacognitivas	Saberes previos
1	1	1,976	1,000	,01	,01	
	2	,024	9,162	,99	,99	
2	1	2,936	1,000	,00	,01	,01
	2	,045	8,069	,01	,44	,68
	3	,019	12,317	,99	,56	,31

Fuente: autor (2022)

En la tabla anterior se hace énfasis en las proporciones de varianza de las dos variables predictoras, y su valor en las dimensiones de cada modelo. En el modelo 1, la variable estrategias metacognitivas y la constante tiene un valor de 0,01 en la dimensión 1; asimismo, ambas presentan un valor de 0,99 en la dimensión 2. En el modelo 2, la variable saberes previos, un valor de 0,01; la variable estrategias metacognitivas presenta un valor de 0,01 y la constante, 0,00 en la dimensión 1. Asimismo, la variable saberes previos, un valor de 0,68; las estrategias metacognitivas, 0,44 y la constante, 0,01, en la dimensión 2. Por último, la variable saberes previos, un valor de 0,31; estrategias metacognitivas, 0,56 y la constante, 0,99.

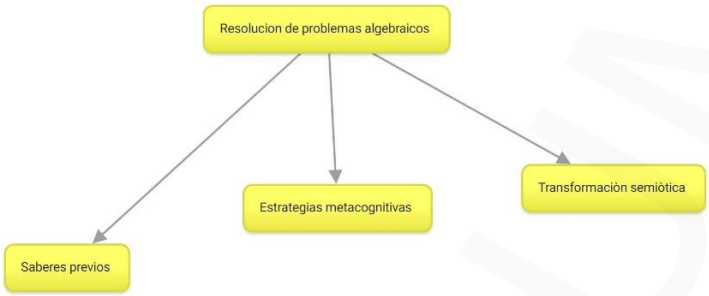
Con base en lo anterior y, teniendo en cuenta que se espera que cada predictor tenga la mayor parte de su carga de variación en una dimensión distinta, para afirmar que no existe multicolinealidad en la variable que, hasta el momento, explica mejor la variable dependiente, es decir, transformación semiótica, se puede concluir que en el modelo 1, no se observa multicolinealidad, dado que la mayor carga de variación la posee en la dimensión 2. Asimismo, en el modelo 2, existe una multicolinealidad moderada, ya que las diferencias de variación entre los valores de las estrategias metacognitivas, para la dimensión 2 y 3, es 0,12, lo que evidencia dicha multicolinealidad. De todas formas, en el modelo 2, si se suprime la variable saberes previos, se elimina la multicolinealidad.

En conclusión, se acepta que el mejor modelo de regresión lineal para predecir el valor de la variable transformación semiótica, es el simple, con la variable estrategias metacognitivas, como la única predictora, a través de la siguiente ecuación: T= 1,004M, donde T= valor de la variable transformación semiótica; M, el valor de la variable estrategias metacognitivas.

2.2. Hallazgos de Datos Cualitativos

Los hallazgos cualitativos se presentan a partir de la codificación selectiva, que se constituye en el producto final del procesamiento de datos cualitativos. No obstante, por razones de espacio en este documento, no se presenta el mapa conceptual concerniente a la mencionada codificación selectiva, sino, las codificaciones axiales correspondientes a cada una de las variables, entendiendo que estas últimas se unen, para formar la primera. En ese sentido, la figura mostrada a continuación presenta los ejes centrales de la codificación selectiva.

Figura 11. Conceptos centrales de la codificación selectiva



Fuente: autor (2022)

Así, se observa que el objeto fundamental de la investigación son los problemas algebraicos, en cuyo contexto social se construyen y se significan a las variables. A partir de estas variables se desprenden las subcategorías predeterminadas en la investigación y las categorías inductivas, obtenidas del análisis cualitativo.

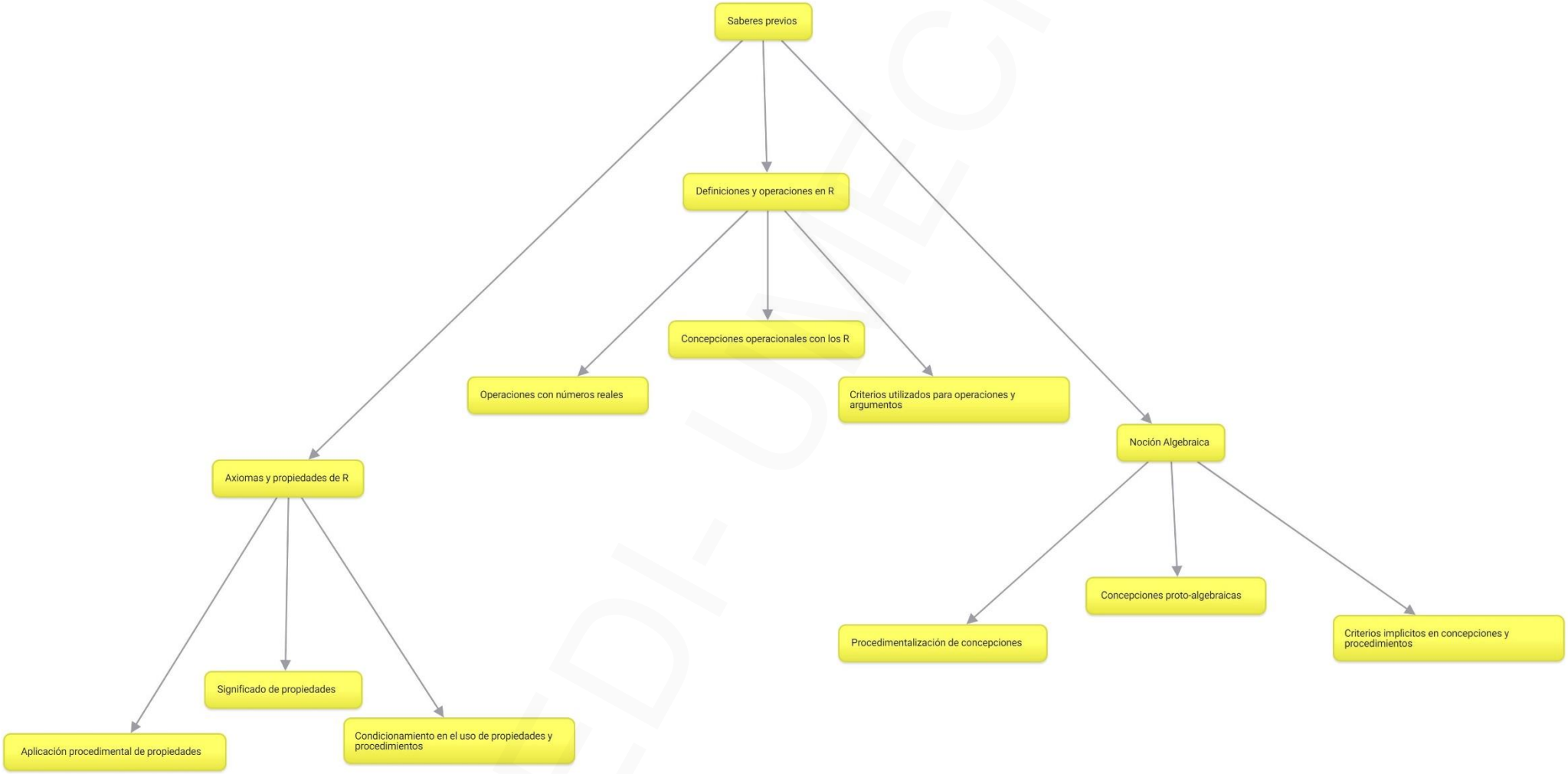
2.2.1. Saberes Previos a Partir de Axiomas

Esta subcategoría incluye los resultados de la investigación en torno a la aplicación procedimental de axiomas y propiedades de los números reales en el contexto algebraico, los significados construidos frente a estas y los aspectos condicionales en su aplicación. No obstante, antes de empezar la descripción análisis e interpretación de los resultados, se

presenta, a nivel general, la taxonomía con la categoría, con las subcategorías y categorías inductivas en cada una de estas, las cuales serán tratadas en esta sección.

RED-UNEG

Figura 12. Codificación axial de la variable saberes previos



Fuente: autor (2022)

2.2.1.1. Aplicación procedimental de propiedades

En relación con los axiomas y propiedades de los números reales, se evidencia que la mayoría de los estudiantes no ven necesario utilizarlos para resolver problemas, mucho menos para demostrar o justificar sus procedimientos. Esto se evidencia en la respuesta que dio un estudiante en la pregunta relacionada, quien indico que frente a la propiedad que demuestra que la expresión **(**9)(3)(5) = (5)(3)(9) es una igualdad, en vez de referirse a la propiedad conmutativa, manifestó: *Se deben realizar las multiplicaciones en ambos lados del igual G1/S5.*

Otro ejemplo similar al anterior se observa en la justificación de la veracidad de la igualdad *6(5+8+7)= 6(5)+6(8)+6(7),* con base en las operaciones, en vez de referirse a la propiedad distributiva : *6x5= 30, 6x8=48, 6x7= 42. Entonces, 30+48+42= 6X20= 120 G1/S3***.** En ese proceder operativo, puede evidenciarse que los estudiantes tienen organizado el conocimiento en su memoria desde situaciones experienciales, es decir, ejercicios y problemas resueltos, incluso, llegan a relacionarlos con conceptos, pero no saben cómo justificar con ellos, ya que se tiene un imaginario de que las matemáticas se trata de operaciones, menos de razonar y utilizar conceptos y, coherentemente, operar. Por ejemplo, para demostrar la igualdad (9) (3) (5) = (5)(3)(9), con base en cierta propiedad, el estudiante identifica que se trata de la propiedad conmutativa, no obstante, en vez de citarla, realiza un procedimiento aritmético para evidenciarla, lo que indica, que, si bien conoce la propiedad conmutativa y sabe en qué situaciones se aplica, no sabe cómo justificarla con el concepto mismo.

Lo anterior muestra que los estudiantes reducen las operaciones, sin tener en cuenta la propiedad implícita en estas, utilizando opiniones y argumentos intuitivos, procedimientos aritméticos, relegando a un lado las herramientas formales de que disponen, quizá, por considerarlas ajenas al mundo real (Schoenfeld, citado en Barrantes, 2006). De esa manera, la omisión de una propiedad o axioma en la resolución, a pesar de conocerlo, sugiere que los estudiantes poseen un sistema de creencias en el que la resolución de un problema y dichos conceptos axiomáticos no se relacionan (Esquivel, Araya & Sánchez, 2008).

Además, esta cultura operatoria de los estudiantes revela falencias en el uso de las funciones semióticas de tipo argumentativo, dado que, frente a esta expresión de tipo proposicional: *6(5+8+7)= 6(5)+6(8)+6(7)*, que se constituye en el antecedente; no se genera un argumento de justificación, sino un procedimiento: *6x5= 30, 6x8=48, 6x7= 42. Entonces, 30+48+42= 6X20= 120 G1/S3;* o la respuesta de *G4/S1: Multiplicar el 6 con el 5, luego con el 8 y con el 7* (Godino, 2012). Así, los estudiantes responden a una pregunta que indaga por una función semiótica de tipo argumentativo, por una de tipo actuativo, las cuales indican una acción, operación, procedimiento o algoritmo, como objeto de salida (Godino et al., 2015). En ese sentido, se observa de fondo un sistema de creencias que privilegia la operatividad, más allá de las razones que justifican determinadas operaciones o procedimientos.

Por último, en los procedimientos de los estudiantes se observa falencias en las nociones de significado institucional y personal de los objetos algebraicos, en relación con la sintaxis algebraica. Por ejemplo, el hecho de que frente a la siguiente operación: 5X+8X-X= que puede resolverse con base en la propiedad distributiva, el estudiante G6/S6 responda X12, evidencia que, si bien conocen procedimentalmente la forma de reducir la expresión algebraica, desconocen la sintaxis propia de una expresión algebraica (Pérez, 2000; Aylwin 2011; Zill, Wright & Escutia; 2015).

2.2.1.2. Significado de propiedades

Respecto a las propiedades y axiomas de los números reales, se evidencia la falta de categorización y referencia nominal de la propiedad, es decir, la formación de cuasi conceptos, dado que todavía pertenecen a un contexto específico (D`Amore, 2012). Lo anterior se evidencia en una aproximación a la propiedad de la unicidad en el caso de la igualdad, sin hacer referencia a una categorización específica, que hace el estudiante *G3/S2*, cuando manifiesta que se deben *hacer las multiplicaciones de cada lado y me debe dar el mismo número, para que si haya igualdad.*

No obstante, la referencia conceptual que se infiere de lo manifestado por el estudiante evidencia que se encuentra aún en el estadio de identidad, en la trazabilidad conceptual propuesta por Lausmeier, Gathala y Frayer (citados en D´Amore, 2012) y

Vergnaud (2016) que comprende los siguientes estadios: concreto, identidad, clasificación y formal. En concreto, el estadio de identidad se refiere a la percepción del objeto con sus elementos constitutivos, de tal forma que permite hacer una descripción del concepto mismo, aplicable únicamente para ese caso. En ese sentido, el objeto se refiere al teorema de la unicidad y el estudiante *G3/S2*, realizó una descripción de la misma, basada en ese caso, que se trata de un producto.

Continuando lo anterior, en el conocimiento de axiomas y propiedades de números reales, como concepto formal, es posible encontrar estudiantes en el estadio "concreto" (Vergnaud, 2016). Por ejemplo, ante una identidad que expresa la propiedad distributiva, el estudiante *G1/S3* menciono que *Primero se multiplica el número de afuera del paréntesis por los que están dentro.* El estudiante ni siquiera es consciente que dicha operación en el primer miembro debe darle el mismo resultado que en el segundo miembro, lo cual sería una aproximación conceptual a lo que implica demostrar una identidad. Mas bien, refiere a una función semiótica de tipo actuativo, en el estadio concreto que consiste en operar el objeto sin ningún tipo de análisis conceptual o argumentativo (Duval, 2012; Vergnaud, 2016).

No obstante, también se encontró casos de estudiantes que se refieren a la conceptualización de las propiedades de los números reales, específicamente, la propiedad conmutativa. En relación a la clasificación de objetos matemáticos realizada por Godino et al. (2015), sobre los no ostensivos, el estudiante *G3/S6* refiere a estos, cuando se le indaga por una identidad particular: *una de ellas debe ser la conmutativa porque en el punto 2 se puede cambiar de orden los números, y la conmutativa dice que el orden de los factores no altera el producto*. En esta apreciación, el estudiante evoca, a partir de la representación ostensiva de la propiedad conmutativa, su concepto, definición y axioma, a través de sus marcas ostensivas (Godino, 2012).

No obstante, así como algunos estudiantes evidencian en su respuesta un concepto formado completamente, al estilo de Lausmeier, Gathala y Frayer (citados en D´Amore, 2012) y Vergnaud (2016), hay otros que desconocen los axiomas y propiedades de los números reales, su operacionalización, incluso su nominalización. Por mencionar un caso, el sujeto *G6/S1* ante una igualdad en la que uno de sus miembros posee un valor indeterminado, expreso: p*ara despejar, no sé qué propiedad es*, lo cual no es muy diferente

de lo que dijo *G1/S2: Ya se me olvidaron G1/S2*. Ejemplos como estos muestran que es posible encontrar estudiantes sin referencia a los conceptos en el estadio formal, incluso, desde el aspecto operacional, propio de otras situaciones. En ese sentido, y con base en los resultados hasta este punto, puede decirse que los estudiantes tienden a resolver problemas con cuasi conceptos, en vez de conceptos propiamente dichos (Schoenfeld, citado en Barrantes, 2006; García, Segovia & Lupiáñez, 2012; Vergnaud, 2016).

Continuando con los aspectos conceptuales de los axiomas y propiedades de los números reales, se evidenció en las respuestas la restricción de un solo caso particular que representa las propiedades. Es decir, tal como menciona Schoenfeld (citado en Barrantes, 2006) conciben el sentido de el sentido de única respuesta correcta, guiándose, quizá, por el ejemplo que dio el docente; o la concepción memorística y mecánica de las matemáticas; la individualidad e inmediatez de los procedimientos (Schoenfeld, citado en Barrantes, 2006). Por ejemplo, cuando se le pidió demostrar una igualdad al sujeto *G6/S4*, fue más allá de la pregunta, dijo: *esas igualdades no son ciertas, ya que los números de la derecha no coinciden con los de la izquierda.*

La respuesta anterior evidencia una visión ingenua sobre el concepto de igualdad y su condición de objeto matemático. Por ejemplo, no comprende que los objetos matemáticos tienen distintas representaciones, y que las representaciones semióticas de tratamiento sobre el mismo objeto son equivalentes. Al respecto, Duval (2012) menciona que es común que se confunda un objeto con su representación, en este caso, el estudiante *G6/S4* confunde el objeto "igualdad" con una representación en la que ambos miembros poseen los mismos códigos numéricos. Aunque esa es una representación de igualdad, no es la única, de hecho, las transformaciones de tratamiento (que son posibles gracias a la propiedad cancelativa, de sustitución) permiten visualizar que existen infinitas representaciones semióticas para describir un objeto, todas complementarias entre sí (Duval, 2012; Godino et al., 2015).

Por otro lado, se encuentra que dichas propiedades se aplican en casos que los estudiantes creen que refiere a ellas, concepción reforzada por casos que parecen corroborarlo. Por ejemplo, el sujeto *G3/S1* mencionó que *la ley de los signos se utiliza para restar o sumar enteros como -12+8= -4, ya que más por menos es menos.* En el ejemplo anterior es de notar que, si bien es incorrecta la justificación, la operación es correcta.

Casos como este son muy comunes en los estudiantes que interiorizan una concepción errónea, por ciertos casos en los que se cumple la misma. En este caso particular, se refuerza un mal argumento, por un resultado correcto, sin embargo, lo anterior se convierte en una oportunidad pedagógica para para identificar, de la forma más exhaustiva posible, qué concepciones tienen sobre una propiedad, y que debería cumplirse para cualquier caso, por ejemplo, -8+12. Entonces, es necesario comprender que los estudiantes poseen conceptos cimentados en argumentos, con base en casos particulares, es decir, una estructura cognoscitiva, a la cual se debe acceder, para transformarla desde sus bases epistémicas (Esquivel, Araya & Sánchez, 2008*).*

Asimismo, sobre la concepción que se tiene de ciertas propiedades, en este caso, la distributiva, se observa que es posible encontrar incorrecciones, es decir, el concepto fue aprendido de forma errónea (Schoenfeld, citado en Barrantes, 2006). Por ejemplo, el sujeto *G2/S2* considera correcta el siguiente caso, mostrado como igualdad: 6(5+8+7) = 6(5) +8+7, en el que se aplica la distribución solo para el primer término. Aunque puede decirse que la asunción del ejemplo anterior como igualdad es un error procedimental, en ese caso, dado que el estudiante debe solamente razonar con base en el mismo, se entiende que es el concepto de la propiedad distributiva que entra en juego, desde su dimensión operacional (Castro, 2012; Godino et al., 2015).

Lo anterior es de especial importancia, dado que se encontró referencia de los estudiantes sobre la formación escolar carente de sentido contextual, sino, como un concepto en su estadio formal, aislado de las experiencias y argumentos sobre esas experiencias que lo originaron (D`Amore, 2012). Esto se refuerza con respuestas de estudiantes, tales como el *G3/S5*, quien expresó: *en clase vimos las propiedades, pero no así en ecuaciones.* Esa carencia contextual se evidencia en la nominalización de propiedades sin significado que, tanto el sujeto G1/S1 y G1/S5 expresaron: En el caso del primero, dice comprender *las propiedades de la multiplicación, pero me acuerdo de la conmutativa*; el segundo, frente a casos mostrados de igualdad dijo que *pueden ser la propiedad asociativa o algo así.*

2.2.1.3. Condicionamiento en el uso de propiedades y procedimientos

Respecto a la aplicación y conceptualización de propiedades de los números reales, se observan aspectos que los condicionan. Por ejemplo, en el caso de la aplicación de propiedades para transformar una determinada igualdad, se refieren a la transposición de términos, de forma implícita: *Si un número se pasa al lado izquierdo o derecho se debe cambiar de signo G2/S1*. Se evidencia, entonces, el condicionamiento del signo, en caso de trasladar un término de un miembro al otro. Esto es coherente con uno de los aspectos en que se manifiesta todo objeto cognoscitivo, a saber, el procedimental (Vergnaud, 2016).

Ahora bien, en esta forma operativa, no es evidente si le es significativo al estudiante, o simplemente está reproduciendo una propiedad aprendida en el contexto educativo (Assuero, 2020). En ese sentido, cuando se le indaga sobre las razones del cambio de signo, no responden, lo que permite inferir que están utilizando el pensamiento reproductivo, es decir, aprendiendo los conceptos desde su dimensión formal, lo que dificulta su transferencia a otras situaciones y el uso creativo de dichas propiedades.

Además, el ejemplo colocado anteriormente sobre el sujeto G6/S4, quien indico sobre un caso de igualdad que se le mostro, que *esas igualdades no son ciertas, ya que los números de la derecha no coinciden con los de la izquierda,* deja ver que existen condicionales que determinan si aplicar o no un procedimiento, escoger uno, por encima de otro. En el caso planteado, el condicional implícito es: solo si los términos de los miembros poseen el mismo código numérico se trata de una igualdad, lo cual, como se dijo anteriormente, indica que el estudiante confunde el objeto con su representación semiótica y, en consecuencia, el concepto que tiene sobre el objeto, no es transcontextual, pues todavía está determinado por una situación (D`Amore, 2012).

En esa línea, es posible encontrar un sentido de igualdad, tal como se describe en la institucionalidad y que retoma Godino y Font (2003) quienes mencionan, respecto al concepto del signo igual, que implica comprender el sentido de equivalencia de las dos expresiones mediadas por dicho signo, más que, como un indicador de operacionalizar unilateralmente, la expresión que le precede a dicho signo. Así, el sujeto *G3/S2* menciona que debe existir una igualdad entre miembros operarlos: *Hacer las multiplicaciones de cada lado y me debe dar el mismo número, para que si haya igualdad*. De manera similar, *G6/S3* argumentó: *debe encontrarse los dos resultados, lo de la izquierda del igual y lo de*

la derecha, para ver si son iguales. En conclusión, ambos casos evidencian propiedades de la igualdad en su sentido condicional para determinar igualdades.

2.2.2. Saberes Previos a Partir de Definiciones y Operaciones en R

2.2.2.1. Operaciones con números reales

Los resultados obtenidos en esta categoría inductiva muestran que una operación particular con los números reales es desarrollada, con frecuencia, teniendo en cuenta la operación consecutivamente inferior en el nivel jerárquico. Esto se evidencia con la respuesta del sujeto *G1/S1: Para obtener el cociente 30/6 se debe contar el número de veces que se suma el 6 para que dé 30: 6+6+6+6+6, 5 veces;* y con la respuesta del sujeto *G4/S5: La multiplicación de 6x5, 5 es el número de la tabla, habría que sumar el 6, 5 veces.*

Los casos anteriores permiten inducir que los estudiantes pueden realizar la división como una suma del divisor cierto número de veces a sí mismo, hasta obtener el dividendo. Lo anterior indica pone en evidencia que los estudiantes dominan operaciones básicas como la suma y la división y las pueden relacionar, lo cual es fundamental, para las transformaciones de tratamiento semiótico, fundamentales en la modelación operacional de problemas aritméticos (Esquivel, Araya & Sánchez, 2008; Duval, 2012).

Ahora bien, esta misma operación, la división, también la operacionalizan, a partir de su contraria, la multiplicación. Precisamente, el sujeto *G1/S4* resuelve las divisiones desde la perspectiva de una multiplicación inversa: *Debe buscarse un número en la tabla del divisor que del dividendo 6x5=30.* No obstante, otros estudiantes son más tradicionalistas en el proceso y se resuelven las operaciones siguiendo los pasos aprendidos. Por ejemplo, los sujetos *G2/S3, G2/S4, G2/S5* respondieron que, *para dividir se separa igual cifras en el dividendo que las que hay en el divisor, y se busca la tabla de multiplicar 30/6 = 5.* Lo anterior evidencia que los estudiantes, en su mayoría dominan las operaciones aritméticas básicas y son capaces de realizar algunas transformaciones de tratamiento.

En ese sentido, pueden resolver una división como una simplificación hasta obtener el denominador 1. En ese sentido, se refuerza la idea planteada en el párrafo anterior sobre la forma en que los estudiantes operan con números reales: lo hacen en términos de otras

operaciones y una misma operación pueden realizarla de diferentes maneras. De hecho, el sujeto *G1/S6* puede resolver una división como una resta sucesiva del divisor al dividendo, tantas veces como sea posible: *Para dividir se debe restar del dividendo del divisor hasta anularlo 30-6-6-6-6-6=0.*

No obstante, aun desde una concepción operativa, es posible encontrar estudiantes que desconocen algunos aspectos procedimentales, poseen incorrecciones en la realización de operaciones con los reales (Schoenfeld, citado en Barrantes, 2006, p. 11). Por ejemplo, proceden de forma incorrecta a realizar la división como una resta del divisor al dividendo, de la siguiente manera: *30/6 equivale a 30-6= 24, con suma, seria 30+6= 36 G1/S3.* Aquí se observa las dificultades desde el aspecto operacional, ya que, si bien realiza correctamente las sumas y restas, estas no corresponden lógicamente con la división, dado que arroja dos resultados distintos para la misma operación, que, en ningún momento parece incomodarle al estudiante. De hecho, parece ser que el estudiante cree que las operaciones con números reales son arbitrarias, toda vez que *G1/S3*, por ejemplo, continúa operacionalizando la división como una suma arbitraria, suyo resultado es distinto en cada caso. Por ejemplo, sobre la división 30/6, la operacionaliza la suma de la siguiente manera: *15+15, 10+20, 8+10+12, para la resta igual.*

2.2.2.2. Concepciones operacionales con los números reales

En relación con los significados que los estudiantes les otorgan a las operaciones con los números reales, para algunos, simplemente implica repetir un procedimiento algorítmico, es decir, no comprenden el sentido lógico de los algoritmos, sino en su ejecución misma (Schoenfeld, citado en Barrantes, 2006). Lo anterior se evidencia en la respuesta de los sujetos *G2/S3* y *G2/S4*, cuando indican que *dividir es buscar un número que, multiplicado por uno, dé otro o se aproxime, hasta que el residuo sea menor que el cociente.* La anterior es una concepción totalmente algorítmica de la división que no da cuenta de su carácter inverso a la multiplicación, aunque la menciona, ni su relación con la suma o la resta, como operaciones de menor jerarquía, con las que puede definirse.

Adicionalmente, también se observó que se confunde el concepto de división con el de resta y suma, a la vez, dado que proceden realizan esta última operación, cuando se les

indaga por la primera. Por ejemplo, el sujeto *G1/S3* planteó la división *30/6* de la siguiente manera: *30-6= 24.* Adicionalmente, manifestó que también puede hacerse así: *30+6= 36.* Además, *G1/S3*, opera la misma división: *15+15, 10+20, 8+10+12*, e indica que *para la resta igual.* Analizando las respuestas de los estudiantes, no solamente confunden la división con los conceptos de suma y resta, sino que conciben los resultados de las operaciones como arbitrarios. Además, el estudiante *G1/S3* no parece concebir la división como el conjunto de números que sumados o restados son equivalentes al dividendo, concepto que dista del institucional: si se escoge "a" como divisor, la operación a x b / a, significa que debe encontrarse el número de veces que está contenido el número "a", en el número a x b, que para este caso, el cociente seria b veces exactas. No obstante, es posible que el divisor no esté contenido un número exacto de veces en el dividendo, caso en el que, se obtiene el cociente, dejando un resto (García, Rodríguez & Navarro, 2015).

No obstante, también se evidencian concepciones de las operaciones en términos de otra, de menor jerarquía. Por ejemplo, cuando expresan la división en términos de una resta o suma, al igual que la multiplicación. Por ejemplo, *G1/S6* concibe la división como una serie de restas sucesivas del divisor al dividendo, hasta obtener 0 o el valor más cercano, cuando menciono que *Para dividir se debe restar del dividendo del divisor hasta anularlo 30-6-6-6-6-6=0.* Por su parte, el sujeto *G4/S1* comprende que la división es la operación contraria a la multiplicación, cuando expresa: *dividir implica saber multiplicar, ya que son operaciones contrarias. A*sí mismo, frente a la división 30/6, el sujeto *G1/ S4* indicó que *debe buscarse un número en la tabla del divisor que del dividendo, es decir 6x5=30.*

Adicionalmente, otra concepción sobre las operaciones, particularmente, de la multiplicación, es que puede expandirse como una suma, por ejemplo, *G1/S1* mencionó que *para obtener el cociente 30/6 se debe contar el número de veces que se suma el 6 para que dé 30: 6+6+6+6+6, 5 veces.* No obstante, con la misma división propuesta, otro estudiante mencionó lo siguiente: *Se debe sumar el cociente las veces que indica el divisor: Con sumas, seria 5+5+5+5+5+5 G2/S1*. La concepción de este último estudiante presenta problemas lógicos en su comunicación, dado que, si bien, es probable que el estudiante sepa cómo dividir, su argumento es inconsistente, en tanto, si lo que se indaga es el cociente, en su argumento lo asume a priori. En términos lógicos, es equivalente a definir un concepto, utilizando el mismo concepto (García, Segovia & Lupiáñez, 2012).

En las concepciones de los estudiantes sobre las operaciones también se evidencia que estas se originan de situaciones auténticas, las cuales se encuentran asociadas al concepto mismo. Por ejemplo, el estudiante *G4/S6* concibe la división de 30/6 de la siguiente manera: *le digo que por ejemplo piense que va a repartir 30 bombones a sus 6 amigos, entonces debe sacar 6 de 30 hasta que no quede Con restas, seria 30-6, también 5 veces. Cuando se resta se está dividiendo, entonces, igual que en la suma, hay que sacar el 6 del 30, hasta que no se pueda.* Sobre la respuesta de dicho estudiante, aunque es claro que comprende la división en términos de operaciones de menor nivel jerárquico, en este caso, la suma y la resta, es digno de resaltar que las bases que fundamentan su concepto son las mismas que menciona D´Amore (2012) respecto a la trazabilidad del concepto, cuando plantea que, en la experiencia de un niño de un año, la palabra "bola", por ejemplo, está asociada al lugar o lugares donde la observó, a las actividades que él u otros sujetos hicieron con dicha "bola" y otras características funcionales obtenidas a partir de la experiencia con ella. De esta manera, la palabra bola "se encuentra integrada a una serie de relaciones de esta con otros elementos de un contexto determinado, lo cual afecta consecuentemente el concepto de bola que tiene el niño" (p.31).

Por otro lado, la respuesta de *G4/S6* evidencia que utiliza funciones semióticas de significado situacional, para representar un concepto, en este caso, la división (Godino, 2010). Además, se encontró estudiantes que manifestaron no recibir formación escolar relacionada con significados o sentido de las operaciones, más que el proceso ejecutivo mismo. Esto está relacionado, en parte, con la concepción de las reglas del docente como absolutas, de forma que solamente estas son válidas. En ese sentido, si las operaciones no son asociadas a procesos de razonamiento, sino, a simple aplicación de algoritmos o reglas mecánicas, o, solamente, mediante cierto número de representaciones semióticas, los estudiantes ni siquiera comprenderán sus procesos operatorios (Schoenfeld, citado en Barrantes, 2006). Por ejemplo, *G1/S2* menciona, sobre la posibilidad de expresar una división en términos de restas: *Con las restas no sé muy bien, no me enseñaron así.* No obstante, si es capaz de desarrollar el algoritmo. Asimismo, *G2/S5* menciono: No lo vimos así en el colegio, sino, dividiendo o multiplicando y ya; y *G6/S6* expresó: *No sé cómo explicar.*

Por último, algunos estudiantes expresan nociones vagas al conceptualizar algunas operaciones básicas. Por ejemplo, *G2/S1* mencionó que *dividir es sumar el cociente hasta obtener el divisor*. No obstante, el proceso que describe el estudiante es incompleto, por cuanto describe un proceso, pero no el producto de este. En ese sentido, se evidencia que es posible encontrar que algunas concepciones sobre operaciones aritméticas son incompletas, lo cual puede explicar, en parte, las incorrecciones en el proceso de resolución de problemas algebraicos (Schoenfeld, citado en Barrantes, 2006).

2.2.2.3. Criterios utilizados para operaciones y argumentos

En las respuestas dadas por los estudiantes se destacan algunos criterios del tipo "si sucede esto, entonces, se realiza esto", de tipo operatorio, que llama Vergnaud (1990) decisión respecto a una operación concreta, es decir, su aspecto condicional. Por ejemplo, *G2/S5* mencionó, refiriéndose a la jerarquía de operadores cuando va a resolver operaciones aritméticas: *tengo en cuenta que la multiplicación va primero que la suma y la resta, y es igual a la división* (Godino, 2017). Esta respuesta, además de indicar una condición, es un tipo de función conceptual, cuyo objeto de entrada es un concepto, y el de salida, es una propiedad de este. Por ejemplo, dado el concepto de ecuación, como objeto de entrada, y la propiedad de simplificación de las ecuaciones, como objeto de salida, puede decirse que se ha aplicado una función de tipo proposicional (Godino, 2017).

2.2.3. Saberes Previos a Partir de la Noción Algebraica

2.2.3.1. Concepciones proto-algebraicas

En relación con las concepciones de los estudiantes en torno a objetos matemáticos propios de la transición de la aritmética al algebra, se evidencia desde la ausencia total de las mismas, hasta la falta de comprensión evidente en las respuestas dadas. Por ejemplo, en la siguiente secuencia numérica: 3, 7, 11… ¿cómo razonarías para saber el número que ocupa la posición número 31, sin necesidad de escribir cada número siguiente? Frente a la pregunta anterior, el estudiante *G3/S3* respondió: *Si, porque 3 es el término uno, el 7 es*

término 2 y el 11 termino 3. En esta respuesta el estudiante da un juicio de valor, que justifica con una descripción de lo que observa en el enunciado, pero no responde a la pregunta planteada, por lo que se infiere que no fue comprendida. Algo similar ocurre con el estudiante *G2/S5,* quien respondió lo siguiente, ante el mismo problema: *8, contando la secuencia numérica mostrada. Haría una suma desde el número 11 y le sumaria 4 y después del resultado seguiría sucesivamente hasta que me de 31,* y el estudiante G1/S5*: 3,7,11,15,19,23,27,31 =Son 8 números; Si aria así 3,7,11,10 y los sumo y me daría 31 G1/S5.* Esta vez, el estudiante da como respuesta el número de posiciones faltantes hasta obtener cierto resultado, lo cual evidencia que tampoco comprendió la pregunta planteada. De hecho, confunde el número que ocupa una posición determinada, con la posición misma (cuando dice … *hasta que me de 31),* y, a su vez con la distancia posicional desde cierto número (cuando dice *8, contando la secuencia numérica mostrada…).* No obstante, se evidencia un razonamiento que media entre el problema y la respuesta dada, diferente al anterior. Además, denota falencias sintácticas, incluso en el registro natural, al poseer fallas ortográficas.

Lo anterior evidencia que existen brechas o discontinuidades en la secuencia de configuraciones que integran los recorridos epistémicos de los respectivos procesos de análisis algebraico (Godino, Contreras & Font, 2006). Tales brechas se refieren a objetos conceptuales, proposicionales, procedimentales y argumentativos de diferente grado de generalidad, es decir, objetos intensivos que emergen de otros intensivos, que permiten realizar los procesos transformacionales de tratamiento y conversión entre registros onto semióticas implicados, a saber, los registros natural, algebraico, aritmético e icónico, que, en el caso particular, comienza con dificultades desde la comprensión misma del enunciado. Aunque en el ejemplo del párrafo anterior, los estudiantes muestran un proceso, aunque equivocado, también se encontró casos donde no sabían cómo proceder: *No sé qué quiere decir G4/S6, y G5/S1: No entiendo, Por el momento no se.*

Ahora bien, desde una aproximación a objetos proto algebraicos, Godino y Font (2003), mencionan algunas significaciones comunes en los estudiantes: el sentido de la letra como incógnita específica, equivalencia de las dos expresiones mediadas por el signo igual, más que, como un indicador de operacionalizar unilateralmente la expresión que le precede a dicho signo. Sobre este último particular, en la siguiente igualdad: 2() + 4+3= 9+4, para

encontrar el número que debe ir dentro del paréntesis, el sujeto G1/S1 mencionó que lo *haría probando números hasta que dé*. Algo similar menciona G4/S1, cuando afirma: *yo lo hago, pero me demoro mucho, porque debo hacer varios intentos hasta que dé el resultado.* Ambas respuestas connotan el método del ensayo y error, como clásico para resolver igualdades, pero que no denotan procesos de razonamiento proto algebraicos o de síntesis conceptual.

Finalmente, es G3/S1 quien indica un resultado específico, con base en la validación de la igualdad, como sentido de equivalencia: *el número que va es el 3, ya que 2(3) +4+3= 9+4.* En ese sentido, aunque su respuesta es correcta, la valida por el concepto de igualdad como equivalencia, pero sigue sin indicar el procedimiento para obtener la respuesta. Aquí, es de importancia notar que, si bien ya conoce las propiedades de los números reales, no las relaciona con este tipo de igualdades, para realizar procedimientos que le conduzcan a la respuesta. Mas bien, ambos tipos de conocimiento lucen de forma inconexa en la estructura de pensamiento del estudiante.

En ese sentido, en las concepciones sobre el proceso operacional, se carecen de herramientas formales, para problemas con cierto grado de generalización o deducción, dado que el método predominante es el tanteo (citado en Godino, 2012; Godino et al., 2015).

Al respecto, los objetos mentales se constituyen en un constructo para reflexionar sobre los cambios que pueden impulsarse a la educación conceptual de las matemáticas, dado que hace posible la organización, desde la subjetividad, de diferentes experiencias, para derivar de ella un proceso general, descubrir los elementos de sintaxis simbólica inherentes; abstraer operaciones, liberar procesos de comprensión de las mismas a un nivel sintáctico, es decir, pensando, actuando flexiblemente y desarrollando competencias con lo comprendido (Becerra, Buitrago & Calderón, 2017). Esto se refuerza con la respuesta que dio un estudiante frente a una igualdad planteada y una secuencia numérica, que evalúan procesos de razonamiento algebraico transicional. En el caso de la primera respondió: *es como la balanza, se debe sacar los mismos números antes y después del igual, hasta que queda 2( ) = 6 , entonces en la tabla del 2, que el resultado es 6, es 3 G4/S1*. Es más, ese mismo estudiante, respondió en el problema de la secuencia numérica: *sumarle a 3 30 veces el 4, que da un resultado de 123. G4/S1*.

En la primera, la analogía con la balanza retoma lo dicho por Vergnaud (1990) y D`Amore (2012), en relación con el origen contextual del concepto, que denota que el aprendizaje significativo se representa a través de redes conceptuales, en la que cada aprendizaje nuevo esta interrelacionado con los que el sujeto ya tiene. Asimismo, en el primer caso, se evidencia la comprensión y la aplicación de las leyes de la igualdad, desde un campo experiencial, mientras que en el segundo problema, aunque parece comprenderlo, contrasta con el primer caso, en donde ya no muestra una situación o caso concreto que originó el concepto, sino que se muestra abstraído, fuera de su campo contextual.

Entonces, la noción algebraica, consiste en el dominio, por parte de estudiante, de sus procedimientos verbales, aritméticos y geométricos, tanto relacionales, como de generalización, integrados en sus saberes previos. Esta descripción sobre lo que implica el sentido algebraico temprano, se ajusta a la respuesta del sujeto G2/S4: *Al comparar los números se nota una relación entre ellos y según el orden de los números naturales, estos tres en específico coinciden en que tienen una distancia de 4 dígitos partiendo desde el 3. Es decir:3-^{4}-^{5}-^{6}-7-^{8}-^{9}-^{10}-11... Si nos vamos los términos de la multiplicación, estamos realizando la tabla del 4 con la diferencia de que aquí partimos desde el 3. Pero no podemos resolverlo con la tabla del 3 ya que la distancia entre cada número es 4. Entonces realizamos la multiplicación y restamos una unidad al resultado ya que en este caso partimos del número 3 y nos queda así: 4x31=124; 124-1=123.*

En la respuesta de dicho estudiante se evidencia una serie de razonamientos desarrollados con base en la conceptualización de producto, su reconocimiento en situaciones auténticas, o la fase de identidad del objeto y formal, cuando abstrae una característica común, asociada a la forma de construcción de cada número sucesivo. Esto se relaciona con lo afirmado por Kieran (citado en Godino, 2012), quien sintetiza las actividades que caracterizan la noción algebraica, en tres tipos: "generacional, transformacional y global o de meta nivel" (p. 287). Este autor menciona que las de tipo generacional, se refieren al uso de expresiones de tipo informal (en lenguaje verbal, por ejemplo), para expresar aspectos de relación entre ciertos números, así como la modelización aritmética, para representar una situación dada. Por su parte, las actividades de tipo transformacional consisten en la aplicación de propiedades de los números reales (por ejemplo, el hecho de comprender la multiplicación como una suma reiterada). Por

último, las actividades de tipo global se relacionan con procesos de justificación, prueba e intentos informales de generalizar teóricamente relaciones entre números, a partir de la búsqueda de invariantes en sus procedimientos aritméticos (Godino, 2012), lo cual se hizo evidente en esta apreciación de G2/S4: *Si nos vamos los términos de la multiplicación, estamos realizando la tabla del 4 con la diferencia de que aquí partimos desde el 3. Pero no podemos resolverlo con la tabla del 3 ya que la distancia entre cada número es 4. Entonces realizamos la multiplicación y restamos una unidad al resultado ya que en este caso partimos del número 3 y nos queda así: 4x31=124; 124-1=123*.

Es de notar que en las concepciones de los estudiantes se evidencia que el contexto a partir del cual construyen sus modelos simbólicos se origina de la aritmética, como sistema de referencia. Esto es normal, ya que el estudiante, comienza su proceso de aprendizaje de las matemáticas desde el sentido numérico, que luego generaliza Ricaldi (2013). Por ejemplo, en la respuesta dada por el sujeto G2/S3 se evidencia que se fundamenta en patrones aritméticos, para apoyar su conclusión simbólica: *3+4=7; 7+4= 11; 11+4= 15; y así llegaríamos a 27+4= 31; entonces mi regla es 4n-1*. No obstante, si bien es claro que en su regla 4n-1, el 4 refiere al valor constante que debe sumar, no es claro porque debe restar una unidad al resultado o, por lo menos, no lo explica. Esto se relaciona con las dificultades que poseen los estudiantes para argumentar y justificar con exactitud sus tesis o conclusiones, y podrían estar relacionadas con las falencias que presentan en su metacognición para justificar o evaluar un procedimiento en un momento dado con exactitud, lo que podría hacerle creer, erróneamente, que su procedimiento es correcto (Ricaldi, 2013).

En contraste con lo anterior, el estudiante *G2/S5*, el cual responde de la siguiente manera: *plantearía la formula 4n-1 donde 4 es el número de brincos que da la posición, y n es la posición que se quiere encontrar.* En este caso, el estudiante explica, en parte, el modelo construido, relacionando dos de los términos, con la situación problema de donde emergen, es decir, evidenciando un proceso de conversión semiótica, del lenguaje verbal o natural al lenguaje algebraico. No obstante, al igual que el estudiante G2/S3, no explica porque resta una unidad a la expresión 4n. Esta omisión puede deberse a que no tiene dominio conceptual del proceso operacional, o simplemente omitió realizar una argumentación precisa. Si se trata del primer caso, se trata de una evidencia de que algunos

conceptos parecen comprenderse desde su operacionalización, pero puede dificultar su abstracción. En ese sentido, en la estructura de pensamiento del estudiante podrían existir conceptos formales, es decir, el último eslabón de las transformaciones desde la experiencia, hasta cuasi conceptos, todavía en proceso de construcción, en el estadio de clasificación (D`Amore, 2012; Vergnaud, 2016).

Pero, si se trata del segundo caso, entonces se evidencian procesos de conversión semiótica que no son exteriorizados, es decir, una conversión semiótica parcial lo cual se relaciona con lo planteado por Ospina (2012) y Schoenfeld (citado en Barrantes, 2006), quienes concuerdan en que los conceptos se encuentran parcialmente apropiados, o los estudiantes no ven la importancia o la necesidad de tomarse en serio, como el resultado mismo, su proceso argumentativo. Esto se debe quizá al enfoque instrumentista que tiende a asignársele a las matemáticas en el contexto escolar, en vez de ser ella misma, su análisis y reflexión, la finalidad y el determinante del aprendizaje algebraico.

Además, en los procesos conceptuales de los estudiantes, relativos a la noción algebraica, se evidencia la ausencia de comunicabilidad en la descripción de sus propios procesos. Por ejemplo, el estudiante G5/S6 explica de qué manera analiza una secuencia de números para determinar el número que ocupa cierta posición: …*la secuencia se consigue sumando 4 al número anterior. El 31 estaría en el lugar número 20 si inicia en el 3. Es posible decir donde se ubica el 31 pues cada 5 lugares se obtiene un número impar con 1.* Esta respuesta del estudiante deja entrever varios aspectos relacionados con sus concepciones en torno al razonamiento protoalgebraico. En primer lugar, se observa que no da una respuesta precisa, sino, una serie de indicaciones de como hallarla. Segundo, sus afirmaciones indican que confundió una posición con el número que la ocupa: *El 31 estaría en el lugar número 20 si inicia en el 3.* En tercer lugar, el estudiante afirma que luego de *cada 5 lugares se obtiene un número impar con 1,* lo cual, si asumimos que empezó el conteo desde el número 3, como el mismo manifiesta, el número que ocupa el quinto lugar debe terminar en 1, lo cual no corresponde a la realidad, ya que dicho número es el 19. Además, en el lugar número 20 estaría el número 79. Esto evidencia sobre los procesos conceptuales, que no son coherentes entre sí, lo que revela que tampoco lo son sus procesos de razonamiento. También, que poseen conocimientos equivocados sobre la resolución o utiliza una serie de razonamientos incorrectos, que le lleva a concluir respuestas

incorrectas. En ese sentido, un buen punto de partida consiste en identificar la estructura lógica que caracteriza dicho estudiante, que subyace en las concepciones y sobre qué base epistémica realiza inferencias.

Continuando con el tema, pero desde otra perspectiva, Rojas (2010) y Di Barbaro et al., (2019) afirma que las concepciones de los estudiantes en la transición de la aritmética al algebra evidencia el conocimiento y la puesta en juego de objetos simbólicos, no correspondientes al plano institucional, pero que connotan pensamiento algebraico. De hecho, en el estudio que llevó a cabo para analizar las prácticas matemáticas de los estudiantes, identificó que. en su mayoría los estudiantes inventan su propia notación y las trasfieren a nuevas situaciones. Un ejemplo propio de los resultados de esta investigación se observa en la respuesta del sujeto *G3/S4*, quien planteó el siguiente modelo simbólico, para determinar cualquier número de la secuencia 3, 7, 11, …: *Sí, podría usar (Px4) +3= 127R/.* Con base en el análisis de la respuesta del estudiante, aunque su notación es personal, no evidencia el proceso razonado que le permitió llegar al modelo. Esto se relaciona con la perspectiva instrumentalizada de las matemáticas, alejada del razonamiento, como su actividad definitoria, además, las concepciones se reservan, quizá, por considerarse accesorias, no como un conocimiento igual de valioso.

Sobre la competencia de la argumentación, como representación de la conceptualización de los estudiantes en torno a procesos de pensamiento transicional, de la aritmética al álgebra, se evidenció que no se concibe como objetos matemáticos, sino, como entes subjetivos, según el pensamiento de cada sujeto, es decir, desde el plano personal, más allá de ciertas reglas de razonamiento, de carácter institucional. Por ejemplo, el estudiante *G5/S5* dijo, en relación con el problema planteado: *Si, primero escribo el número once, cuento en mi mente tres números y el cuarto lo escribo cuento de tres en tres hasta llegar al 31 que ocupa la posición no 7.* En esta redacción, es posible visualizar la falta de comprensión del estudiante, se refiere a procesos subjetivos (contar en su mente), luego, al parecer cambia de patrón, cuando pasa de contar tres números a cuatro. Además, nuevamente confunden la posición con el número que la ocupa (Gutiérrez & Vargas, 2020).

Por otro lado, algunas concepciones proto algebraicas revelan vaguedad o falencias en la comunicación de procesos referente a las propiedades (Schoenfeld, citado en Barrantes, 2006), que son las llamadas brechas o discontinuidades en la secuencia de

configuraciones que integran los recorridos epistémicos de los respectivos procesos de análisis matemático y se relacionan con la forma en que están configurado los conceptos en la mente del estudiante (Godino, Contreras & Font, 2006). Por ejemplo, el estudiante *G2/S3*, sobre la igualdad 2( ) + 4+3= 9+4, mencionó: *hay que hacer las sumas, y después se mira se divide o multiplica, para saber el número que va en paréntesis.* La concepción de dicho estudiante revela ingenuidad en la construcción conceptual, dado que parece expresarse vagamente sobre la transposición de términos cuando dice que "después se mira si se divide o multiplica", además omite el proceso de transposición de términos independientes una vez hechas "las sumas".

Algo parecido respondió el sujeto *G4/S4*, quien respondió, ante la misma pregunta: *se suman los números, se cambia de posición y de signo. Creo que al final se debe dividir también.* En este caso, aunque el estudiante evidencia el conocimiento de las propiedades de los números reales en la descripción de los procesos, para referirse al caso particular no queda claro cuáles son los números que "se suman", como se cambian de posición y de signo. Si bien, la razón de esto puede deberse a una simple generalidad, evidencia que las descripciones y definiciones de los estudiantes en torno a un objeto específico tienden a ser semánticamente pobres. En esa línea, un ejemplo más contundente lo da el sujeto G5/S6, cuando menciona que *se debe multiplicar, sumar, dividir y cambiar de signos. Haría su respectivo proceso tratando de conseguir el resultado G6/S2*. Sobre la misma idea de la semántica pobre de los estudiantes en relación con los saberes previos, la respuesta del sujeto *G1/S6: Cambiar números de un lado para otro y se divide, paréntesis al otro lado, y cambia de signo, igual con los números, para saber ese valor,* deja ver que incluso, en la redacción, comprensión y contenido, existen falencias en la aplicación de funciones referenciales como un tipo de función semiótica.

Este vacío semántico también se evidenció en la secuencia 3, 7, 11, ..., cuando el sujeto *G5/S3* describe sus razonamientos que fundamentan la comprensión del patrón lógico de dicha secuencia: *Si, seguiría la secuencia de números para poder hallar la posición.* En ese sentido, podría conjeturarse que la capacidad de observación, reconocimiento, descripción, propias de los primeros estadios de la construcción conceptual no se han desarrollado de forma óptima, lo que parece explicar, la dificultad de los estudiantes para los procesos de inductivos, propios del razonamiento proto algebraico.

Por otro lado, en la operacionalización de los procesos proto algebraicos, los estudiantes evidencian creencias sobre la forma en que estos deben ejecutarse, relativas al uso de opiniones y argumentos intuitivos (Esquivel, Araya & Sánchez, 2008). Incluso, se encuentra que no poseen la totalidad de conceptos, procedimientos necesarios, y, si los tienen, no están del todo correctos, no saben cómo aplicarlos, o no identifican pertinentemente las situaciones en las que deben aplicarse. Por ejemplo, el sujeto *G3/S4* expresó: *El 2 del paréntesis suma con el resto de los números: 2( )+4+3= 9, r//. 4.* De manera similar, el sujeto *G6/S6* indicó: *Para despejar 2( )= 6, se multiplica 2 (6)= 12.* En este último caso, parece que el estudiante aprendió las reglas sintácticas, pero no los razonamientos que las derivan, las situaciones de donde emergen, el concepto en acto (Vergnaud, 1990) implícito, dado que la última proposición que plantea "2( )= 6, se multiplica 2 (6)= 12" si fuese analizada desde su sentido conceptual, inmediatamente le sería absurda. Por otro lado, se encontraron creencias sobre el concepto de igualdad, implícitas en el siguiente comentario: *dado que 2+4+3 es diferente a 9+4, hay que sumar los números, por un lado, da 9 y por el otro da 13, entonces, si se saca 2 de 13 y se le da al 9, quedan iguales G3/S4.* En dicho comentario se evidencia que el concepto de igualdad no es un estado a priori o inherente de las ecuaciones, sino que, puede ser necesario reconsiderar la ecuación a fin de convertirla en tal, lo cual no es un concepto institucional. Además, ingenuamente opera los términos de uno de los miembros, sin considerar los conceptos que los representan y los conceptos en acto que de ellos se desprenden, que indican como interpretarse y, por consiguiente, operar con ellos. Esto último parece confirmarse en la siguiente respuesta: *El 2 con el paréntesis suma, entonces debe ir el 4, ya que 2+4+4+3= 9+4 G6/S4.*

Las anteriores dificultades que los estudiantes poseen con referencia a concepciones proto algebraicas, tienen su origen en parte, a las limitaciones de las representaciones que se ponen en juego en los ambientes de enseñanza escolar (Schoenfeld, citado en Barrantes, 2006) de forma tradicional, enfocada en la repetición de tipos de problemas, generalmente algorítmico, sin caracterizar los saberes previos, creencias; sino generadores de aprendizaje memorístico y no lógico, en ocasiones, dando por sentado que los estudiantes deben tener ciertas bases disciplinares, solo porque el docente las considera naturales, intuitivas o fáciles, desde su perspectiva de experiencia y tiempo de manejo del tema, que generalmente

afectan su noción de dificultad de los problemas (García, Segovia & Lupiáñez, 2012). Esto se evidencia por afirmaciones como esta: *no he visto esas ecuaciones (*refiriéndose a 2( ) + 4+3= 9+4)), *solamente conozco las que piden encontrar x. G4/S2*, en la que el sujeto evidencia limitaciones en el concepto que tiene sobre el concepto de igualdad, equivalencia, y, sobre todo de los orígenes proto algebraicos de la ecuación. Otro ejemplo sobre ese respecto, se tiene en la siguiente respuesta del sujeto G1/S4, en la que se evidencia una ausencia autorreferida de significados o sentidos de procesos de razonamiento cuasi algebraico: *La verdad, no me acuerdo cuales son los pasos para encontrarlo*; por su parte, *G1/S2: No sé cómo encontrar el número que va*; y, finalmente *G3/S2: No sé, me enredo cuando voy a despejar, no sé cómo se hace, no entendí ese tema*. En esa línea, Duval (citado en García & Perales, 2006) plantea la importancia de la comprensión semiótica y noética que enriquezca la producción de representaciones, pero a la vez, permita recabar o crear, a partir de estas, nuevos conceptos.

Así, para subsanar los vacíos conceptuales que los estudiantes poseen en los procesos transicionales de la aritmética al algebra, Godino et al. (2015) recomienda necesario tener en cuenta los aspectos anteriores y las particularidades de cada caso, para identificar, de la forma más exhaustiva posible, qué saberes previos tienen los estudiantes y cómo los tienen estructurados, en torno a un objeto de aprendizaje, con el fin de establecer pertinentemente la estrategia de intervención pedagógica. Desde la postura fenomenológica o constructivista en el tratamiento didáctico de este objeto de conocimiento, deben tenerse en cuenta las concepciones que el estudiante tiene de un objeto y a partir de ellas, avanzar hacia la conceptualización y operacionalización del mismo, en este caso de las operaciones básicas con números reales (Torres, 2010). Esto se relaciona con la siguiente afirmación de Palarea (2012): "las dificultades en la resolución de problemas se concentran en aspectos que son intrínsecos al objeto, otros inherentes al propio sujeto y, en torno a estos dos, el medio, es decir, las técnicas de enseñanza" (p. 18). Este hecho es bastante notorio en las siguientes respuestas de los estudiantes: *No, casi no entendí, porque en aritmética solo se hacían multiplicaciones y otros problemas diferentes G2/S4*. Asimismo, otra respuesta que apoya las afirmaciones de Torres (2010) y Palarea (2012): *vimos otra cosa, el séptimo no vimos eso G4/S5*; *En séptimo no vimos esas cosas, solo nos ponían a hacer sumas y restas con números, no con letras G6/S5*. Respuestas como esas, evidencian la necesidad didáctica

de construir conceptos con sentido, desde los primeros años de escolaridad y de forma coherente entre sí.

2.2.3.2. Procedimentalización de concepciones

Los procedimientos de los estudiantes en relación con razonamientos y argumentos proto algebraicos dejan entrever dificultades en las transformaciones de conversión, especialmente del registro verbal al algebraico y viceversa (Rodríguez & Molina, 2013). De hecho, las respuestas de los estudiantes se tienden a ser en el registro verbal. Por ejemplo, retomando el caso de la igualdad 2( ) + 4+3= 9+4, el estudiante *G3/S6* expresó: *Debo restar 4 y 3 a ambos lados de la igualdad, luego, hago las sumas que quedan. Después, debo dividir entre 2, todo, para saber el valor. sumo 4+3= 7 y 9+4= 13; 2 por el número que entre paréntesis debe ser igual a 6. Entonces, el número es 3.* Aunque el procedimiento es correcto, el hecho de expresarlo solamente en lenguaje natural evidencia la tendencia a ser monorregistros (Duval, 2012).

Adicionalmente, en relación con las propiedades de los números reales, aplicada a procedimientos cuasi algebraicos, se evidencian falencias en la transposición de términos, específicamente, en el cambio de signo, cuando se pasa un término al otro miembro. Por ejemplo, el sujeto G5/S3, frente a la igualdad del párrafo anterior, sostuvo: *Se pasa el 4 y 3 del lado del 9 y 4 queda 2 ( ) = 9+4+4+3 2( )= 20, entonces el número debe ser 10.* Esta respuesta igualmente evidencia un uso equívoco del concepto de igualdad, que se visualiza en la forma en que realiza la transposición. Asimismo, se observa la ausencia de procesos verificatorios, dado que, si se hicieran, podría demostrar que su resultado no es correcto. Es decir, los procesos de los estudiantes parecen estar enfocados en la repetición de reglas a las que no les comprenden el sentido lógico, y, por tanto, no ven el sentido de verificar los productos obtenidos con ellas, dado que su validez se asume por imposición de cierta autoridad, no por una correspondencia con un razonamiento constatable.

Asimismo, los procedimientos de los estudiantes evidencian dificultades (Becerra, Buitrago & Calderón, 2017) de tipo sintáctico, que refleja falencias a nivel semántico. Para entenderlo mejor, el estudiante G6/S6 manifestó que en la igualdad *2( ) +7 =13, se resta 7 a ambos lados, y queda 2( )= 6.* Hasta ese punto, se evidencia la correcta aplicación de

reglas sintácticas. No obstante, el procedimiento final, *se multiplica 2 (6) = 12*, evidencia que posee dificultades puntuales en la transposición de términos cuando uno de ellos multiplica con la incógnita, lo cual, como se mencionó en líneas anteriores, puede deberse a un aprendizaje de las propiedades de los R, con incorrecciones. Incluso, es posible encontrar que los procedimientos se omiten y se presenta solo el resultado que generan (Godino, Contreras & Font, 2006) Por ejemplo, el sujeto G2/S6 mostró un resultado sin evidenciar el proceso: *La verdad es que no recuerdo mucho, pero si en ambos lados debe quedar el mismo número, debe ir el 3, ya que así si quedaría: 2(3) +4 +3= 9+4.; Si, el número es el 3*. Frente a este resultado, si bien se evidencia que se comprende el concepto de igualdad, el estudiante parece considerar más importante el producto, que el método seguido para encontrarlo, o, probablemente, lo hizo por tanteo. Sea como sea, es claro que existen falencias tanto en la construcción de procedimientos, como en la importancia que se le atribuye.

2.2.3.3. Criterios implícitos en concepciones y procedimientos

Dentro de los criterios implícitos o explícitos de las concepciones y/o procedimientos en la transición de la aritmética al álgebra se identifican limitaciones conceptuales y argumentativas (Godino, Contreras & Font, 2006; Forigua & Velandia, 2015). Por ejemplo, el estudiante G2/S1 condiciona la igualdad a una sola representación de esta, además de no tener en cuenta el efecto operacional de las diferencias conceptuales entre el término que contiene la incógnita con las constantes: *en 2( )+4+3= 9+4; 2+4+3 es diferente a 9+4, para que sea igualdad, la suma debe ser igual.*

Asimismo, otros criterios evidentes en los procesos operaciones se relacionan con el concepto de igualdad, como la equivalencia de las dos expresiones mediadas por dicho signo. Por ejemplo, el sujeto *G3/S5*, condiciona su procedimiento frente al tratamiento de igualdades dicho concepto de equivalencia: *La verdad es que no recuerdo mucho, pero si en ambos lados debe quedar el mismo número, debe ir el 3, ya que así si quedaría: 2(3) +4 +3= 9+4*. De igual manera, el sujeto *G2/S6* deja ver algo similar al anterior: *Debo probar números, hasta que la multiplicación y la suma de ese lado me de 13, así como en el lado derecho*. De esta manera, ambas respuestas evidencian que los procesos condicionales de

las significaciones y procedimientos de los estudiantes en torno a objetos matemáticos propios de la transición entre la aritmética y el álgebra se tienden a relacionar con el concepto de igualdad y las propiedades de los R que se utilizan para resolverla.

2.2.4. Planeación de Las Estrategias Metacognitivas

Esta subcategoría incluye los resultados de la investigación en torno a la accesibilidad de recursos cognitivos, contextualización de recursos y criterios de selección de presaberes. No obstante, antes de empezar la descripción análisis e interpretación de los resultados, se presenta, a nivel general, la taxonomía con la categoría, con las subcategorías y categorías inductivas en cada una de estas, las cuales serán tratadas en esta sección.

RED-UNICA

Figura 13. Codificación axial de la variable estrategias metacognitivas



Fuente: autor (2022)

2.2.4.1. Accesibilidad de recursos cognitivos

En relación con la forma en que el estudiante pone a disposición los recursos cognitivos a utilizar al enfrentarse a un problema, Flavell (citado en Rodríguez, 2006), se refiere a una primera aproximación al mismo, donde se identifica el grado de dificultad. Luego, en relación a la planeación, Brown (citado en Moreno & Daza, 2014), explica que implica utilizar los recursos cognitivos para diseñar el camino o rumbo de las acciones y estrategias a seguir" (p. 13), es decir, la selección de estrategias apropiadas y la localización de factores que afectan el rendimiento. Procesos como los anteriores se observan de forma temprana en respuestas de los estudiantes, donde se evidencia que valoran el grado de dificultad, y, en consecuencia, se prepara para resolverlo. Por ejemplo, el estudiante G6/S5, relación con la aproximación metacognitiva a sus recursos cognitivos, frente a un problema respondió: *Primero se determina el grado de dificultad del problema, luego tiendo a pensar si la información que guardo es suficiente para la resolución del problema. Si lo es paso a resolver el problema asumiendo que es relativamente sencillo.* En la respuesta que da el estudiante, si bien, es válida desde el pragmatismo subjetivo, desde un análisis formal, crea nuevos interrogantes: ¿Cómo determina el grado de dificultad de un problema? ¿Qué o como es un problema sencillo? ¿Cómo piensa si la información que sabe es suficiente para resolver un problema? Cabe anotar que, aunque ni siquiera el mismo estudiante tiene una respuesta definitiva, sus respuestas parecen adquirir nitidez cuando se enfrenta a problemas determinados. Esto indica que la accesibilidad a los recursos cognitivos es aprehendida por los estudiantes desde sus situaciones, pero no ha evolucionado al estadio de concepto (Vergnaud, 2016).

Continuando con la respuesta del estudiante: *si el problema es sencillo y dispongo de los métodos para buscar información investigo y me aseguro de encontrar información clave para resolver el problema. Si no dispongo de métodos para buscar información que me ayude a resolverlo busco ayuda a personas y trato de explicarle mis dudas, estudiar muy detalladamente el problema y resolverlo por partes.* En esta respuesta del estudiante, ya se evidencia otro aspecto de la accesibilidad a los recursos cognitivos y está relacionada con la consulta de información a otras personas y el enfoque analítico de la planeación resolutiva, algo que no se ha encontrado en resultados de investigaciones precedentes.

Por otro lado, el estudiante G4/S1 menciona que se *enfoca desde los procesos más simples,* al ser sometido a un problema algebraico. Asimismo, el G1/S1 menciona que se enfoca principalmente *en los aspectos que ya conozco* y, en esa línea, similarmente G5/S3: *pienso más que todo en los aspectos que conozco porque de allí puedo ir pensando cómo voy a resolver el problema.* Estas respuestas delimitan otro aspecto de la accesibilidad a los recursos cognitivos y se relaciona, implícitamente con la selección de marcas lingüísticas en el problema, que le evocan situaciones, argumentos, razonamientos o procesos de problemas anteriores que se transfieren a la nueva situación.

Ahora bien, también es cierto que algunos estudiantes afirman o niegan utilizar procedimientos de este tipo, en un problema convencional o cuando poseen atascos. Esto puede deberse a que, quizá, no usan estrategias cognitivas y metacognitivas conscientes para controlar sus propias creencias u orientación frente al problema (Williams y Gómez, 2007). De hecho, según algunos autores, la mayoría de los estudiantes de secundaria no conocen o aplican de formas poco productivas, los procesos de seguimiento frente a resolución de un problema (Castro, Cañadas & Molina, 2010; Rodríguez, Molina, Cañadas & Castro, 2015; Lobato, 2014; Radford, 2010). Lo anterior se contrasta con las respuestas del sujeto *G1/S5* y G2/S5, quienes manifiestan no realizar ningún tipo de actividad relacionada con la planeación metacognitiva.

Adicionalmente, frente al estímulo cognitivo de un problema, algunas respuestas de los estudiantes evidencian procesos comprensivos de la información del mismo. Por ejemplo: *Trato de comprender la información G2/S6. Si, primero leo el problema hasta entender luego comienzo a realizarlo G5/S2.* Esto es coherente con lo planteado por Montes, Flores, Carmona, Huitrado y Flores (2014), quienes sostienen que algunos individuos representan cierta información mediante "descripciones verbales, según las demandas de la tarea" (p. 15). Además, corresponde al primero de los pasos de Pólya, que consiste, precisamente en comprender un problema, lo cual permite asociarlo con los conocimientos previos y disponer o seleccionar los inmediatamente útiles. No obstante, es necesario clarificar los procesos que delimitan la actividad comprensiva, dado que cada persona subjetivamente realiza inferencias que no son correctas y lo conducen a procesos y resultados equívocos.

Incluso, se encuentran creencias personales, tales como: *pienso en que Dios me va a ayudar a responder las preguntas y que no debo tener miedo ni dudar de mí mismo G6/S6.* De esta manera, en la puesta en contexto de un problema determinado, los estudiantes manifiestan apreciaciones subjetivas en relación con la autoconfianza e influencia de fuerzas externas al sujeto, sobre las que no existe referencia en investigaciones precedentes. No obstante, es claro que la referencia a los procesos de recabado de recursos cognitivos es nula, por lo que parecen no tener una estructura o cultura cognoscitiva de acceso a saberes previos definida, pero, siendo así, revelaría dificultades en la comprensión de la pregunta.

Además, según Gutiérrez y Vargas (2020), así como Martínez, Sánchez y Pizarro (2020) los estudiantes presentan dificultades en la argumentación de procesos de planeación. Aunque hacen referencia a pobre semántica de dichos argumentos, en esta investigación se encontró que los estudiantes van más allá, incluso, presentan incoherencias internas en la organización de ideas. Por ejemplo, el estudiante *G4/S6* expreso lo siguiente: *hacer un ejercicio a lo cual detallarlo al resultado.*

Por otro lado, se evidencian otras respuestas que, aunque la respuesta posee coherencia interna, no lo es de forma externa, es decir, no responde al interrogante planteado: *Sí, porque si no reconoces y ves mal la operación puede que te salga mal G4/S6.* Ejemplos como el anterior permiten conjeturar que las debilidades en la preparación y organización de ideas en los procesos de planeación se correlacionan con las falencias comunicativas, propias del proceso lectoescritor.

Para finalizar, en el proceso de recordación de recursos cognitivos, es posible encontrar que los estudiantes son dependientes procesualmente de las formas en que los docentes presentan el conocimiento, es decir, se limitan a sí mismos, con base en lo que la sociedad o los docentes esperan de ellos. Por ejemplo, el estudiante G6/S3 mencionó: *Se entiende que si un docente nos da a resolver un problema es porqué conoce nuestras capacidades deductivas y sabe que podemos resolverlo.* De esta manera, existen limitaciones paradigmáticas de tipo disciplinar y social que se configuran en el imaginario de los estudiantes.

2.2.4.2. Contextualización de recursos

En relación con el uso de técnicas para la regulación de la actividad cognitiva, Rodríguez (2005), menciona que una de ellas consiste en "dividir el problema en partes o encontrar un problema relacionado" (p.36). Al respecto, el estudiante *G6/S3,* refiriéndose a la resolución de un problema, mencionó: *trato de resolverlo por partes.* No obstante, también es posible encontrar según Brown (citado en Caycedo, 2018), aspectos fácticos de la planeación, tales como la predicción, las estrategias de secuenciación y la distribución del tiempo o de la atención selectiva antes de realizar la tarea; es decir, consiste en anticipar las actividades, prever resultados, enumerar pasos y la técnica individual de pensamiento en voz alta. (p. 42), a las que no se encuentra alusión en las respuestas de los estudiantes.

Adicionalmente, en el proceso de contextualización de recursos, Pupo (2011), así como Gil y Mercado (2019), resaltan que los estudiantes, por naturaleza, tienden a asociarse colaborativamente, para planear los recursos cognitivos necesarios para resolver un problema determinado. Al respecto, se observa cierto acercamiento a la dimensión social de la planeación metacognitiva en el siguiente comentario: *Si no dispongo de métodos para buscar información que me ayude a resolverlo busco ayuda de un compañero para estudiar entre los dos muy detalladamente el problema G6/S3.* De hecho, según Pupo (2011), así como Gil y Mercado (2019), el dialogo entre estudiantes, permite que los pensamientos sean explícitos y analizables.

En relación con la descripción de sus procesos de planeación, se encontró que los estudiantes los expresan de forma ingenua, es decir, con vacíos conceptuales. Por ejemplo, comentarios como el siguiente: *Reviso si la operación que necesito hacer depende de algún tema que no tengo conocimiento y lo comparo con algún tema que si tengo conocimiento y veo si lo puedo hacer con los temas que hemos visto G4/S3.* No obstante, esta respuesta deja más preguntas, desde una perspectiva ontológica: ¿Qué es revisar? ¿Qué entiende por depender de un tema?, ¿Qué entiende por comparar y juzgar si la información es suficiente? Interrogantes como los anteriores cabe analizarlos y, con base en ello, delimitar las actividades relacionadas con la activación y recabado de recursos cognitivos, de forma que se constituya en un saber enseñable (Guzmán, 2010; Ricaldi, 2013).

Otros ejemplos asociados a la vaguedad conceptual en la autodescripción, incluso, a las dificultades del lenguaje, se evidencian en la siguiente respuesta *A partir de los datos conocidos alguna forma de hallar los desconocidos G5/S5. Pues aria ver cuál sería la*

pregunta resolver el problema G2/S1. De hecho, la última respuesta evidencia fallas ortográficas en la comunicación de ideas.

Por último, se observa que los procedimientos asociados a la activación de recursos cognitivos se encuentran influenciados por la experiencia y la formación escolar. Por ejemplo, el sujeto *G2/S2*, manifiesta que *aplica los conocimientos básicos aprendidos en clase G3/S3; Lo primero que hago es ver los ejemplos de los anteriores problemas.*

2.2.4.3. Criterios de selección de saberes

Al momento de seleccionar los saberes previos, los estudiantes, y en general, docentes y todos los sujetos poseen creencias que utilizan, desde la activación y selección de dichos recursos cognitivos, hasta encontrar la solución del problema (Schoenfeld, citado en Barrantes, 2006). Por ejemplo, el estudiante G6/S5 utiliza el criterio de la simplicidad: *Si el problema es fácil primero pienso una manera simple de resolver los ejercicios.*

No obstante, otros estudiantes, aunque manifiestan utilizar algún tipo de criterio para seleccionar o no ciertos recursos cognitivos, se limitan a responder: *Si depende del problema G1/S3.* El nivel de generalidad de tal respuesta corresponde al planteado por Vergnaud (2016) que se asocia a redes conceptuales pobres, que limitan la descripción y las representaciones semióticas de los estudiantes de un objeto matemático. No obstante, dicha respuesta también puede revelar que no se le concede la debida importancia de la argumentación de procesos introspectivos.

2.2.5. Regulación en Las Estrategias Metacognitivas

Esta subcategoría incluye los resultados de la investigación en torno a las nociones de seguimiento a los procesos heurísticos, aplicación de heurísticas metacognitivas y factores que inciden en la aplicación de heurísticas.

2.2.5.1. Nociones de procesos heurísticos

REPOSITORIO

En relación con los procesos heurísticos, se evidencian brechas conceptuales, proposicionales, procedimentales y argumentativos con excesiva generalidad. Por ejemplo, frente a la descripción de su estrategia de seguimiento, el estudiante G3/S3 respondió: *viendo los ejemplos.* Este ejemplo se suma como evidencia a las dificultades de comunicación, de uso de funciones semióticas de ese tipo, para comunicar procesos cognoscitivos propios, de los que habla Godino, Contreras y Font (2006).

De forma más contundente respecto a las tareas propias de la regulación metacognitiva, Sanabria, Ibáñez y Valencia (2016) se refieren a esta como la reflexión y evaluación de la fase ejecutiva, el cumplimiento de lo planeado, para continuar en la misma línea de las directrices iniciales, o, de ser necesario, realizar modificaciones de tipo conceptual o procedimental, pertinentes, para avanzar en la consecución del objetivo planeado en el problema. (p. 47). Asimismo, Brown (citado en Moreno & Daza, 2014) argumentó que el monitoreo "consiste en la reflexión si el camino tomado conducirá a la solución" (p. 13). De manera, similar, en esta investigación se encontró que algunos estudiantes reflexionan durante la ejecución resolutiva, detectando dificultades sobre la marcha: *Sí, pero a veces me doy cuenta después que necesito saber algo G1/S2*

Por otro lado, Williams y Gómez (2007) sobre la regulación, encontraron que algunos estudiantes, cuando se atascan en el problema no son capaces de expresar o describir las estrategias cognitivas con las que revisan sus procedimientos. En relación con lo anterior, en la presente investigación se encontró que algunos estudiantes dicen auto monitorearse, pero no sustentan cómo lo hacen. Por ejemplo, los sujetos G1/S3, G1/S5, G2/S3, G2/S5, G2/S6, G4/S1, G3/S5 se limitaron a decir *sí,* cuando se les indagó al respecto. Por lo tanto, la competencia de argumentación se configura como un objeto de aprendizaje urgente y necesario. Otra evidencia que refuerza lo anterior es la respuesta de un estudiante, que no es coherente con lo indagado: *Sí, porque necesito saber si en serio estoy aprendiendo más de lo común G4/S5.* Aunque manifiesta realizar procesos regulatorios, su justificación es incoherente con la pregunta, lo que evidencia falencias en la comprensión lectora.

Por último, las respuestas de los estudiantes revelan cierta rigidez metódica, de manera similar a la que menciona Schoenfeld (citado en Barrantes, 2006), cuando menciona que los estudiantes tienden a asumir un método de resolución como único, la

concepción memorística y mecánica de las matemáticas y la rapidez de resolución. Esto es justo lo que se evidencia en los resultados de algunos de los estudiantes, cuando se le pregunta por la forma en que monitorean sus procesos ejecutivos: me aseguro que sea más rápido y me asegure de que da la respuesta correcta *G1/S1*. Así, mientras este se refiere a la rapidez con que el método lleva a la respuesta, el otro, manifiesta; *seguiría el mismo método para resolver como he aprendido G5/S4*, es decir, evidencia la rigidez metódica de la que habla Schoenfeld.

2.2.5.2. Aplicación de heurísticas

En este aspecto, se encontró que los estudiantes revisan sus procesos con base en los resultados parciales obtenidos, para decidir los cambios, si son necesarios. Por ejemplo, el estudiante G4/S3 refiere a la revisión de sus propios procesos cognitivos cuando dice: *Si usando mi estrategia el resultado es el esperado entonces funciona y si no lo da esta incorrecta y habrá que reorganizarla.* Por su parte, el sujeto G4/S6 es más explícito, al expresar que: *Cuando empiezas a realizar un trabajo debes ir aprendiendo, pero cuando te das cuenta que no es así debes cambiar de método, lo puedes hacer evaluándote durante el trabajo*. Lo anterior permite apoyar los planteamientos de Rodríguez et al. (2015), quienes sostienen que los procesos de revisión de procesos, de resignificación conceptual, cambios paradigmáticos se observan, principalmente, desde pruebas de ensayo y error.

En ese orden de ideas, el llamado ensayo y error, según López (2016), en realidad no es tal, sino que es guiado por intuiciones e hipótesis, de manera condicionada por las características del sujeto y la estructura de la situación problema (López, 2016). Con base en lo anterior, en la respuesta del sujeto *G5/S6: Haría el proceso paso a paso y rectificaría desde el inicio el proceso realizado hasta dar con el método, haciendo el cálculo una y otra vez en mí cabeza hasta que cuando me salga bien los escriba en el cuaderno, o corrija lo mal hecho,* existen unas razones implícitas que obedecen a intuiciones que le hacen ensayar ciertos métodos que con mayor probabilidad resultaran efectivos.

Adicionalmente, otra forma de evidenciar procesos metacognitivos es a través de heurísticas como el fraccionamiento de la información, o del problema, para resolverlo, por partes. Así, el sujeto G6/S2 manifestó: *Si encuentro que la estrategia es débil o se expone*

al riesgo en algún punto es necesario reorganizar la estrategia o crear un pequeño plan para proteger la estrategia principal. Esta heurística es mencionada por Descartes, Pappus de Alejandría y Schoenfeld, como una de las clásicas del ejercicio metacognitivo.

2.2.5.3. Condicionantes en el uso de heurísticas

Uno de los aspectos incidentes en la aplicación de las heurísticas es la motivación. Según Prieto (2015) esta se refiere a los aspectos actitudinales que influyen en la calidad de la respuesta del individuo, es decir, no solo entran en juego aspectos disciplinares, sino, emocionales referidos a los incentivos suficientes como para sentirse impulsado a llevarla a cabo. En ese sentido, Bandura se refiere al papel del refuerzo positivo como factor motivante en su proceso de aprendizaje (Fernández, 2010; Prieto, 2015*).* Con esa idea, es posible valorar la respuesta del sujeto G4/S4: *Todo depende de mi empeño y disponibilidad G4/S4*, como una evidencia que corrobora lo planteado por los mencionados autores.

De otro lado, otro aspecto que se observó tiene incidencia en los procesos metacognitivos es el trabajo en equipo y la influencia de las apreciaciones de los compañeros sobre la forma en que realizan dichos procesos. Por ejemplo, el estudiante G6/S4 menciona: mis compañeros me dicen q está mal y yo verifico. Este comentario deja ver que el ejercicio metacognitivo tiene un componente social, tal como lo planteó Pupo (2011), así como Gil y Mercado (2019) cuando mencionaron que el trabajo cooperativo permite que los estudiantes dialoguen con base en el análisis de los razonamientos del otro, lo que genera discusiones metacognitivas entre ellos.

Por último, en el proceso de monitoreo, es preciso encontrar la tendencia a la operacionalidad, por encima del análisis conceptual. Por ejemplo, las revisiones y procesos repetidos, casi siempre son operaciones y no razonamientos. De hecho, una de las respuestas de los estudiantes, sobre la aplicación del monitoreo fue: *hacerle una prueba con operaciones para comprobar si esta bueno o no G6/S5*. Esta evidencia apoya los planteamientos de Gutiérrez y Vargas (2020) que, precisamente concluyeron que los estudiantes del perfil planeación y control monitorearon principalmente los errores de cálculo, ignorando el control del plan o estrategia.

2.2.6. Evaluación de Las Estrategias Metacognitivas

Esta subcategoría incluye los resultados de la investigación en torno a las nociones del proceso de valoración, procedimientos de evaluación y condiciones de evaluación.

2.2.6.1. Nociones del proceso de valoración

En este aspecto, se encontró que algunos estudiantes piensan que los procesos de evaluación no son necesarios, dado que confían en sus propios procesos, por ejemplo, el sujeto *G6/G6* mencionó: *No, verifico nada porque yo estoy seguro de lo que hago y si me sale mal pues trato de mejorar.* Asimismo, el sujeto G1/S4 expresó: *No por qué cuando hago algo lo entrego con confianza G1/S4.* Estas respuestas constatan el hecho de la sobrevaloración de sí mismos que tienen algunos estudiantes, posiblemente asociada al efecto Drunning Kruger (Williams & Gómez, 2007).

De otro lado, en el aspecto de la evaluación metacognitiva, nuevamente se evidencian los vacíos conceptuales en la descripción de dichos procesos o la subestimación de los argumentos. Por ejemplo, los sujetos *G1/S1, G1/S5, G1/S6, G2/S3, G2/S5, G2/S6* mencionaron lo siguiente sobre la evaluación de sus procesos resolutivos: *Analizando bien el problema* (Gutiérrez & Vargas, 2020). Asimismo, otros no tienen una concepción al respecto, dado que no saben, ni aplican procesos de valoración en la resolución de problemas, como el caso del estudiante *G3/S5: No se.* Este comportamiento tiene relación con la concepción y creencias sobre las matemáticas como un recetario de fórmulas que están correctas, porque el profesor las escribió (Schoenfeld, citado en Barrantes, 2006).

De otro lado, un aspecto no referenciado en investigaciones anteriores, que sí se percibe en la presente investigación y es la creencia en la relatividad de los procedimientos correctos, en el sentido en que la verdad de un resultado no es absoluta, sino que descansa en la perspectiva del observador. En ese sentido, el estudiante G2/S1 argumentó: *Para mi estaría bien y no sé porque para el profesor si estaría bien o mal.*

Por último, se encontró incoherencias en las respuestas de los estudiantes, es decir, no responden al interrogante asociado a sus concepciones evaluativas, lo que una vez más, muestra las falencias comprensivas. Aun así, estas pueden inferirse de sus respuestas. Por

ejemplo, G4/S2 mencionó: *Si, por que debo también estar segura del trabajo que voy a enseñar*. Así, tal como indica Martínez, Sánchez, y Pizarro (2020), las respuestas de algunos estudiantes señalan la incomprensión del problema. Pero, aun siendo evidente lo anterior, la concepción sobre la evaluación es que es un proceso importante en la resolución de problemas y genera seguridad.

2.2.6.2. Procedimientos valorativos

Algunos procedimientos de evaluación de los estudiantes se refieren a la revisión de todo el proceso, incluso, llegando a repetirlos. Otros, mencionan que utilizan herramientas virtuales y sociales para la verificación de sus resultados. Sobre este particular, Mato, Espiñeira y López (2017), menciona que en la evaluación metacognitiva consiste en corroborar que la solución obtenida satisface las condiciones del enunciado problema algebraico. Adicionalmente, implica realizar la trazabilidad del proceso resolutivo, para identificar qué estrategias se ajustan más que otras a cierto tipo de situaciones; conjeturar sobre variables, procesos, o sobre la metacognición misma del sujeto desde sus pensamientos, hasta pasos evidentes de resolución. En ese sentido, las respuestas de los estudiantes guardan cierta semejanza con los anteriores aspectos definitorios de la evaluación. Por ejemplo, el sujeto G1/S2, indicó: *siempre estoy pendiente de eso haciendo paso por paso lo que dice el enunciado*. Asimismo, G6/S1 expresó que realiza procesos evaluativos *analizando de nuevo el problema, sacando nuevas conclusiones y descartando las que crea que son equivocadas*. De manera similar, G6/S2 realiza procesos evaluativos cuando *compruebo que el problema cumpla con todos los datos, y aplicó las fórmulas que hay*. En esa misma línea, G6/S3 afirmó que *primero hay que leer y tratar de entender lo mejor posible el enunciado y según las condiciones, resolver paso a paso el problema sin olvidar las reglas principales*.

Adicionalmente, algunos estudiantes se apoyan externamente para validar sus resultados o procesos de resolución. Por citar un caso, el estudiante G2/S2 mencionó que *al terminar mis ejercicios siempre verifico con ayuda de mi primo que todos estén correctos y los que no están trato de buscarle la mejor solución posible indagando en YouTube que es la herramienta que más utilizo porque explican con detalles los ejemplos propuestos*. De

esa manera, esta respuesta apoya la dimensión social del aprendizaje y de la evaluación colectiva de procesos, inherente al ser humano (Chevallard, 2012).

2.2.6.3. Criterios de evaluación

Dentro de los aspectos que condicionan las actividades evaluativas de los estudiantes, se observa el predominio de la siguiente regla inferida: si la respuesta concuerda con el enunciado, entonces el problema fue bien resuelto (Ottonello, Veliz & Ross, 2011). Por ejemplo, el sujeto *G3/S3* expresó: *Si hago un repaso de la operación y si está correcta lo dejo así y si no es correcta la hago con otra operación.*

Por otro lado, algunos estudiantes son más exhaustivos y no se conforman solo con la correspondencia de la respuesta-enunciado, sino, del proceso-enunciado. Tal es el caso de *G6/S2: Si verifico que mi respuesta tenga todas las condiciones del enunciado.*

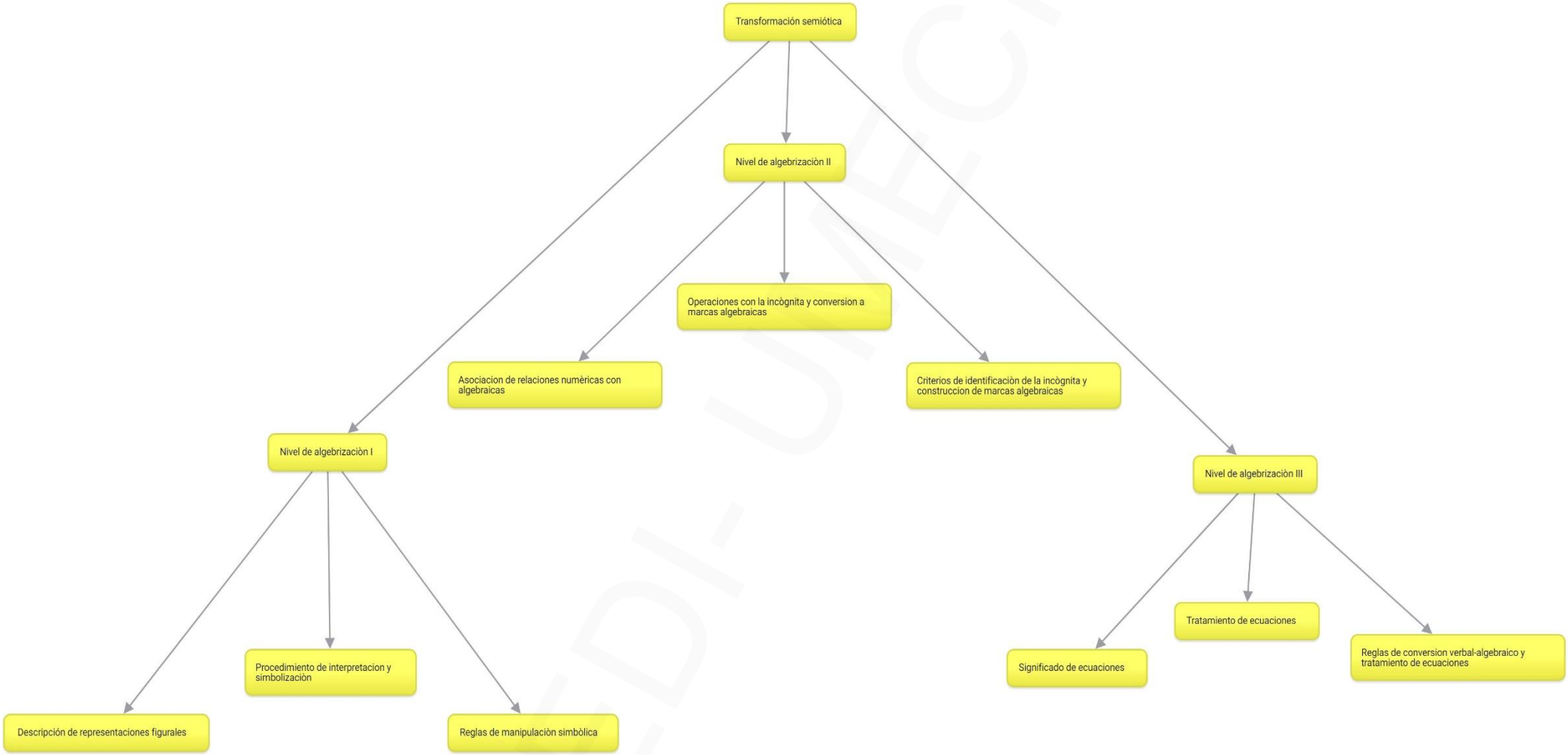
2.2.7. Transformación Semiótica: Nivel de Algebrización I

Esta subcategoría incluye los resultados de la investigación en torno a la descripción del proceso de conversión y tratamiento, representaciones de conversión y tratamiento y criterios para la conversión y tratamiento. No obstante, antes de empezar la descripción análisis e interpretación de los resultados, se presenta, a nivel general, la taxonomía con la categoría, con las subcategorías y categorías inductivas en cada una de estas, las cuales serán tratadas en esta sección.

REDUCIT

RED-UWEC IT

Figura 14. Codificación axial de la variable transformación semiótica



Fuente: autor (2022)

2.2.7.1. Descripción de representaciones simbólicas

En relación con la descripción de autorreportada sobre la conversión y tratamiento, se observa que los estudiantes se fijan de ejemplos anteriores que tienen cierta similaridad con el nuevo, para transferir los procesos, de uno al otro. Por ejemplo, el sujeto G2/S1 expresó: *Lo primero que hago es ver ejemplos parecidos para después saber por dónde debo iniciar y como lo quiero hacer y cuál es la incógnita del problema, y la solución*. Con base en el uso referencial de los procedimientos, se debe tener cuidado con culturizarse a replicar procesos, dado que Robine (2013) explicó que el valor funcional asignado a determinado objeto inhibe la posibilidad de pensar que dicho objeto pueda tener usos diferentes, como ensayar alternativas procesuales en problemas nuevos. A modo de ejemplo de esto, Sánchez (2013) muestra que "si un determinado problema frecuentemente se resuelve invocando una fórmula, por lo general se recurre a dicha fórmula y se olvida explorar otras alternativas que pudieran ser incluso más sencillas y rápidas" (p.78), por lo que, en cada problema, no solo se debe ejercitar el pensamiento reproductivo, sino el productivo (Martínez, 2017).

Asimismo, algunas respuestas permiten ver que existen vacíos conceptuales y asociaciones reduccionistas en los procesos argumentativos propios de las transformaciones de conversión y tratamiento. Por ejemplo: *Sí, simplemente veo la ecuación y la paso a diferentes formas auxiliares G2/S3*. Asimismo, G3/S5 refiere a procesos generales, pero no da un paso a paso que otro sujeto pueda replicar, para un caso particular: *Comienzo recopilando la información y envase a ella hago la gráfica.* Además, otros estudiantes conciben el ejercicio metacognitivo como un proceso de selección estratégica de información G5/S3.

Por último, es posible encontrar estudiantes cuya conversión semiótica ocurra, aun con creencias características de los saberes previos al abordar problemas algebraicos mencionadas, tales como el sentido de única respuesta correcta y una representación en lenguaje natural que indica la confusión entre el objeto y su representación, que habla Duval (2012) o situaciones que no tienen correspondencia semántica con el objeto en cuestión. Así, las respuestas de los siguientes estudiantes apoyan las afirmaciones anteriores, cuando se les pidió que describieran como realizan su proceso de conversión y

tratamiento: *Si porque en geometría hay dibujos y problemas en ellos y graficas ejemplos de barra, circulares o de perfil G6/S2*. *Primero observó el problema para después comprobarlo y interpretarlo debo tener los números de los datos Después debo trazar una línea vertical y horizontal después ponerle los números al lado de la línea después debo ir subiendo las líneas a cada número que le corresponde G6/S4.* En los dos ejemplos anteriores se evidencia que cuando se les habla de representar gráficamente la información, lo asocian únicamente con el ámbito estadístico, donde han utilizado el término, es decir, son monorregistros. Quizá esto puede ser una consecuencia de la forma en que se enseñan los objetos matemáticos en las instituciones educativas o en creencias generadas por ellos mismos.

2.2.7.2. Procedimientos de interpretación y simbolización

En cuanto a las formas de representar la información, se encontró que algunos estudiantes lo hacen de forma gráfica, previo análisis de la información. Por ejemplo, el estudiante G1/S1 expresó: *de acuerdo con lo que tenga hago la gráfica.* Algo similar mencionó G6/S1y G4/S1: *hay que estudiar paso a paso el problema e irlo graficando; primero reviso los resultados o la operación y luego hago la gráfica o el dibujo*. Asimismo, G2/S1 respondió: *yo me enfocó principalmente en explicarlo textualmente.* Entonces, se evidencia que estos estudiantes representan la información de forma verbal, cuando realizan análisis interpretativo y de forma pictórica, cuando traslada la información interpretada a una imagen. De esa manera, estos estudiantes representan la información de dos formas, tal como lo indicó Montes, Flores, Carmona, Huitrado y Flores (2014), dado que "algunos individuos tienden a representarse los problemas de acuerdo a una estrategia basada en imágenes; otros utilizan una estrategia representacional basada en descripciones verbales, según las demandas de la tarea" (p. 15).

2.2.7.3. Reglas de manipulación simbólica

Uno de los criterios utilizados para representar la información es el precedente, es decir las representaciones que les son familiares y que en ocasiones anteriores les han

resultado exitosas. Por ejemplo, el sujeto G2/S1 expresa que *lo primero que hago es recordar problemas y las gráficas o ecuaciones que hice de ellos para después saber por dónde debo iniciar y como lo quiero hacer y la solución*. Asimismo, el sujeto *G5/S6* manifiesta que *de acuerdo con lo que se quiera resolver, uso fórmulas de otros problemas.*

Después de todo, la asociación con casos anteriores que han dado resultado no es una conducta extraña, dado que Ardila (2013), hablando sobre la teoría conductista recapituló que los sujetos aprenden por asociaciones simples de tipo estímulo respuesta, incluso, mencionó que es una manera eficiente de gestionar la información que se necesita para resolver un problema. Además, permite la posibilidad de encajar dichos aprendizajes de experiencias anteriores que ponen a disposición del sujeto elementos favorecedores para la reorganización, en la medida en que permiten la integración y articulación de saberes, siempre que se haga con los ajustes y apertura paradigmática, que la situación nueva demande (Martínez, 2017).

En esa línea, otra forma de las asociaciones procedimentales o conceptuales establecidas a partir de situaciones típicas es la de condicionar el registro a utilizar, de acuerdo con el tipo de registro de partida, por ejemplo, *G4/S3* dice: s*i el enunciado en de conteo o numérico se usaría una operación y si es de planeación, se usa un dibujo para plantear el problema y resolverlo*. No obstante, según algunos autores, es posible que la transferencia de información con base en el estímulo-respuesta genere parálisis paradigmática, dado que condiciona al sujeto a responder de la misma forma antes situaciones que percibe similares (Sánchez, 2013). Según Robine (2013), el punto central del aspecto negativo que puede tener la transferencia consiste en que el valor funcional asignado a determinado objeto inhibe la posibilidad de pensar que dicho objeto pueda tener usos diferentes, como ensayar alternativas procesuales en problemas nuevos. Para ejemplificar lo anterior, Sánchez (2013) plantea lo siguiente: “si un determinado problema frecuentemente se resuelve invocando una fórmula, por lo general se recurre a dicha fórmula y se olvida explorar otras alternativas que pudieran ser incluso más sencillas y rápidas” (p.78). Lo anterior hace pensar en la importancia que debe tener para la didáctica enseñar la flexibilidad paradigmática, que permita expresar y comunicar las matemáticas a través de distintos registros semióticos, lo que implica entender de la forma más amplia posible el significado de términos, símbolos matemáticos, conceptos y proposiciones, con

el fin de resolver problemas matemáticos y algebraicos (D´Amore, 2012; Duval, 2016; Godino, 2016; Vergnaud, 2016).

Por último, otro criterio que se toma en cuenta para la conversión semiótica es la conservación semántica, es decir, regular durante la construcción de la misma, que toda la información contenida en la primera, aparezca en la segunda: *hay que estudiar paso a paso el problema e irlo graficando sin salirse del contexto de este. De manera que quede idéntico al real pero realizado de una manera más práctica donde se resalte las partes más importantes de este G6/S1*. Esta respuesta permite apoyar a Rodríguez (2005) y Gusmao (2006), cuando mencionan que las transformaciones semióticas son un producto de la actividad metacognitiva o reguladora de los procesos cognitivos.

2.2.8. Transformación Semiótica: Nivel de Algebrización II

Esta subcategoría incluye los resultados de la investigación en torno a las características de las transformaciones de conversión y tratamiento, procedimientos para las transformaciones semióticas y aspectos condicionantes de una transformación particular.

2.2.8.1. Asociación de relaciones numéricas y algebraicas

Con base en los resultados encontrados, se puede evidenciar que los estudiantes cuando leen un enunciado realizan actividades de análisis para encontrar la incógnita a hallar en la información dada en el enunciado. Algunos, incluso, teniendo en cuenta la variable independiente. Por ejemplo, G1/S6 que se fija en *la incógnita de la operación, para escribir una ecuación.* Por otro lado, G2/S1 toma *la variable independiente, para referirse a la incógnita.* Y, de forma parecida, G4/S2 menciona que *si se conoce a que variable se le coloca la x en un problema matemático se podrá identificar las variables que son x y buscar una respuesta, así como en los problemas de los números.* Estas respuestas evidencian la actividad transformacional del pensamiento algebraico, planteadas por Palarea (2012) y Kieran (citado en Godino 2012): “generacional, transformacional y global o de meta nivel” (p. 287). Además, se observa el sentido de la letra como incógnita específica según Godino y Font (2003).

Además, las transformaciones de conversión y tratamiento de los estudiantes evidencian falencias desde la total ausencia de referencia a las mismas, como concepciones que revelan ingenuidad conceptual en la forma de construirlas. En primer lugar, los estudiantes manifiestan, de manera autorreferida que no saben expresar, por ejemplo, un problema algebraico, mediante una ecuación de la forma Ax+B=C. Esto se evidencia en las respuestas de los sujetos G1/S4; G3/S4 y G4/S1 quienes coinciden con un *no entiendo eso y no sé*. De otro lado, aunque otros responden saber, no explican verbalmente como lo hacen, lo cual puede deberse, como se explicó anteriormente, a que, en realidad no sepan, no tengan dificultades para organizar sus ideas, de forma que las pueda comunicar, es decir, existe desconocimiento o falencias argumentativas (Godino et al., 2015). Asimismo, otras dificultades, quizá, propias del ambiente de formación son referidas por un estudiante así: *Aún no he visto el tema de álgebra y no sabría responder la pregunta, solo se en problemas que no llevan x G5/S1*.

Por otro lado, aun manifestando tener nociones sobre la manipulación algebraica en el nivel II, se observan creencias sobre la construcción de representaciones algebraicas alrededor de un enunciado, tales como *se le puede asignar la x a cualquier valor porque se resuelve cualquier problema con esas variables G5/S5*. En esa línea, G1/S3 también mencionó que *la x se le puede poner a todas las variables.* Asimismo, G5/S6 mencionó: *para identificar los datos conocidos y las variables del problema no es indispensable escoger a que variable se le asigna la letra x. Sin embargo, es más práctico aplicarla, ya que nos va a ayudar a ver el problema de una manera más sencilla, ya que esa es un número.* En respuestas como las anteriores, es evidente que los errores que cometen los alumnos se deben en su mayoría a que los conceptos previos son insuficientes entonces realizan asociaciones o inferencias incorrectas. Como desconocen o "desatienden" las propiedades de las operaciones, tanto con números reales como con polinomios, los alumnos "inventan" sus propias reglas y las trasfieren a nuevas situaciones (Alan Schoenfeld, citado en Mejía & Londoño, 2017). No obstante, tal como se evidencia en el sujeto G5/S6, las creencias en sí mismas son formas personales en que se aprehenden ciertos conocimientos, pero su validez descansa en la fundamentación que posean desde el conocimiento institucional (Godino, 2012; D`Amore, 2012).

Estos resultados encontrados se suman a los hallazgos de Booth (citado en Castro, 2012), Cerdán (2010), Espinosa (2019), Fernández (1998), Herscovics (1994), Kieran (1989), Martínez (2011), Molina (2007), Socas (2007), Trujillo, Castro y Molina (2009), Vega, Molina y Castro (2011), quienes encontraron evidencias del desconocimiento, creencias y posturas ingenuas sobre procesos de conversión asociados a la construcción de modelos algebraicos.

A modo de propuesta de dichas dificultades, Becerra, Buitrago & Calderón (2017) plantean que, en vez de empezar por el aprendizaje de objetos matemáticos, se privilegien actividades didácticas procedimentales, desde situaciones concretas que promuevan la constitución del objeto mental.

2.2.8.2. Operaciones con la incógnita y conversión a marcas algebraicas

En los procedimientos utilizados para las transformaciones semióticas, al igual que en otras categorías inductivas, se encontró que los estudiantes expresan procedimientos muy generales que evidencian vacíos operacionales. Por ejemplo, el sujeto G3/S5 respondió: *Sí, muchas veces lo hago por lógica y por otras variantes*. Sin embargo, cuando se le replicó como aplicaba "lógica" y "otras variantes", se quedó pensando y no respondió. Esta fue justamente refiere Duval (2012) cuando habla de la ingenuidad y falta de comprensión de sus propios procesos cognitivos operativos.

En el proceso operativo, se observa que el sentido de la letra como variable, incógnita específica y número generalizado es predominante en estos niveles de algebrización escolar (Godino & Font, 2003). Por ejemplo, el sujeto G3/S1 menciona debo despejar la variable x, cambiando de signo y los números por un lado y las letras por el otro, hasta saber el valor de x G3/S1. Asimismo, el sujeto G4/S1, menciona que en la secuencia 4,7, 10,…, *el número que sea puede ponerse como x, para encontrar su ecuación.* Esta variedad de sentidos es importante, ya que permite resolver situaciones distintas en que dicho objeto matemático está relacionado (Duval, 2012).

2.2.8.3. Criterios de identificación de la incógnita y construcción de marcas algebraicas

Sobre los criterios utilizados para realizar transformaciones semióticas, el principal que utilizan los estudiantes es el tipo de incógnita que identifican en el problema. Por ejemplo, el estudiante G5/S4 menciona que *dependiendo el dato la incógnita que necesitemos hallar se establece la x en el dato que no conocemos.* Además, *G6/S3* argumenta algo parecido: *le asigno la letra x a la variable que se le desconoce su valor, porque así se cuál es la variable a la que debo darle solución* G6/S3. Estas respuestas, interpretadas con los procedimientos con que los estudiantes realizan transformaciones semióticas, en la sección anterior, permiten inferir que, una vez identificada la incógnita es cuando deciden el sentido que debe tener la misma, con base en los sentidos funcionales mencionados por Godino y Font (2003), principalmente, los de letra usada como incógnita específica, letra usada como un número generalizado y letra usada como variable.

2.2.9. Transformación Semiótica: Nivel de Algebrización III

Esta subcategoría incluye los resultados de la investigación en torno a las aproximaciones a la manipulación algebraica de ecuaciones, tratamiento y conversión en procesos de manipulación algebraica y condiciones de manipulación algebraica.

2.2.9.1. Significado de ecuaciones

En cuanto a la manipulación algebraica de ecuaciones, los estudiantes evidencian falencias desde la total ausencia de referencia a las mismas, hasta formas ingenuas de manipularlas. En primer lugar, los estudiantes manifiestan, de manera autorreferida que no saben expresar, por ejemplo, un problema algebraico, mediante una ecuación de la forma $Ax+B=Cx+D$. Esto se evidencia en las respuestas de los sujetos G1/S4; G3/S4 y G4/S1 quienes coinciden con un *no entiendo eso y no sé*. De otro lado, aunque otros responden saber, no explican verbalmente como lo hacen, lo cual puede deberse, como se explicó anteriormente, a que, en realidad no sepan, no tengan dificultades para organizar sus ideas, de forma que las pueda comunicar, es decir, existe desconocimiento o falencias argumentativas (Godino et al., 2015). Asimismo, otras dificultades, quizá, propias del ambiente de formación son referidas por un estudiante así: *Aún no he visto el tema de*

álgebra y no sabría responder la pregunta G5/S1. Incluso, cuando si tienen nociones sobre el tratamiento a ecuaciones, se evidencian vacíos conceptuales notables sobre las propiedades de la igualdad y de los números reales en contexto, que permiten realizar el despeje: *creo que cambiando los números G1/S3; Tengo entendido que se despejaría mediante una resta G3/S5.*

2.2.9.2. Tratamiento de ecuaciones

En los procesos de transformación semiótica, se encontró que algunos estudiantes realizan procesos de conversión del problema algebraico expresado en lenguaje natural, con base en expresiones que consideran claves y sus representaciones en lenguaje algebraico, así como su integración mediante una ecuación algebraica, que reducen mediante reglas de manipulación sintáctica, hasta solucionarla. Por ejemplo, el sujeto G1/S6, ante un problema algebraico, planteó la siguiente ecuación, indicando que, *después de escoger la x, se empieza a escribir la ecuación del problema*, 2x+6+12= 3x; 2x+18= 3x; 18= 3x-2x; 18 = x; x= 18.

Si bien, la respuesta del estudiante evidencia el dominio de las reglas sintácticas de reducción de ecuaciones, y el sentido de la letra usada como incógnita específica, es posible que no se encuentren fundamentadas en razonamientos propiamente algebraicos, fundamentados en propiedades de ellos números reales, propiedades de las igualdades (Pérez & Aylwin, 2011), dado que el mismo estudiante que resolvió la ecuación tuvo dificultades para reflexionar y referir las bases conceptuales que justificaban sus procesos al responder: *no sé, me enseñaron así.*

De manera similar, es posible observar en el sujeto G5/S6, el uso adecuado de las reglas de manipulación sintáctica, en el tratamiento de ecuaciones. Por ejemplo, frente a la ecuación *2x+6=3x-12,* planteó el siguiente procedimiento: *2x+6−6=3x−12−6; +6+12=3x-2x ~> x=18.* Este estudiante, a diferencia, del anterior, no traspone los términos, como proceso abstraído, sino que aplica la misma operación con los mismos términos en ambos miembros, mostrando el origen conceptual de la transposición misma (Pérez, 2000; Aylwin; 2011; Zill et al., 2015), por lo que es posible interpretar, a partir de

su proceso, que posee mayor comprensión conceptual que el sujeto G1/S6. De hecho, indicó: *resto el 6 a ambos lados para que siga igual.*

De otro lado, se observa que las falencias en el tratamiento semiótico de expresiones y ecuaciones algebraicas tienen su origen en las operaciones con números reales, particularmente las relacionadas con los números enteros y a la conversión aritmética arbitraria de expresiones y ecuaciones algebraicas. Por ejemplo, frente a la ecuación *2x+6=3x-12*, un estudiante propuso el siguiente procedimiento: *2 + 6 = 3 – 12; 3-12=9 G4/S5*. Esta respuesta evidencia, por un lado, el desconocimiento de las propiedades de adición o diferencia de números enteros, desde su aspecto conceptual y, por el otro la asociación arbitraria de expresiones algebraicas con expresiones aritméticas.

Otras respuestas similares a la anterior son las siguientes: yo lo describiría así 2x3: igual a 6 y + 6: 12 G1/S5, y yo sumaria 2+6 y el resultado lo multiplicaría por el resultado de 3+12 G1/S4. En la primera se evidencia una operación, que, si bien es correcta en sí misma, no posee coherencia con el procedimiento que demanda la situación problema; posteriormente, parece utilizar convenciones e inventar sus propias reglas, al mezclar ambos registros: "igual a 6 y + 6: 12". Por su parte, en la segunda, el sujeto plantea multiplicar el resultado de dos pares de sumandos. Los procedimientos para resolver la ecuación *2x+6=3x-12,* analizados en ambos casos, pueden contextualizarse conceptualmente en los planteamientos de Blanton y Kaput (2011, p.24), quienes mencionan que las dificultades de los estudiantes en la manipulación de expresiones algebraicas, está referida a la realización de operaciones, compuestas por símbolos y signos, "dado que las letras y los números se ajustan a diferentes reglas, causan dificultades a los estudiantes" (Blanton & Kaput, 2011, p.24). En ese sentido, se puede inferir que tales dificultades pertenecen a dos niveles epistémicos: semántico, el cual indica que los signos son dados con significados claros y precisos y sintáctico, en el cual los signos pueden ser operados por medio de reglas sin significado (Sánchez, 2014, p.13).

Estas respuestas implicitan la consideración de los objetos matemáticos, como lo son las operaciones, ecuaciones y las letras, de manera aritmética, tal como se describe en los resultados de la investigación de Soto, Vera y González (2015), en los que se encontró que la mayoría de los estudiantes tomó las letras como objetos concretos o simplemente o

los ignoró. Incluso, Di Barbaro et al. (2019) menciona que los estudiantes tienden a clausurar las expresiones algebraicas, dado que no les comprenden su sentido.

De otro lado, en cuanto a la conversión semiótica de representaciones algebraicas, se encontró que algunos estudiantes les cuesta resolver ecuaciones mediante el tratamiento en el mismo registro algebraico. Para ello expresan de manera verbal e informal los procesos resolutivos. Por ejemplo, una de las respuestas de los estudiantes, en relación con la resolución de la ecuación 2x+6=3x-12, fue: *Se debe hacer transposición de términos y simplificar. Solución x= 18* G2/S5. Una posible explicación a este hecho la propone Ospina y Reyes (2018), cuando menciona que dichas dificultades se relacionan a la confusa asociación de representaciones con el objeto, desencadenando así, una ausencia de articulación entre distintos registros de representación del mismo objeto, es decir, a la desconexión entre lenguaje natural y algebraico. Adicionalmente, se observa que, a pesar de dar una respuesta correcta, no hace explícito el registro en el que realiza las transformaciones así como las articulaciones que establece entre estos (Guzmán, 2010). Incluso, algunas respuestas son demasiado generales, que evidencian vacíos epistémicos semánticos y sintácticos (Sánchez, 2014, p.13), tales como: *debo sumar los números del lado izquierdo y compararlo con el derecho G6/S2; junto las variables en un lado y los números en otro G6/S3; resto a ambos lados el mismo número, divido o multiplico, para despejar x G6/S5, y primero divido y ya empiezo a trabajar G4/S1*.

Por último, se encontró que algunos estudiantes manifestaron el desconocimiento de los procesos de conversión semiótica, con expresiones como: *no sé G3/S3*, *yo planeo la ecuación, pero el profe dice que no es así G5/S6*. Además, no dominan la sintaxis y reglas de manipulación de expresiones algebraicas, lo cual se evidencia en respuestas como: *2x+6= 3x_1; 6-1= 3x-2x5= X. R/= x5 G2/S6.* Otro estudiante, en el proceso menciona: *después resto 3-12 que es igual a 8x=9 luego lo divido 8/9 que da x=1 G5/S6*. En ese mismo orden de ideas, G6/S1 mencionó: *la variable la restaría por lo cual sería - x -18 a lo cual si se divide por la ley de signos daría más por lo que el resultado sería x = -18 G6/S1*. Otra respuesta que puede comprenderse en conjunto con las anteriores es: *si se cómo despejar la variable, se mueven los términos = 2x-3x=-12-6 como las variables se cambian también se cambian su signo, se agrupan y operan los términos semejantes:2x-3x= x, x= -12-6= 18 entonces sería x=18 G5/S2*. Estos hallazgos se relacionan con

dificultades que, según (Sánchez, 2014, p.13), pertenecen a dos niveles epistémicos: el semántico y sintáctico. En el nivel semántico se evidencian falencias en la relación de las propiedades de adición o diferencia de números enteros (Pérez, 2000; Aylwin, 2011; Zill, Wright & Escutia, 2015). Además, pueden estar relacionados con el uso predilecto del pensamiento reproductivo, pues simplemente estarían reaplicando procesos memorizados, sin análisis alguno(Becerra, Buitrago & Calderón, 2017; Assuero, 2020).

2.2.9.3. Reglas de conversión verbal-algebraico y tratamiento de ecuaciones

Los criterios utilizados por los estudiantes para la manipulación algebraica referida a la conversión del lenguaje natural o registro verbal al algebraico son el significado asociado a las marcas lingüísticas o expresiones del problema, que relacionan con ciertas expresiones algebraicas, según lo que les han enseñado. Por ejemplo, un estudiante mencionó que hay signos en los que piensa cuando lee ciertas partes: *el triple de un número=3x, la mitad =x/2; tanto como: =*. G3/S1.

Por otro lado, otro estudiante manifestó que, para resolver ecuaciones, *antes separa los que tienen parecido, primero se resuelven operaciones con x y luego, el resto G3/S1*. Las falencias semánticas de la respuesta anterior reflejan la necesidad de garantizar antes de la implementación didáctica los significados de los conceptos y procedimientos implicados de las transformaciones semióticas (D`Amore, 2016).

Para finalizar, se evidencia el predominio de la actividad reproductiva en la determinación de realizar la transposición de términos, pasando ciertos términos al otro lado de la igualdad, con la condición de invertir la operación que estaban realizando. Lo anterior, solamente con memorización sin llegar a comprender las propiedades de los reales que los sustentan. Por ejemplo, el estudiante G5/S1 mencionó: *Tenemos que recordar que todos los términos que están multiplicando en un lado, pasan al otro lado del igual dividiendo y los que están dividiendo pasan al otro lado del igual multiplicando. En cambio, a los términos que están sumando pasan al otro lado del igual restando y los que están restando pasan al otro lado del igual sumando G5/S1* (Assuero, 2020). En ese sentido, Blanton y Kaput (2011) mencionaron que todo aprendizaje debe desarrollarse, no de forma memorística, sino, inferencial, a partir de objetos de conocimiento previamente

apropiados por el estudiante, para que adquieran sentido, en los aspectos semántico y sintáctico (Blanton & Kaput, 2011).

3. Triangulación De Hallazgos de Datos Cuantitativos y Cualitativos

La triangulación de hallazgos se realizó con los resultados obtenidos desde cada método, mostrando las semejanzas, diferencias o complementos y variables intervinientes entre estos, teniendo en cuenta cada variable analizada: saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica.

La siguiente es la matriz de triangulación de hallazgos, para la variable saberes previos,

RED-UMECIT

Tabla 81. Matriz de triangulación de la variable saberes previos

Tipo de comparación / Hallazgos	Hallazgos cuantitativos	Hallazgos cualitativos
Semejanzas	Falencias en los procesos cognoscitivos transicionales desde el concepto de número hasta el razonamiento protoalgebraico. La mayoría de los estudiantes está en un nivel bajo; casi la tercera parte, en nivel medio y un porcentaje menor, en nivel alto. La media de las 6 instituciones, de 2,0814, que corresponde a un nivel bajo. No existen diferencias significativas en las puntuaciones de la variable, en los estudiantes de las 6 instituciones educativas.	Ausencia de la aplicación procedimental de axiomas y propiedades, en la reducción de expresiones aritméticas. Poca evidencia práctica del sentido de las propiedades en los procesos operacionales de los estudiantes. Creencia en torno a una única respuesta correcta se relaciona con el condicionamiento que hacen de la igualdad a una sola representación de la misma, existencia de solo una respuesta correcta, rapidez del proceso resolutivo, proceso basado en aplicar fórmulas y que el profesor tiene la última palabra. Los estudiantes tienden a exaltar el resultado, por encima de los procesos que lo sustentan, dado que no tienen una cultura argumentativa, demostrativa y de justificación. Ausencia de una formación escolar relacionada con significados o sentido de las operaciones, más que con el proceso ejecutivo mismo.
Diferencias/complementos	Hay un 4% más estudiantes en medio, respecto al total, que en bajo, pero la media total de las 6 instituciones, de 2,2907, que corresponde a un nivel bajo Existe una correlación inversa entre el nivel de la variable saberes previos y el número de estudiantes que se ubican en dicho nivel	Aunque los estudiantes dominan las operaciones básicas como la suma, resta, multiplicación y división, algunos estudiantes desconocen algunos aspectos procedimentales. Repiten un procedimiento algorítmico, es decir, no comprenden el sentido lógico de los algoritmos, sino nemotécnico Básicamente los estudiantes presentan falencias en la comprensión del lenguaje, dado que las respuestas, y, por tanto, sus razonamientos, son incoherentes con lo que se indaga en la pregunta.
Variables extrañas o intervinientes	La motivación, autoconfianza, comprensión lectora, organización lógica de ideas	

Fuente: autor (2022)

PREPRINT

En la matriz anterior se evidencia que las semejanzas observadas en los resultados, tanto por el método cuantitativo, como por el método cualitativo, desde el aspecto disciplinar, hacen referencia a la tendencia a mostrar un bajo desempeño en el nivel de saberes previos, reflejado en una media de 2,0814, sin diferencias significativas a nivel interinstitucional. Descriptivamente, este bajo nivel corresponde a la ausencia de una estructura de razonamiento orientada a la articulación entre conceptos, argumentos, propiedades, procedimientos aritméticos, relaciones numéricas y representación de las mismas, y en su lugar adoptan prácticas personales en las que la actividad matemática se convierte en un compendio de reglas o algoritmos, cuyo significado no transciende de su operacionalización, que se aplican a objetos matemáticos, creencias sobre la inmediatez de los resultados, autoridad absoluta del docente y construcción de argumentos de naturaleza no matemática.

En el caso particular de la subvariable definiciones y operaciones con números reales tuvo un desempeño relativamente alto, el cual se encuentra asociado al dominio de una serie de procesos algorítmicos, sin implicar las relaciones conceptuales implícitas en ellos.

Respecto a las diferencias/complementos entre métodos, por el método cuantitativo se encontró que el nivel de saberes previos y el número de estudiantes en dicho nivel se correlacionan de manera inversa, lo cual complementa el desempeño bajo en la variable de análisis; por el lado cualitativo, se encontraron falencias en la comprensión lectora y organización lógica de ideas. Por último, se encontró la influencia de las siguientes variables extrañas en el proceso de resolución de problemas algebraicos: la motivación, autoconfianza, comprensión lectora y organización de ideas.

De otro lado, respecto a la matriz de triangulación de los resultados de la variable estrategias metacognitivas, se presentan en la siguiente tabla,

REPOSITORIO

Tabla 82. Matriz de triangulación de la variable estrategias metacognitivas

Tipo de comparación / Hallazgos	Hallazgos cuantitativos	Hallazgos cualitativos
Semejanzas	Los factores que inciden en el desempeño en la variable estrategias metacognitivas son: "procesos regulatorios en la planeación" y, análogamente, "procesos de planeación en la regulación", procesos regulatorios en la evaluación" o "procesos evaluativos de la regulación", revisión de procesos ejecutivos, articulación de tareas proyectivas, de revisión y valoración", evaluación de los procesos de planeación, planeación del proceso de evaluación. La mayoría de los estudiantes, de hecho, casi las dos terceras partes está en un nivel bajo, casi la tercera parte restante, en nivel medio y un porcentaje insignificante, en nivel alto La media total, de las 6 instituciones, es 2,0941, que corresponde a un nivel bajo. No existen diferencias significativas en las medias de la variable estrategias metacognitivas, a nivel interinstitucional.	No existen procesos de accesibilidad y organización de recursos cognitivos, sino que, en la interpretación de cierto problema, parecen adquirir nitidez cognitiva Poseen argumentos muy generales y pobres conceptualmente para describir su propio proceso de planeación Los estudiantes tienden a asumir un método de resolución como único, tienen una concepción memorística y mecánica de las matemáticas y piensan que la resolución debe ser rápida.
Diferencias/complementos	Existe una correlación inversa entre el nivel de la variable estrategias metacognitivas y el número de estudiantes que se ubican en dicho nivel Sí existen diferencias significativas en las medias de la subvariable regulación y evaluación a nivel interinstitucional Las estrategias metacognitivas influyen contundentemente en la transformación semiótica, fundamental en la resolución de problemas algebraicos: T= 1,004M	Falencias en la comprensión lectora, dado que las respuestas son incoherentes con lo planteado. los estudiantes consultan información a otras personas y traten de utilizar el enfoque analítico de la planeación resolutiva El método que utilizan los estudiantes para la revisión ejecutiva es el tanteo o la subdivisión en subproblemas Construyen sus propias marcas lingüísticas, influenciados por la experiencia y la formación escolar en los problemas algebraicos, para evocar fácilmente experiencias, razonamientos, o procedimientos que les han sido útiles y transferirlos productivamente a la nueva situación
Variables extrañas o intervinientes	La motivación, autoconfianza, comprensión lectora, organización lógica de ideas	

Fuente: autor (2022)

En la matriz anterior, las semejanzas observadas en los resultados, tanto por el método cuantitativo, como por el cualitativo, muestran un bajo desempeño en el nivel de la variable estrategias metacognitivas en la mayoría de los estudiantes, con una media de 2,0941, sin diferencias significativas entre instituciones. Descriptivamente, este bajo nivel corresponde a la ausencia de una estructura de los procesos interdependientes de planeación regulación y evaluación, para la revisión de procesos ejecutivos y articulación de tareas proyectivas, lo que puede estar relacionado con la concepción de inmediatez del logro de un resultado. En ese sentido, los procesos de accesibilidad y organización de recursos cognitivos son inconscientes, por tanto, no controlados, y difícilmente auto descriptibles, lo que evidencia falencias en sus funciones semióticas de tipo argumentativo. Además, en sus prácticas personales adoptan un método de resolución como único, confundiendo el objeto con su representación semiótica

Respecto a las diferencias/complementos, en los resultados cuantitativos se encontró que existe una correlación inversa entre el nivel de la variable estrategias metacognitivas y el número de estudiantes que se ubican en dicho nivel. Además, aunque existen diferencias significativas en las medias de la subvariable regulación y evaluación a nivel interinstitucional, siguen estando en el nivel de bajo. Asimismo, las estrategias metacognitivas influyen superlativamente sobre la variable transformación semiótica, que, a su vez, refleja la resolución de problemas algebraicos, por lo que, transitivamente, puede decirse que la variable estrategias metacognitivas predice, mejor que el resto de las variables, el comportamiento de la resolución de problemas algebraicos.

Por otro lado, algunas diferencias encontradas en los resultados cualitativos, respecto a los cuantitativos, son las siguientes: incoherencias en la comprensión lectora y organización de ideas, influencia social sobre la valoración del proceso y resultado, utilización de enfoque analítico, donde se destaca la subdivisión del problema en subproblemas o mediante ensayo error, lo cual connota el uso de marcas lingüísticas de experiencias y problemas anteriores, para su transferencia al caso actual. Además, se encontró la influencia de las siguientes variables extrañas en el proceso de resolución de problemas algebraicos: la motivación, autoconfianza, comprensión lectora y organización de ideas.

Respecto a la matriz de triangulación de los resultados de la variable transformación semiótica, se presentan en la siguiente tabla,

Tabla 83. Matriz de triangulación de la variable transformación semiótica

Tipo de comparación / Hallazgos	Hallazgos cuantitativos	Hallazgos cualitativos
Semejanzas	Los factores que inciden significativamente en el nivel de la variable transformación semiótica son: modelación con notación algebraica y razonamiento hipotético inductivo-deductivo-creativo; y razonamiento interpretativo, argumentativo y modelativo con notación algebraica. Casi la mitad de los estudiantes está en un nivel bajo; casi la tercera parte restante, en nivel medio y casi la quinta parte, en nivel alto. la media global de la variable con 2,2829, que corresponde a un nivel bajo. No existen diferencias significativas en las medias de la variable transformación semiótica a nivel interinstitucional.	Existen vacíos conceptuales y asociaciones reduccionistas en los procesos argumentativos propios de las transformaciones de conversión y tratamiento. Restringen algunos objetos matemáticos a una o algunas representaciones. Existe una estrecha relación entre la comprensión de los axiomas y propiedades y el tratamiento de ecuaciones de la forma Ax + B= C. Se encontraron falencias en relación con la conversión semiótica del registro natural o verbal al algebraico, y en el tratamiento de ecuaciones de tipo Ax+B=Cx+D, particularmente en la transposición de términos, operaciones con enteros y justificación de procesos.
Diferencias/complementos	En el nivel II de algebrización casi la mitad está en un nivel bajo, y casi la cuarta parte, en nivel medio y otra cuarta parte, en nivel alto. El nivel de algebrización III cuenta con un mayor porcentaje relativo de estudiantes en el nivel alto, simultáneamente, presenta la media más baja de todas las subvariables.	Los estudiantes usan las representaciones que les son familiares y que en ocasiones anteriores les han resultado exitosas. Existen falencias en la comprensión lectora, dado que las respuestas son incoherentes con lo planteado. Tendencia a utilizar, de forma rígida, un solo método para revisar sus propios procesos ejecutivos.
Variables extrañas o intervinientes	La motivación, autoconfianza, comprensión lectora, organización lógica de ideas	

Fuente: autor (2022)

En la matriz anterior, las semejanzas observadas en los resultados, tanto por el método cuantitativo, como por el cualitativo, muestran un bajo desempeño en el nivel de la variable transformación semiótica en la mayoría de los estudiantes, con una media de 2,2829, sin diferencias significativas entre instituciones educativas. Descriptivamente, este bajo nivel está determinado por los vacíos epistémicos en el razonamiento hipotético

inductivo-deductivo-creativo, que permiten procesos de interpretación, argumentación, modelación y de tipo notacional, relacionado con las marcas ostensivas algebraicas, convenidas institucionalmente. Esto hace que las funciones semióticas de tipo argumentativo, para la conversión semiótica sean reducidas y, por tanto, los procesos de modelación y tratamiento de ecuaciones de la forma Ax+B=C o Ax+B=Cx+D; presenten saltos o discontinuidades epistémicas desde el sistema numérico, conceptos y relaciones numéricas referente a las propiedades, hasta la presencia de aspectos notacionales y marcas ostensivas asociadas a estos, que limitan las habilidades de resolución.

Respecto a las diferencias/complementos, en los resultados cuantitativos se encontró que existe un mayor porcentaje relativo de estudiantes en las subvariables nivel de algebrización II y III. No obstante, en la última se presenta la media más baja de todas las subvariables.

En relación con las diferencias respecto a los resultados cualitativos, se encontró la rigidez en los procesos de transformación semiótica, por lo que prevalecen las representaciones semióticas utilizadas en otros problemas, sin una mediación objetiva que justifique su transferencia. Además, el proceso de comprensión lectora revela incoherencias, así como la organización de ideas. Por último, se encontraron las siguientes variables extrañas en el proceso de resolución de problemas algebraicos: la motivación, autoconfianza, comprensión lectora y organización de ideas.

4. Discusión de los Resultados y Contrastación/Teorización

Por el método cuantitativo se discuten los resultados de las variables, y, por el lado cualitativo se contrastan los resultados. Posteriormente, con base en la triangulación de los datos cuantitativos y cualitativos se realiza una reconstrucción analítica, de la que se propone un constructo teórico, para comprender mejor la estructura de las variables de análisis en la resolución de problemas algebraicos.

4.1. Discusión de los Resultados

PREPRINT

4.1.1. Saberes previos

A partir de los resultados, se determinó que existe una correlación inversa entre el nivel de saberes previos y el número de estudiantes que lo posee, lo cual complementa las investigaciones educativas de Schoenfeld (citado en Barrantes, 2006) dado que este solo llegó a concluir que la mayoría de los estudiantes tienden a estar en nivel bajo. Lo anterior, sumado a la homogeneidad en la puntuación baja del nivel de la variable, a nivel interinstitucional, supone una continuidad de la tendencia de los resultados de las instituciones participantes, publicados en el ICFES (2018); MEN (2018) y permite colegir que los estudiantes, 4 años después, aún continúan en la tendencia de estar en nivel bajo.

Sobre las causas de este bajo rendimiento, los aspectos medulares de los saberes previos que menciona Godino et al. (2015), Duval (2012); Vergnaud (2016) coinciden con los factores encontrados a partir del análisis cuantitativo, lo que prueba que el bajo rendimiento de los estudiantes a nivel general, en la variable saberes previos está íntimamente relacionado con falencias en los procesos cognoscitivos transicionales desde el concepto de número hasta el razonamiento protoalgebraico.

Adicionalmente, la subvariable definiciones y operaciones tuvo un comportamiento atípico en la media, que fue significativamente mayor entre las instituciones educativas, en relación con el comportamiento de la variable general y el resto de las subvariables. Esto constata la tendencia encontrada en los resultados publicados por el ICFES (2018) y MEN (2018), que muestran que la mayoría de los estudiantes domina dichos conocimientos básicos. Además, prueba la afirmación de García et al. (2012) quienes mencionaron que es común encontrar que los estudiantes tengan cierto dominio de operaciones aritméticas, aunque no comprendan de fondo los argumentos y conceptos que justifican sus procedimientos algorítmicos.

4.1.2. Estrategias metacognitivas

A partir de los resultados, se concluye que existe una fuerte correlación inversa entre el nivel de estrategias metacognitivas y el número de estudiantes que se ubican en dicho nivel, lo cual complementa las investigaciones educativas de Rodríguez (2005);

Gusmao (2006); Osses y Jaramillo (2008). Lo anterior, sumado a la homogeneidad en la puntuación baja del nivel de la variable, a nivel interinstitucional, supone una continuidad de la tendencia de los resultados de las instituciones participantes, publicados en la tesis doctoral de Gusmao (2006); Martínez, Sánchez y Pizarro (2020) y permite colegir que los estudiantes, 4 años después, aún continúan en la tendencia de estar en nivel bajo.

Sobre las causas de este bajo rendimiento, los aspectos medulares de las estrategias metacognitivas que mencionan Gutiérrez y Vargas (2020); Troncoso(2013) y Pupo(2011) coinciden con los factores encontrados a partir del análisis cuantitativo, lo que prueba que el bajo rendimiento de los estudiantes a nivel general, en la variable estrategias metacognitivas está íntimamente relacionado con las falencias en los procesos regulatorios en la planeación, procesos de planeación en la regulación, procesos regulatorios en la evaluación, procesos evaluativos de la regulación, revisión de procesos ejecutivos, articulación de tareas proyectivas, de revisión y valoración, evaluación de los procesos de planeación y planeación del proceso de evaluación. Dado que los aspectos mencionados parecen hacer referencia a permutaciones de las subvariables de la variable estrategias metacognitivas, se conjetura que todas están epistémicamente contenidas en sí mismas y en el resto, como si las actividades de las subvariables fueran codependientes entre sí, es decir, no pueden entenderse ni estudiarse sin implicar procedimental o conceptualmente las demás, al estilo de una Gestalt. Sin embargo, sobre esto no se encontró referencia en las investigaciones precedentes ni en las teorías relacionadas.

Adicionalmente, las subvariables regulación y evaluación tuvieron un comportamiento atípico en la media, que fue, esencialmente heterogénea, aunque en el mismo nivel bajo, a nivel interinstitucional, respecto al comportamiento de la variable general y el resto de las subvariables. A partir de este resultado, se puede conjeturar que dichos procesos tienden a desarrollarse de formas esencialmente distintas entre los individuos, pero indistinguibles, desde el nivel en que se ubican, lo cual no tiene relación con ninguna de las investigaciones precedentes ni con teorías generales o sustantivas. No obstante, sobre la subvariable planeación, cuyo desempeño fue estadísticamente más estable a nivel interinstitucional, Moreno y Daza (2014) y Martínez, Sánchez y Pizarro (2020), mencionan que tiende a ser la mejor puntuada y más ejecutada de las subvariables metacognitivas. A pesar de ello, con base en los resultados de la presente investigación, la

subvariable planeación fue la de media más baja, respecto a la variable estrategias metacognitivas, lo cual contradice las conclusiones de las investigaciones previamente citadas.

4.1.3. Transformación semiótica

La mayoría de los estudiantes se ubica en un nivel bajo en la variable transformación semiótica y la minoría, un alto nivel (Schoenfeld, citado en Barrantes, 2006). Incluso, existe una correlación inversa entre el nivel de saberes previos y el número de estudiantes que lo posee, lo cual complementa las investigaciones educativas de Schoenfeld (citado en Barrantes, 2006). Lo anterior, sumado a la homogeneidad en la puntuación baja del nivel de la variable, a nivel interinstitucional, supone una continuidad de la tendencia de los resultados de las instituciones participantes, publicados en el ICFES (2018) y permite colegir que los estudiantes, 4 años después, aún continúan en la tendencia de estar en nivel bajo.

Sobre las causas de este bajo rendimiento, los aspectos medulares de la variable transformación semiótica que mencionan Godino et al. (2015), Duval (2012); Vergnaud (2016) coinciden con los factores encontrados a partir del análisis cuantitativo, lo que prueba que el bajo rendimiento de los estudiantes a nivel general, en la variable transformación semiótica está íntimamente relacionado con el razonamiento hipotético inductivo-deductivo-creativo y el razonamiento interpretativo, argumentativo y modelativo con notación algebraica.

Adicionalmente, las subvariables nivel de algebrización II y nivel de algebrización III tuvieron un comportamiento estadísticamente atípico referente al mayor porcentaje relativo de estudiantes en nivel alto, cada una, respecto a la variable metacognición y saberes previos, así como sus subvariables. De hecho, se esperaba que el porcentaje relativo de estudiantes en alto fuera similar al de la subvariable noción algebraica de la variable saberes previos, dado que la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, señala que existe una relación conceptual entre los objetos epistémicamente antecesores de los procesos algebraicos, es decir, los protoalgebraicos (Vergnaud, 2016). No obstante, este resultado atípico parece tener sentido con base en el planteamiento teórico de Duval (2012);

D`Amore (2012) y Godino et al. (2015), quienes explican que es posible encontrar estudiantes que aplican reglas sintácticas de manipulación de entidades algebraicas, incluso, sin comprender el origen epistémico de las mismas. Esta explicación cobra sentido, si se tiene en cuenta que la subvariable nivel de algebrización III tuvo la media más baja de todas las subvariables y variables restantes.

Por último, el modelo de regresión lineal T= 1,004M, que muestra la dependencia de la transformación semiótica frente a la metacognición, revela que existe una relación prácticamente de identidad entre ambas variables, es decir, el desempeño en la variable estrategias metacognitivas, es significativamente idéntico(con una diferencia de -0,04 unidades respecto a la transformación semiótica, por cada unidad adicional en la variable estrategias metacognitivas) al de la variable transformación semiótica, esta última, íntimamente ligada a los avances progresivos en la resolución de problemas algebraicos (Zambrano, 2008). Estos resultados, son una evidencia adicional a los planteamientos teóricos de Ricaldi (2013); Di Barbaro, et al. (2015); Núñez (2017) y Castro (2017). Por tanto, prueban que las estrategias metacognitivas influyen de forma contundente y superlativa en la resolución de problemas algebraicos (Huaynaso, Verónica & Mendoza, 2018; Martínez et al., 2020).

4.2. Contrastación y Teorización de los resultados

4.2.1. Saberes previos

Respecto a la subcategoría axiomas y propiedades de los R, se puede afirmar que la ausencia de la aplicación procedimental de axiomas y propiedades, en la reducción de expresiones aritméticas y su reemplazo por procedimientos intuitivos se debe a que los estudiantes poseen en su estructura cognitiva cuasi conceptos o conceptos que todavía dependen de la situación que los originó y que sostienen sus argumentos. Esto contribuye a explicar las conclusiones los estudios investigativos de Schoenfeld (citado en Barrantes, 2006) y García et al. (2012), sobre la poca evidencia práctica del sentido de las propiedades en los procesos operacionales de los estudiantes. Además, es coherente con la trazabilidad conceptual propuesta por Lausmeier (citado en D´Amore, 2012) y Vergnaud (2016) que

comprende los siguientes estadios: concreto, identidad, clasificación y formal, donde, por lo general, el estudiante se encuentra en los primeros tres estadios.

De otro lado, en el caso de los estudiantes que sí tienen nociones de las propiedades de los R, predominan creencias relacionadas con la existencia de solo una respuesta correcta, rapidez del proceso resolutivo, proceso basado en aplicar fórmulas y que el profesor tiene la última palabra. Esto apoya la descripción de las creencias de los estudiantes frente a los axiomas y propiedades en R, que caracterizo Schoenfeld (citado en Barrantes, 2006) en su programa de investigación educativa. Esta creencia en torno a una única respuesta correcta se relaciona con el condicionamiento que hacen de la igualdad a una sola representación de la misma, lo cual es una evidencia de la confusión del objeto, con su representación semiótica, indicada por Duval (2012), en su teoría de registros de representación semiótica.

En relación con la subcategoría operaciones y definiciones en R se puede inferir que, aunque los estudiantes dominan las operaciones básicas como la suma, resta, multiplicación y división, algunos estudiantes desconocen algunos aspectos procedimentales, poseen incorrecciones en la realización de operaciones con los reales. Esto apoya las conclusiones de los estudios de Esquivel, Araya y Sánchez (2008) y Duval (2012), quienes encontraron respuestas satisfactorias en los aspectos operacionales de la aritmética, en la mayoría de los estudiantes.

No obstante, dichos estudiantes que dominan las operaciones básicas básicamente repiten un procedimiento algorítmico, es decir, no comprenden el sentido lógico de los algoritmos, sino nemotécnico, tal como lo mencionó García et al. (2012).

Asimismo, en aquellos que no dominan dichas operaciones, además de no comprender el sentido lógico o conceptos fundantes de estas, tampoco saben cómo realizar la manipulación propiamente algorítmica. Esto se debe, en sus propias palabras, a la ausencia de una formación escolar relacionada con significados o sentido de las operaciones, más que con el proceso ejecutivo mismo, lo cual apoya la referencia de Duval (2012) y Godino et al. (2015) sobre el hecho de que en la formación escolar adolece de ambientes didácticos que favorezcan la comprensión no ostensiva de los objetos matemáticos.

En cuanto a la subcategoría noción algebraica, se concluye que los estudiantes tienden a exaltar el resultado, por encima de los procesos que lo sustentan, dado que no tienen una cultura argumentativa, demostrativa y de justificación. A su vez, esta falencia podría estar relacionada con otras, de tipo metacognitivo, que serían fundamentales en la justificación o evaluación de procedimientos y procesos (Ricaldi, 2013).

De hecho, las falencias de tipo metacognitivo podrían explicar, en parte, el hecho de que los estudiantes no realicen actividades cognitivas vinculadas a la inducción y deducción con objetos proto algebraicos, lo cual se fundamenta en los planteamientos teóricos de Godino et al. (2015), referidos a las brechas o discontinuidades en la secuencia de configuraciones que integran los recorridos epistémicos de los respectivos procesos de análisis.

A pesar de que las concepciones proto algebraicas de los estudiantes se fundamentan en situaciones de referencia, y, teniendo en cuenta de que su capacidad de observación, reconocimiento, descripción y análisis para trascender la información de dichas situaciones no se ha desarrollado de forma óptima, es lógico concluir que los estudiantes poseen dificultades para los procesos de inductivos, propios del razonamiento proto algebraico, lo que podría explicar las dificultades en las transformaciones de conversión, que identificó Duval (2012) en sus investigaciones.

Además, en los casos en que utilizan adecuadamente las reglas sintácticas de manipulación de entidades proto algebraicas, se puede inferir que no comprenden el origen epistémico de las mismas, es decir, no entienden su sentido lógico. Esto es más visible cuando no utilizan dichas reglas sintácticas adecuadamente, ya que tratan por igual términos generalizados y términos de valor conocido. Lo anterior complementa a nivel conceptual los niveles de algebrización de Godino et al. (2015), dado que relaciona la manipulación simbólica, definitoria de cada nivel, con los procesos de razonamiento y conceptualización que la explican. Esto implica que se debe construir una didáctica basada en la coherencia conceptual, a través de razonamientos sobre objetos aritméticos, para el desarrollo de la noción algebraica. De hecho, esto se fundamenta, a nivel teórico, en los planteamientos de Vergnaud (1990) y D`Amore (2012), quienes mencionan que el aprendizaje ideal es el que se representa a través de redes conceptuales, en las que cada aprendizaje nuevo esta interrelacionado con los que el sujeto ya posee.

Por último, se infiere que los estudiantes presentan falencias en la comprensión del lenguaje, dado que las respuestas, y, por tanto, sus razonamientos, son incoherentes con lo que se indaga en la pregunta. Al respecto, no se encontró información en las investigaciones y teorías precedentes.

4.2.2. Estrategias metacognitivas

En relación con los procesos de planeación, se infiere que no existen procesos de accesibilidad y organización de recursos cognitivos, sino que, en la interpretación de cierto problema, parecen adquirir nitidez cognitiva aquellos que serán los primeros en ser utilizados. Esta conducta cognitiva es propia del estadio de identidad, en la trazabilidad de la formación conceptual, al interior de las redes cognoscitivas (Vergnaud, 2016).

Además, el hecho de que los estudiantes consulten información a otras personas y traten de utilizar el enfoque analítico de la planeación resolutiva, enfatiza los resultados encontrados en la investigación de Rojas (2010); Pupo (2011), así como Gil y Mercado (2019), sobre la naturalidad del dialogo y debate en los procesos de selección de información, así como la recopilación de heurísticas de Descartes, retomada por Rodríguez (2005) entre las que menciona la división del problema, por partes.

Adicionalmente, se concluye que los estudiantes construyen sus propias marcas lingüísticas, influenciados por la experiencia y la formación escolar en los problemas algebraicos, para evocar fácilmente experiencias, razonamientos, o procedimientos que les han sido útiles y transferirlos productivamente a la nueva situación. Esto apoya la teoría asociacionista del conductismo, la cual plantea que toda conducta por compleja que sea, es reductible a una serie de asociaciones entre elementos simples" (Ardila, 2013). Además, encaja en el condicionamiento clásico de Pavlov (citado en Pellón, 2013) cuya premisa fundamental menciona que "el aprendizaje es memorístico, repetitivo y mecánico, se aprende asociando estímulos con respuestas" (p. 390). En este caso, cada vez que el estudiante percibe que cierto razonamiento, concepto, argumento o procedimiento le fue útil, implica para él, un refuerzo adicional.

No obstante, también es cierto que muchos estudiantes no conocen, mucho menos, aplican procesos cognitivos de planeación en el proceso ejecutivo. Esto coincide con las

conclusiones de la investigación realizada por Williams y Gómez (2007) en la que encontraron que muchos estudiantes no usan estrategias cognitivas y metacognitivas conscientes para controlar sus propias creencias u orientación frente al problema.

Incluso, en la puesta en contexto de un problema determinado, se observó que algunos estudiantes creen en la influencia de un ser sobrenatural en su proceso de planeación, creencia sobre las que no existe referencia en investigaciones y teorías descritas en el marco teórico y antecedentes.

De hecho, los estudiantes poseen argumentos muy generales y pobres conceptualmente para describir su propio proceso de planeación. Vergnaud (2016) explica que dicho fenómeno se debe a que poseen redes conceptuales pobres, que limitan la descripción y las representaciones semióticas de los estudiantes de un objeto matemático. No obstante, dicha respuesta también puede revelar que no se le concede la debida importancia de la argumentación de procesos introspectivos.

Por último, se concluyó que los estudiantes poseen falencias en la comprensión lectora, dado que las respuestas son incoherentes con lo planteado. Sobre esto no se encontró información en las investigaciones y teorías descritas en el marco teórico y antecedentes.

Sobre el proceso de regulación, los estudiantes realizan descripciones muy generales de sus procesos regulatorios. Este resultado es apoyado por los planteamientos teóricos de Godino et al. (2015), referidos a las brechas o discontinuidades en la secuencia de configuraciones que integran los recorridos epistémicos de los respectivos procesos de análisis protoalgebraico. Incluso, algunos que sí realizan procesos regulatorios, justifican incoherentemente la pregunta, lo que evidencia falencias en la comprensión lectora. Sobre este tipo de falencia, no se encontró información en las investigaciones y teorías descritas en el marco teórico y antecedentes.

Otros estudiantes tienden a utilizar, de forma rígida, un solo método para revisar sus propios procesos ejecutivos, evidencia que se suma a la conclusión teórica de Schoenfeld (citado en Barrantes, 2006), cuando menciona que los estudiantes tienden a asumir un método de resolución como único, la concepción memorística y mecánica de las matemáticas y la rapidez de resolución.

En ese sentido, el método que utilizan los estudiantes para la revisión ejecutiva es el tanteo o la subdivisión en subproblemas, lo cual apoya los planteamientos de Rodríguez et al. (2015), quienes sostienen que los procesos de revisión de procesos, de resignificación conceptual ocurren tras una serie de ensayos y errores o análisis.

También se puede afirmar que algunas de las variables extrañas que afectaron la calidad de los procesos regulatorios fueron la motivación y la autoconfianza. Este resultado que apoya el planteamiento teórico de Prieto (2015) quien influyen en la calidad de la respuesta del individuo, es decir, no solo entran en juego aspectos disciplinares, sino, emocionales referidos a los incentivos suficientes y la autopercepción en cuanto conocimiento, como para sentirse impulsado a llevarla a cabo.

Otro aspecto fundamental en los procesos regulatorios lo constituye el trabajo en equipo y la influencia de las apreciaciones de los compañeros sobre la forma en que realizan dichos procesos. Esta es, precisamente una de las conclusiones de la investigación de Rojas (2010); Pupo (2011), así como Gil y Mercado (2019), quienes encontraron la relevancia del dialogo crítico del pensamiento entre pares, para la autorregulación.

Además, se infiere que los estudiantes monitorean principalmente los errores de cálculo, e ignoran el control del plan o estrategia. La explicación a esta falencia podría estar relacionada con otras, de tipo metacognitivo, que les impiden hacer consciencia de sus procesos que ejecutan en un momento dado, pero sí de los productos de dichos procesos (Ricaldi, 2013).

Respecto a los procesos de evaluación, se encontró que algunos estudiantes piensan que estos no son necesarios, dado que confían en las fórmulas y en los docentes. Este resultado apoya el encontrado por (Schoenfeld, citado en Barrantes, 2006), ya que este investigador encontró la predominancia de la concepción y creencias sobre las matemáticas como un recetario de fórmulas que están correctas, por la autoridad que representa el docente.

También, se evidenció la creencia en la relatividad de los procedimientos correctos, en el sentido en que la verdad de un resultado no es absoluta, sino que descansa en la perspectiva del observador, a lo cual no se le encontró precedente en las investigaciones de los antecedentes y en el marco teórico.

Asimismo, se evidencian justificaciones incoherentes con la pregunta, lo que evidencia falencias en la comprensión lectora. Sobre dichas incoherencias en la comprensión, no se encontró información relacionada en los antecedentes investigativos y marco teórico.

Por último, algunos estudiantes evalúan colectivamente sus propios procesos ejecutivos, verificando la respuesta con el enunciado, lo que apoya a los resultados de las investigaciones de Rojas (2010); Pupo (2011), así como Gil y Mercado (2019), quienes encontraron la relevancia de las conversaciones entre compañeros de clase, para la valoración de juicios, razonamientos y procesos que utilizaron.

4.2.3. Transformación Semiótica

En relación con la subcategoría nivel de algebrización I, se concluye que los estudiantes, en su mayoría poseen vacíos conceptuales y asociaciones reduccionistas en los procesos argumentativos propios de las transformaciones de conversión y tratamiento, lo cual concuerda con las investigaciones educativas de Schoenfeld (citado en Mejía & Londoño, 2017); Godino y Font (2003); Duval (2012) y Vergnaud (2016).

Además, cuando se les habla de representar gráficamente la información, lo asocian únicamente con el ámbito estadístico, donde han utilizado el término, es decir, son monorregistros. Por tanto, se concluye que esto puede ser una consecuencia de la forma en que se enseñan los objetos matemáticos en las instituciones educativas o en creencias generadas por ellos mismos, según la explicación que da Duval (2012) y Schoenfeld (citado en Mejía & Londoño, 2017).

De manera similar a las estrategias metacognitivas, se infiere que los estudiantes usan las representaciones que les son familiares y que en ocasiones anteriores les han resultado exitosas, hecho que apoya la teoría asociacionista del conductismo, específicamente el condicionamiento clásico de Pavlov (citado en Pellón, 2013) cuya premisa fundamental menciona que “el aprendizaje es memorístico, repetitivo y mecánico, se aprende asociando estímulos con respuestas” (p. 390).

Respecto a la subvariable nivel de algebrización II, existe una estrecha relación entre la comprensión de los axiomas y propiedades y el tratamiento de ecuaciones de la

forma Ax + B= C. Esto apoya la teoría de campos conceptuales de Vergnaud (2016), en el sentido de que coinciden en la necesidad de encontrar los fundamentos de toda acción o conducta resolutiva en las redes conceptuales del sujeto. (Godino et al., 2015). Además, en el proceso resolutivo de ecuaciones se observan predominantemente dos sentidos de la variable: como incógnita y número generalizado, lo cual enfatiza lo planteado por investigaciones relacionadas (Godino & Font, 2003). Por último, algunos estudiantes tienden a inventar reglas de tratamiento de ecuaciones, con el fin de subsanar sus vacíos conceptuales y deficiencias en la transformación semiótica (Alan Schoenfeld, citado en Mejía & Londoño, 2017).

Ahora bien, respecto al nivel de algebrización III, los estudiantes presentan falencias en relación con la conversión semiótica del registro natural o verbal al algebraico, y en el tratamiento de ecuaciones de tipo Ax+B=Cx+D, particularmente en la transposición donde se operan coeficientes con variables. Una explicación de lo anterior la otorga Pérez y Aylwin (2011) quienes plantean que, por lo general, las falencias en el tratamiento semiótico de expresiones y ecuaciones algebraicas tienen su origen, precisamente en su comprensión de las propiedades de la igualdad y de los números reales, aplicadas a las ecuaciones. Como complemento de lo anterior, Blanton y Kaput (2011) plantea que "dado que las letras y los números se ajustan a diferentes reglas, causan dificultades a los estudiantes" (p.24).

De hecho, algunos estudiantes realizan procesos de conversión del problema algebraico expresado en lenguaje natural, con base en expresiones que consideran claves y son asociadas con ciertas representaciones en lenguaje algebraico. Este hallazgo apoya la teoría asociacionista del conductismo, la cual plantea que toda conducta por compleja que sea, es reductible a una serie de asociaciones entre elementos simples" (Ardila, 2013).

Incluso, este asociacionismo es fuerte e implica aspectos emocionales, de modo que la actividad cognitiva sobre los objetos algebraicos, incluso, disponiéndose de una red conceptual asociada a estos, se tiende a dejarse llevar por procedimientos, argumentos o conceptos emergentes por impresiones o por asociaciones reforzadas. Lo anterior clarifica los planteamientos teóricos de Becerra, Buitrago y Calderón (2017), así como Assuero (2020) quienes mencionaron el ser humano tiene cierto uso predilecto del pensamiento reproductivo, dado que es cognitivamente menos costoso y más fácil. De hecho, para

contrarrestar dicha tendencia, Blanton y Kaput (2011) sugieren que todo aprendizaje debe desarrollarse, no de forma memorística, sino, inferencial, a partir de objetos de conocimiento previamente apropiados por el estudiante, para que se ejercite y culturice, tanto el pensamiento reproductivo, como el pensamiento productivo en el ambiente escolar.

4.3. Síntesis De La Discusión y Contrastación Teórica

Desde una mirada integradora de las discusiones en torno a los resultados de las variables/categorías, con el análisis plurimetódico, se interpreta que las variables saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica tienen en sus aspectos analíticos procesos cognitivos comunes, que al momento de resignificarlos y sintetizarlos, es posible encontrar que estas tres variables constituyen una totalidad, un sistema sinérgico, articulado entre sí, similar a una Gestalt, en la resolución de problemas algebraicos. De esta manera, la inducción de esta estructura o esquema cognoscitivo supone una convergencia conceptual con la teoría de los esquemas de Rumelhart (citado en Veloz et al., 2020).

Al respecto, algunos autores ya hacen ciertas referencias a los esquemas cognoscitivos, cuando mencionan que los conceptos están representados a través de redes conceptuales, donde cada aprendizaje nuevo esta interrelacionado con conceptos anteriores (Ausubel, citado en Zapata, 2013; Vergnaud, 2016; Rumelhart, citado en Veloz et al., 2020). De esta manera, estos conceptos poseen una trazabilidad epistémica propuesta por Lausmeier (citado en D´Amore, 2012) y Vergnaud (2016) que en su estado ideal comprende los siguientes estadios: concreto, identidad, clasificación y formal, de forma que aprehender un concepto implica aprender toda su red epistémica, desde las experiencias iniciales hasta la abstracción de las mismas.

En relación con los conceptos algebraicos, este esquema cognoscitivo debe evidenciar la trazabilidad conceptual desde las experiencias y el sentido intuitivo de número hasta la resolución de problemas algebraicos, como una red conceptual lógica que comprenda, entre otras, la relación entre el concepto de número, construcción de sistemas numéricos, operadores, propiedades, razonamiento deductivo-inductivo, hipotético-creativo, que permita el progreso conceptual natural hacia la competencia algebraica. Asimismo, se requiere asociar en dicho esquema las distintas representaciones en otros

registros de los conceptos construidos, así como con las convenciones algebraicas establecidas institucionalmente, que le permitan al estudiante, por ejemplo, modelar problemas algebraicos, realizar conversiones semióticas a conveniencia en los distintos registros semióticos (Duval, 2012), aplicar tratamiento a ecuaciones de la forma Ax + B= C, y de tipo Ax+B=Cx+D, incluso, con posibilidad de ampliarlas conceptualmente.

No obstante, los estudiantes poseen en su estructura cognitiva cuasi conceptos o conceptos que todavía dependen de la situación que los originó y que sostienen sus argumentos, o con relaciones no institucionales o parciales, incluso, sin un constructo (ausencia, dominio operacional y sintáctico, no conceptual, argumentos pobres, baja comprensión lectora, incoherencias en redacción). Al abordar un problema, identifican y asocian (influenciados por la experiencia y la formación escolar en los problemas algebraicos) las marcas lingüísticas, a experiencias, razonamientos, o procedimientos que les han sido útiles y transferirlos productivamente a la nueva situación.

Las causas de esto se relacionan, por un lado, con la ausencia de una formación escolar relacionada con significados o sentido de las operaciones, más que con el proceso ejecutivo mismo, lo cual apoya la referencia de Duval (2012) y Godino et al. (2015). necesidad de encontrar los fundamentos de toda acción o conducta resolutiva en las redes conceptuales del sujeto. (Godino et al., 2015). Por otro lado, en la formación escolar se deja de lado que toda la actividad cognitiva del esquema cognoscitivo se ve afectada por la motivación y la autoconfianza del sujeto, de manera que se convierte en una condición necesaria, aunque no suficiente, para la resolución de problemas algebraicos. De esta manera, en el siguiente apartado se realiza un análisis en profundidad de las características epistémicas de dicho esquema cognoscitivo y algunas reflexiones conjeturales.

4.3.1. Reconstrucción conceptual de los esquemas cognoscitivos en la resolución de problemas algebraicos

Con base en la discusión de los resultados de campo de la presente investigación, puede concluirse que los saberes previos, las estrategias metacognitivas y la transformación semiótica se comprenden mejor como estructuras o esquemas cognoscitivos (Rumelhart, citado en Giudici, 2019). Por ello, en adelante se analiza dicho constructo, la forma en que

integra sustancialmente las estrategias metacognitivas y su relación con la resolución de problemas algebraicos.

En ese orden de ideas, se realiza un análisis comprensivo sobre qué implica el dominio del álgebra escolar, se hace una reclasificación en niveles de competencia algebraica y se contrasta con los propuestos por Godino et al. (2015). Con base en ello, se realiza una reinterpretación del proceso de resolución de problemas matemáticos como una construcción y reconstrucción de esquemas cognoscitivos, a modo de aporte teórico para la unificación de ciertas teorías psicológicas que explican la resolución de problemas, tales como la teoría de la Gestalt, teoría Conductista y teoría Cognitiva, así como teorías sustantivas como el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e instrucción matemática, la teoría de registros de representación semiótica, la Teoría de los campos conceptuales, la Teoría de los esquemas. Con base en lo anterior se propone un aporte complementario al método de Pólya y, finalmente, se plantea una conjetura teórica sobre un esquema cognoscitivo ideal, tal que represente el máximo potencial de conocimiento alcanzable por el ser humano, así como aspectos pendientes en prospectiva por investigar.

4.3.1.1.¿Que implica la competencia algebraica? ¿Razonamiento o dominio de un sistema notacional convenido?

Con base en las teorías generales y sustantivas de la presente investigación, así como en los análisis de los resultados en las categorías de análisis, la competencia algebraica implica construir la trazabilidad procedimental y conceptual de la misma, desde los primeros años de escolaridad, donde ocurre el primer acercamiento a objetos numéricos, su representación conceptual y los usos procedimentales (D´ Amore, 2012; Vergnaud, 2016; Rumelhart, citado en Giudici, 2019).

Así, en primer lugar, el desarrollo de la competencia algebraica (sin incluir objetos geométricos) parte de la concepción del número (en primer lugar, el número natural), las relaciones numéricas(igual, mayor que, menor que), los operadores (inicialmente de forma intuitiva y, posteriormente, en sentido formal, así como sus diversas representaciones), empezando por la suma y la forma en que se construyen, secuencialmente, la resta, multiplicación, división, potenciación, radicación, logaritmación y las marcas lingüístico-

aritméticas que los representan; la jerarquía de operadores como un resultado lógico y la construcción de conjuntos numéricos adicionales, dadas las limitaciones operacionales en el conjunto de los naturales.

En ese sentido, es en los estadios de la competencia algebraica, en campos conceptuales delimitados, donde es posible apreciar las transformaciones semióticas. Por ejemplo, en el caso de la transformación de tratamiento se evidencia cuando se reescribe una operación en otra de menor o mayor jerarquía, se realizan operaciones entre conjuntos numéricos, y se reducen expresiones e igualdades aritméticas (Duval, 2012; Godino et al., 2015). Por otro lado, la transformación de conversión semiótica se evidencia al expresar una operación cualquiera mediante una situación en registro natural, pictórico o gráfico, incluso, concreto y viceversa (Duval, 2012; Godino et al., 2015; Vergnaud, 2016).

Hasta este punto, es evidente que, los primeros procesos cognoscitivos del desarrollo de la competencia algebraica implican procesos de especialización y generalización, construcción conceptual e hipótesis (D´Amore, 2012; Duval, 2016; Vergnaud, 1990; Godino et al., 2015).

En segundo lugar, con base en la apropiación del sentido del número, los operadores y las relaciones numéricas, se construyen las propiedades de los números reales, como generalizaciones, así como construcciones conceptuales de las regularidades procedimentales que presentan ciertas operaciones aritméticas. Por ejemplo, en las siguientes igualdades particulares: $3(1+2) = 3(1) + 3(2)$; $2(5+6) = 2(5) + 2(6)$, se observa un patrón posicional, en la medida en que los números que componen el miembro izquierdo ocupan ciertas posiciones correspondientes en el miembro derecho. Por tanto, es claro que la construcción de las propiedades de los números reales, implica la observación e inducción de una igualdad generalizada. Ahora bien, la conceptualización y nominalización de la misma, es la última etapa de la construcción de las propiedades y se constituye en un producto conceptual creativo, que sirve como marca lingüística para asociar casos particulares de donde se extrajo dicha propiedad y comprender nuevos casos particulares, con base en lo abstraído, lo que se conoce como deducción, así como la demostración de la justificación de la veracidad de una igualdad determinada con base en propiedad y el concepto construido.

Hasta este punto, puede afirmarse que el desarrollo de la competencia algebraica implica en su trazabilidad epistémica dos tipos de razonamiento inversos en el universo de los registros semióticos, a saber, deducción e inducción, así como el razonamiento constructivo-creativo, relacionado con la capacidad de abstraer conceptos, plantear problemas e hipotetizar o idealizar procesos resolutivos.

En tercer lugar, a medida que se avanza en el desarrollo de la competencia algebraica, estos tipos de razonamiento son cada vez más notorios. Por ejemplo, la deducción es contundente cuando, en la siguiente igualdad 3(1+2) = 3(1) +3(2), se supone, a modo de "planteamiento de un problema" el desconocimiento del valor de uno de los términos que la componen: 3(1+2) = 3(1) +3(?). Entonces, con base en el concepto de igualdad y propiedades de la misma, es posible encontrar dicho valor. No obstante, si se asume hipotéticamente la eliminación del miembro donde está la cantidad determinada, y, con ello, el sentido de equivalencia, quedaría la expresión 3(1) +3(?), sin ningún tipo de restricción para el valor de (?). Entonces, se infiere que las igualdades son casos particulares de expresiones o miembros con valores indeterminados (generales), que se vuelven determinados cuando adquieren un tipo de relación con otro objeto, o miembro. En síntesis, al definir la siguiente igualdad: 3(1+2)=3(1)+3(?) ya se predeterminó la expresión, mientras que si se concibe solamente el segundo miembro: 3(1)+3(?), la expresión (?) sería indeterminada, es decir, pueden evaluarse con todos los números, por lo que podría decirse que la construcción de relaciones entre dos expresiones(igual, mayor que o menor que) se trata de un caso de razonamiento deductivo, es decir, una construcción particular a partir de un caso general.

Para entenderlo mejor, puede suponerse que 3(1)+3(?) se evaluará con ciertos números. Si se tomasen los dígitos, cada vez que se evalúa se obtendría una igualdad distinta: 3(1)+3(?) = 3; 3(1)+3(?)= 6; 3(1)+3(?)= 9; 3(1)+3(?)= 12,…, 3(1)+3(?) =30. Cada una de dichas igualdades son casos particulares de la expresión 3(1)+3(?). Así, mientras que en cada igualdad el valor (?) está determinado (su valor está implícito en las propiedades de transformación de la igualdad), en la expresión 3(1) +3(?) aún no.

Ahora bien, si se tomase el conjunto de miembros determinados, es decir, 3, 6, 9, 12,…, 30, como punto de partida para obtener la expresión general, es decir, 3(1)+3(?), el tipo de razonamiento aplicado sería inductivo.

Entonces, el progreso epistémico de la competencia algebraica para la resolución de problemas algebraicos, hasta ahora, podría resumirse en el uso comprensivo del razonamiento hipotético inductivo, hipotético deductivo y creativo, que se evidencia en la comprensión y construcción del sentido indeterminado o general de expresiones (multivaluadas) y el carácter determinado o particular que adquieren al relacionarse (por igualdad o equivalencia, mayor o menor que) con otra expresión (univaluada), mediada por construcciones conceptuales que comienzan el planteamiento de asunciones hipotéticas.

Finalmente, el razonamiento hipotético, desde el aspecto inductivo, deductivo y creativo, parece adquirir nitidez sobre su correspondencia con el desarrollo de la competencia algebraica, cuando se aplican dichos tipos de razonamientos a expresiones e igualdades previamente tratadas, pero con una diferencia: la nominalización de conceptos y la notación utilizada para expresar reglas sintácticas. Así, el término desconocido que se representa con una letra, se le denomina variable o incógnita; el término que la multiplica o divide, coeficiente; la igualdad ahora se llama ecuación; a la aplicación de las propiedades de la igualdad se le llama transposición de términos. En este caso, la igualdad tratada en el párrafo anterior $3(1+2) = 3(1) +3(?)$, se reconvierte en $3x+3=9$, la cual es, sin duda, una ecuación con la resignificación nominal previamente descrita, pero con los sentidos conceptuales y procedimentales idénticos a las igualdades ya tratadas. Por ejemplo, en la expresión general $3x+3$ es evidente su sentido indeterminado (multivaluado), susceptible de determinarse al relacionarse con otra expresión o valor numérico, tal como se mencionó en los primeros casos tratados en este argumento analítico.

Llegado a este punto, en respuesta a la pregunta inicial de este apartado: ¿Qué implica la competencia algebraica escolar? ¿Razonamiento o dominio de un sistema notacional convenido?, por un lado, no se puede reducir el desarrollo de la competencia algebraica a un sistema notacional convenido, dado que la sintaxis actual del álgebra es una convención institucional, producto de la evolución semiótica en el transcurso de la historia de las matemáticas. Así, sería absurdo pensar que solo matemáticos de la edad antigua y moderna no habían desarrollado competencias en álgebra, solo por utilizar convenciones distintas a las de la actualidad. Además, el uso adecuado de la sintaxis algebraica de ninguna manera garantiza que se razona de forma algebraica, dado que son un lenguaje para expresar los resultados en un estadio conceptual consolidado, el cual se distancia

sustancialmente de los razonamientos que lo crearon. En ese sentido, se convierten en un puñado de reglas replicables mecánicamente, saltándose u omitiendo gran parte de tareas de los tipos de razonamientos, para fines netamente prácticos. En ese sentido, puede concluirse que el desarrollo de la competencia algebraica trasciende las reglas de transformación semiótica de expresión al interior de sus estadios conceptuales.

Por ello, la competencia algebraica no se restringe solo a los grados escolares donde se enseña su sistema notacional y reglas sintácticas, sino desde los grados iniciales, en los que, tal como se mencionó, se empieza a razonar con números desde su concepción intuitiva hasta su construcción formal, mediante la abstracción de sus propiedades derivadas. Desde esta perspectiva, las matemáticas de la educación inicial, así como las del nivel secundario *ya son y siempre han sido*, epistemológicamente, esencia de la competencia algebraica y, por tanto, del razonamiento algebraico. Lo que sí cambia es el lenguaje en que son comunicados los productos de dichos razonamientos.

En síntesis, la competencia algebraica implica los razonamientos hipotético inductivo, hipotético deductivo e hipotético conceptual, con el dominio de cierta nominalización y reglas de manipulación sintáctica institucionales.

No obstante, Godino et al. (2015), aunque se refiere al conocimiento algebraico como procesos de razonamiento, en sus cuatro niveles de algebrización evidencia una concepción eminentemente sintáctica, sin referencia clara a los tipos de razonamiento, como competencias fundamentales.

Para empezar, el nivel 0 de algebrización de Godino y Font (2003) concibe la realización de operaciones con números reales sin referencia simbólica, en la que omite la concepción misma del número, la construcción epistémica de su conceptualización, operadores, jerarquía de estos, reglas de operación propias del sistema de numeración decimal, relaciones numéricas y la construcción misma de los conjuntos numéricos. Aunque dichos constructos son la base del concepto de número y, por tanto, de la competencia algebraica, se obvian en el nivel 0, haciendo referencia, únicamente, a la realización de operaciones sin referente simbólico. Pero, si ese fuera el caso, entonces el sistema de numeración decimal, debería ser un nivel de algebrización mayor a 0, por ser un constructo simbólico. Asimismo, Godino y Font (2003) incluye en este nivel el uso de axiomas y propiedades de los números reales, desde su aprendizaje estructural u

operacional concreto; no funcional, como una generalidad (Godino & Batanero, 1994). No obstante, desde la perspectiva de esta investigación, las propiedades de los números reales son el producto del progreso paradigmático o analítico de las operaciones con números reales, mediante los tipos de razonamiento ya mencionados. Es decir, son una construcción analítica general, derivada de la percepción de regularidades en las operaciones aritméticas y conceptos creados, es decir, propiedades infebriles, por lo que puede decirse que tienen clara referencia simbólica y, por tanto, técnicamente no deberían ser del nivel 0.

Secuencialmente, Godino introduce el nivel I de algebrización para referirse al mismo como el reconocimiento explícito de la generalidad de objetos mediante los registros natural o verbal, numérico, icónico y gestual, en una notación distinta a la convencional, es decir, informal, pero, sin operar con ellos, con sus relaciones y propiedades (Sfard & Linchevski, citados en Godino, 2012; Godino, Batanero, Font & Giacomone, 2016). Lo anterior nuevamente deja en evidencia la predominancia sintáctica notacional y los procesos de generalización limitados al uso de dicha sintaxis en ciertos contextos y la obviedad de los tipos de razonamiento que hacen posible el alcance de dicho nivel I.

Por último, Godino se refiere a los niveles II y III de algebrización como el uso operacional de cantidades generales en la notación adecuada y con las reglas de manipulación correctas, pero con ciertas diferencias: en el nivel II, se plantea un modelo ligado a información de un problema particular, con ecuaciones son de la forma $Ax + B = C$, con A, B, C $\in$ R; A $\neq$ 0, sin llegar a una ecuación canónica (Godino, Batanero & Font, 2008); mientras que en el nivel III se resuelven ecuaciones de la forma $Ax + B = Cx + D$ con A, B, C $\in$ R; A $\neq$ 0, y se formulan reglas canónicas de expresión de funciones y patrones, más generales que los modelos aplicables a ciertos problemas particulares (Godino, Batanero & Font, 2008). No obstante, las reglas de manipulación para el tratamiento de dichas ecuaciones, hasta con incógnitas en ambos miembros, así como su expresión canónica, deben estar sustentados lógicamente en el progreso epistémico de la competencia algebraica, más que en el uso de ciertas reglas de manipulación notacional, puesto que, hasta un programa informático podría reconocerlas y aplicarlas con éxito, sin necesariamente conocer y, menos, comprender los razonamientos y conceptos que las sustentan.

En conclusión, los niveles de algebrización de Godino, corresponden a estados epistémicos del progreso de la competencia algebraica, que, por tener unas reglas de manipulación de la notación, propia de ese nivel, su uso correcto puede confundirse con las competencias del nivel mismo, el cual, en realidad incluye toda la trazabilidad epistémica del progreso algebraico hasta ese estadio. En ese sentido, las dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas algebraicos pueden deberse, no solo al desconocimiento de la notación y reglas de manipulación, sino, de forma más profunda, al desconocimiento de las formas de razonamiento que las derivan.

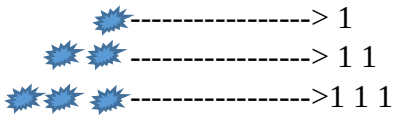
4.3.1.2. Identificación de las actividades procedimentales y regulatorias en el desarrollo de la competencia algebraica

En la educación inicial, durante el aprendizaje y apropiación del concepto de número, puede decirse que el primer problema es representar un objeto con un número. Teniendo en cuenta que el estudiante está en la etapa de operaciones concretas, dicho problema permite la asociación objeto concreto-número. No obstante, también puede interpretar el número en una situación de su contexto. Lo anterior, implícita el aprendizaje del *número*, aunque no se construya conscientemente un concepto del mismo, *una experiencia concreta y circunstancial que lo deriva* (*primera transformación semiótica*, *primera interpretación* y *primera actividad cognoscitiva procedimental)* para el problema dado. Los anteriores aprendizajes serán interiorizados en la medida en que se reapliquen con éxito en la solución de problemas similares al planteado. No obstante, en aras de continuar el progreso epistémico en la competencia algebraica, se necesitan otro tipo de actividades cognoscitivas que permitan analizar, cuestionar, evaluar, incluso, modificar los aprendizajes interiorizados, especialmente, las actividades cognoscitivas procedimentales, que, en primera instancia, orientan la resolución de un problema.

Estas actividades cognoscitivas que se necesitan para realizar modificaciones sutiles a los aprendizajes interiorizados, mediante la emergencia de la aplicación recurrente de los tipos de razonamiento ya abordados en la sección anterior, los cuales, generalmente comienzan con el planteamiento de nuevas preguntas sobre cierto objeto frente al sujeto. Por ejemplo, si un objeto concreto se representa con el número 1, agregar otro objeto igual,

¿cómo lo representaría?, De forma que si tiene dos objetos concretos, los asocie con dos unos

Figura 15. Correspondencia entre objetos y sus representaciones simbólicas



Fuente: autor (2022)

Dado que en este paso aún no se conocen los símbolos de los números, sino solo del 1, se pueden generar sucesivamente una serie de asociaciones de objetos con números, y pensar en las limitaciones que se tendrían para representar una cantidad grande de objetos con una serie de "unos". Esto evidencia que sobre las actividades cognoscitivas procedimentales (en este caso, la asociación continua de objetos iguales con su correspondiente de unos) es necesario un cuestionamiento conceptual propio del pensamiento creativo, definido en esta investigación como actividad conceptual regulatoria. Esta consiste en el uso del análisis de procedimientos, conceptos, con un enfoque hipotético y creativo, para construir entidades conceptuales que faciliten el abordaje de ciertos problemas (el caso de un nuevo sistema de numeración) y asignar convenciones a estas (por ejemplo, los símbolos que representan los números del sistema decimal: 1 1= 2,…,2 1= 3, hasta 8 1=9, las relaciones numéricas =,>,<; el 0, como la ausencia). Entonces, la ventaja más obvia de un constructo de este tipo es la posibilidad de operar grandes cantidades de una forma más sintética, es decir, la practicidad del conteo.

Pero, nuevamente se encuentra oportunidad de realizar un replanteo conceptual y procedimental, instrumentalizado mediante el planteamiento creativo hipotético-deductivo. Por ejemplo, al encontrar límites en la aplicación de cierto operador en determinado conjunto numérico, por ejemplo, la resta "1-2" en los números naturales, dado que es imposible, se concibe hipotéticamente un nuevo conjunto numérico, con sus respectivas convenciones y operadores que permiten hacer inferencias en ese nuevo conjunto.

En ese sentido, se evidencia que las actividades conceptuales regulatorias generan procedimientos, conceptos, razonamientos nuevos, los cuales permiten inferir información

propia del mismo marco conceptual. Por ejemplo, una vez construidas las propiedades de los números reales, mediante el razonamiento hipotético deductivo, los conceptos de las diferentes propiedades permitirán demostrar ejemplos particulares.

Pero, si algo es realmente contundente, es que las actividades conceptuales regulatorias son las que permiten darle sentido a situaciones. He aquí un ejemplo de estas: Imagine que falta una pieza en la demostración de 3(1+2) =3(1)+3(?). ¿Qué valor debe ir en (?) para que la igualdad sea cierta? De forma deductiva podría ser aplicando las propiedades de los R ya aprendidas. Ahora las actividades procedimentales conocidas cobran un nuevo sentido, y todo, gracias a las actividades conceptuales regulatorias.

En la igualdad anterior, el término (?) puede interpretarse como un valor desconocido, pero representado. En ese sentido, si la igualdad anterior correspondiese al modelo de un problema, donde se pide hallar un valor desconocido o valor final, desde una perspectiva conceptual, es decir, se está asumiendo a priori que se tiene el número que la cumple, y con él, se verifica una igualdad o modelo inicialmente planteado. Esto fue percibido por Pappus de Alejandría (citado en Embus & Reyna, 2014) y Cantoral (2014), como una técnica de solución consistente en asumir que se conoce y se trabaja desde ella hacia el inicio, hasta encontrarse con algo ya conocido o que se sabe verdadero, o identificar el objetivo y trata de deducir un estado precedente hacia el cual el objetivo pudo haber derivado, y así sucesivamente hacia atrás hasta llegar al planteamiento original del problema. En ese sentido, el descubrimiento de dicha técnica de solución sería una actividad procedimental, producto del análisis conceptual de la actividad conceptual regulatoria o metacognición. De hecho, este análisis regulatorio permite entender que se partió de la base de que el valor de (?) en la igualdad 3(1+2) =3(1)+3(?) está determinado, es decir, existe un único valor por el cual reemplazarlo. No obstante, si se pregunta ¿Qué pasaría si ese valor cambia?, por ejemplo, si fuera 2, 3, 1, 0, 4, etc., cada posible valor, generaría un resultado y, por supuesto, una igualdad diferente. Entonces, con dichos resultados, ¿sería posible llegar a la expresión de partida? Cuestiones como la anterior son posibles gracias a las actividades conceptuales regulatorias. Esto denota que el progreso de la competencia algebraica implica simultáneamente la competencia en la regulación de actividades procedimentales.

No obstante, aunque el progreso de la competencia algebraica escolar desde una perspectiva epistémica culmina, precisamente con los anteriores procesos cognoscitivos de generalización-particularización, desde una perspectiva institucional, falta un último paso: la apropiación de la sintaxis y notación algebraica establecida, es decir, la influencia del plano institucional del que habla Godino, cuando se crea la notación algebraica convenida. En esta última se le asignan marcas algebraicas y se consolidad las marcas en lenguaje natural, decir, se asocian los conceptos de variable, coeficiente, parte literal, constante, transposición de términos, es decir, el lenguaje especializado a actividades realizadas en el proceso de generalización-particularización.

Para finalizar, al interior de cada uno de los constructos conceptuales, nuevamente se evidencia el pensamiento creativo, en el tránsito entre las diferentes representaciones de expresiones y proposiciones de dichos constructos conceptuales en distintos registros (aritmético, algebraico, icónico, pictórico, gráfico) para enriquecer su sentido. En esa línea, expresiones del conjunto de los números naturales (por ejemplo: 1+2; 4^2); igualdades determinadas con un valor desconocido (por ejemplo: 3(1+2) =3(1) +3(?)); expresiones con la notación convencional algebraica (por ejemplo: 3x-7), pueden expresarse con representaciones propias del registro natural, como enunciado de problemas. Inversamente, la modelación (el proceso contrario a la construcción del enunciado problema) puede expresarse mediante la construcción de expresiones matemáticas, a partir del contenido semiótico de cierto enunciado. Aunque los ejemplos anteriores solo refieren a la conversión semiótica entre representaciones del registro aritmético o algebraico, al registro natural y viceversa, es posible realizar este proceso entre otros registros.

Por tanto, a continuación, se presenta una propuesta de niveles de competencia algebraica, en la que se redefinen los límites conceptuales-procedimentales propuestos los niveles de algebrización de Godino (2012).

4.3.1.2.1. Propuesta de niveles de competencia algebraica

Con base en el progreso epistémico de la competencia algebraica, a continuación, se proponen cuatro niveles de competencia algebraica, fundamentados en estadios de progreso

conceptual, los cuales se construyen mediante la aplicación de actividades cognoscitivas procedimentales y actividades conceptuales regulatorias.

El enfoque aquí dado es numérico, por lo que queda en prospectiva, la geométrica (objetos como punto, línea, superficie, volumen y la forma en que se concibe un concepto, a partir de su antecesor). Además, simultáneamente al aprendizaje de la competencia algebraica, cada representación se debe asociar con otras representaciones semióticas, especialmente, su conversión al lenguaje natural, pictórico o gráfico, es decir, relacionar términos, expresiones y modelos algebraicos con marcas verbales o pictóricas que permitan, posteriormente, la interpretación y modelación de problemas algebraicos.

Nivel I. Construcción del sistema de numeración decimal y operadores, jerarquía, definición de conjuntos numéricos y operaciones entre ellos. Por ejemplo, la nominalización, conceptualización de expresiones de la forma 3^2 y su influencia en las transformaciones de tratamiento, por ejemplo, en términos de un producto, adición y viceversa; la nominalización, conceptualización de expresiones de la forma 3(4) y su influencia en las transformaciones de tratamiento, etc.

Nivel II. Además de los aprendizajes del nivel anterior, implica la construcción inductiva de las propiedades de los números reales y demostración de igualdades y expresiones numéricas, mediante la aplicación de dichas propiedades.

Nivel III. Además de los aprendizajes del nivel anterior, implica la asunción de valores desconocidos en cantidades determinadas representados simbólicamente, la aplicación de propiedades de igualdades para encontrar dichos valores y viceversa, es decir, encontrar expresiones determinadas con valores simbólicos, a partir de una serie de valores conocidos.

Nivel IV. Además de los aprendizajes del nivel anterior, implica el uso del lenguaje convencional algebraico para la aplicación de las propiedades de las igualdades, la notación y conceptos institucionales algebraicos.

4.3.1.3. Interpretación de las actividades procedimentales y regulatorias en el desarrollo de la competencia algebraica

A partir de la interpretación de la forma en que se desarrolla la competencia algebraica, se afirma que este consiste, básicamente, en asociar un objeto conocido

(concreto o simbólico) con una marca semiótica externa de cierta representación del mismo y realizar operaciones lógicas al interior de dicho sistema representacional, con el fin de obtener inferencias y la posterior construcción conceptual semiformal del objeto. Así, la forma de aprendizaje consiste básicamente en las asociaciones de objetos nuevos, con los previamente conocidos.

Respecto al contenido de los objetos conocidos por los estudiantes, es posible encontrar cadenas de asociaciones: actividades procedimentales asociadas a una serie de razonamientos, creencias, argumentos y conceptos (signos, notación y expresión algebraica), a su vez, asociados con experiencias, cuya primera asociación axiomática es con representaciones de objetos concretos. Bajo estas actividades, ciertas tareas cognoscitivas de carácter algebraico ocurren espontáneamente, ciertas asociaciones con más frecuencia. Estas se caracterizan por la mecanicidad de su aplicación, al punto de hacerlo de forma inconsciente, funcionan para una familia de tareas de similaridad conceptual y situacional. En ese sentido, el dominio de la competencia algebraica implica, en últimas, la aplicación de las reglas de manipulación simbólica y uso notacional. Sin embargo, el uso de estas últimas, por sí solas, no garantizan el dominio de la competencia algebraica, dado que estas son de carácter algorítmico.

Pero no basta con realizar actividades procedimentales para abarcar el alcance del desarrollo cognitivo de la competencia algebraica a nivel escolar, dado que, algunas de estas tareas implican saltos conceptuales, que solo pueden darse con flexibilización de los paradigmas espontáneos que se aplican en determinado nivel, mediante un análisis conceptual, en el que las actividades procedimentales y sus asociaciones sean el objeto. Así, este análisis conceptual se caracteriza por la consciencia que se realiza sobre las actividades procedimentales y sus asociaciones o sobre sí mismas, e inducen al cambio o progreso conceptual en el desarrollo de la competencia algebraica, mediante procesos de razonamiento hipotético inductivo, deductivo, y creativo-conceptual. Se trata de asociaciones analíticas, es decir, aquellas que se realizan con un procedimiento de fragmentación y recabación conceptual. Además, dicho análisis permite sustentar la elección de una opción particular, especialmente cuando existen más elecciones posibles, en un momento dado. Por tanto, desde una perspectiva didáctica es necesario mostrarle al

estudiante que las preguntas guía que el profesor plantea no solo se espera que las *responda*, sino que el mismo *aprenda a formularse preguntas* así: ¿Qué pasaría si…?

Respecto a la forma de representación de las actividades procedimentales y de análisis conceptual, aparecen, mentalmente, como imágenes del registro natural-verbal, aritmético, algebraico, pictórico, gráfico o geométrico, que el sujeto evoca, cuando capta con sus sentidos un objeto o marca semiótica externa de un problema dado. Esto le permite plantear una ecuación para el problema, la cual se resuelve con actividades procedimentales de tratamiento semiótico (Duval, 2012).

Con el análisis hasta este punto, se evidencia una concepción del conocimiento como un cúmulo de relaciones y asociaciones conceptuales, por lo que puede inferirse que el desarrollo de la competencia de la resolución de problemas algebraicos puede interpretarse como un "esquema cognoscitivo".

Entonces, en dicho esquema, las funciones semióticas de las que habla Duval (2012), Godino et al. (2015) y Vergnaud (2016), son las actividades cognoscitivas procedimentales y el análisis conceptual regulatorio, cuyo aprendizaje se realiza mediante asociaciones, y de manera jerárquica: primero las actividades procedimentales y luego, las regulatorias.

De hecho, las actividades cognoscitivas procedimentales, en adelante ACP y las actividades conceptuales regulatorias, en adelante ACR, son dos momentos didácticos distintos. Primero se aprende uno, luego el otro, es decir, se enseñan los procedimientos ACP para cada grado de problema y luego de su absoluta comprensión y apropiación, posteriormente se reflexiona con cada estudiante sobre las ACR: el camino tomado y los plausibles, con el fin de incorporarlos a los esquemas, para utilizarlos en problemas posteriores.

Ahora bien, sobre el uso que le dan los estudiantes a los conocimientos aprendidos, Peña (2014) da a entender que en problemas nuevos, el estudiante optará por transferir o evocar procedimientos, razonamientos y conceptos previamente utilizados, con base al éxito que perciba en su aplicación reiterada, es decir, que los esquemas evocados por el sujeto en un determinado problema serán aquellos que les hayan resultado más exitosos, esto es, los que se le han enseñado y han construido significativamente en las clases, con base en problemas similares al que se le plantea.

No obstante, aunque la actuación resolutiva frente a un nuevo problema consiste en las asociaciones estímulo respuesta, este hecho no niega la presencia del razonamiento, más bien, se quiere decir que, incluso, los razonamientos, conceptos y procedimientos son cadenas de asociaciones estímulo-respuesta, en consonancia con la siguiente afirmación: "toda conducta por compleja que sea, es reductible a una serie de asociaciones entre elementos simples" (Ardila, 2013, p. 317).

Para finalizar, en el contexto de las variables de estudio en relación con la resolución de problemas algebraicos, si bien, estos funcionan de manera conjunta, y que tienen un carácter relativo de acuerdo con el problema y la trazabilidad del proceso, es decir, en determinado momento del problema, un mismo objeto puede ser un saber previo, estrategia metacognitiva o transformación semiótica, es posible aproximarse a las características definitorias individuales en una situación problema dada y fase resolutiva del mismo.

Con base en lo anterior, los saberes previos están conformados, en primer lugar, por aquellos objetos que han sido apropiados con anterioridad al estímulo de un problema o momento dado del mismo. Estos pueden incluir desde aquellos objetos aprehendidos, generalmente durante los primeros años de vida y que son lógicamente independientes entre sí (axiomáticos), hasta conceptos o esquemas cognoscitivos, con ACP, ACR, así como el sistema de notación algebraico y sus reglas de manipulación.

En cuanto a las estrategias metacognitivas, llamadas aquí ACR, ante un problema o momento dado del mismo, son aquellos saberes previos que se encargan de analizar, cuestionar y dinamizar el paradigma conceptual de los objetos contenidos en el esquema, especialmente aquellos que se integran en las ACP, incluyéndose a sí mismo. La definición de un ACR parte del uso de una o más definiciones, conceptos, axiomas, teoremas o propiedades para resolver atascos del problema central que no pueden ser resueltos con las ACP (Mieles & Montero, 2012; Suarez, 2013; Morillo, Moreno & Díaz, 2014).

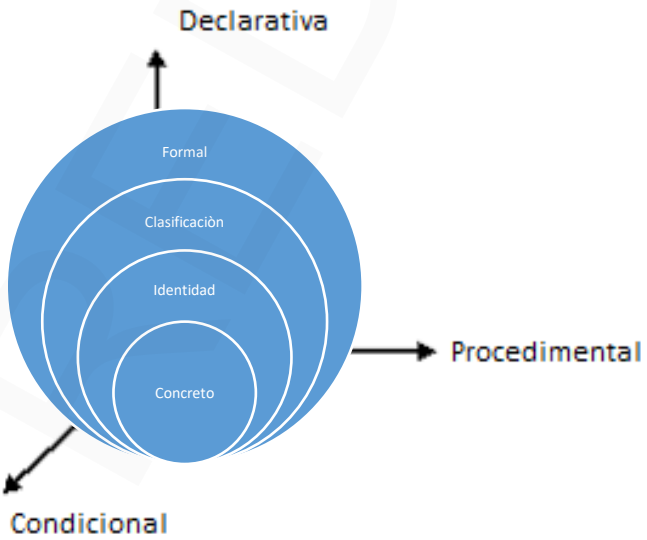
Frente a la transformación semiótica, ante un problema o momento dado del mismo, hace referencia al producto de la aplicación de ACP o ACR en una forma de expresión dada. Cada uno de los progresos de conocimiento que ocurren, desde la lectura interpretativa del problema hasta la solución del mismo, son transformaciones semióticas progresivas, siendo la solución misma, una transformación semiótica.

En ese sentido, cabe inferir que la asignación de un objeto como saber previo, o transformación semiótica es relativa a un problema de referencia X1, sea este global o un subproblema. Esto es así, ya que para otro subproblema de referencia X2, lo que para X1 fue una transformación semiótica, para X2 puede ser un saber previo, asimismo, las estrategias metacognitivas se encuentran integradas en el constructo de los saberes previos.

4.3.1.4. Análisis conceptual de los esquemas cognoscitivos en la resolución de problemas algebraicos

Del análisis del proceso de resolución de problemas algebraicos se infiere que la construcción del concepto es el último nivel de abstracción, reflexión y análisis de una serie de objetos matemáticos, tales como lenguajes, situaciones o experiencias, procedimientos, propiedades y argumentos, tal como planteó Vergnaud (2016), Godino et al. (2015). Este se construye con la finalidad de asociar de forma económica y rápida una serie de objetos y justificar procedimientos resolutivos. En ese sentido, el progreso del conocimiento hasta la formación del concepto nace desde la exposición a una experiencia, que puede ser objetiva o ideal, continua con la identificación de la experiencia (un problema, formula, un procedimiento o un significado o praxeología) luego, con el reconocimiento de la misma en otros contextos y finaliza con u categorización o generación de concepto que representa dicha experiencia. Por último, la información de dicho concepto puede tener uso declarativo, procedimental y/o condicional (Lausmeier, Gathala & Frayer, citado en Godino & Batanero, 1994; D´Amore, 2012).

Figura 16. Trazabilidad de la formación de un concepto

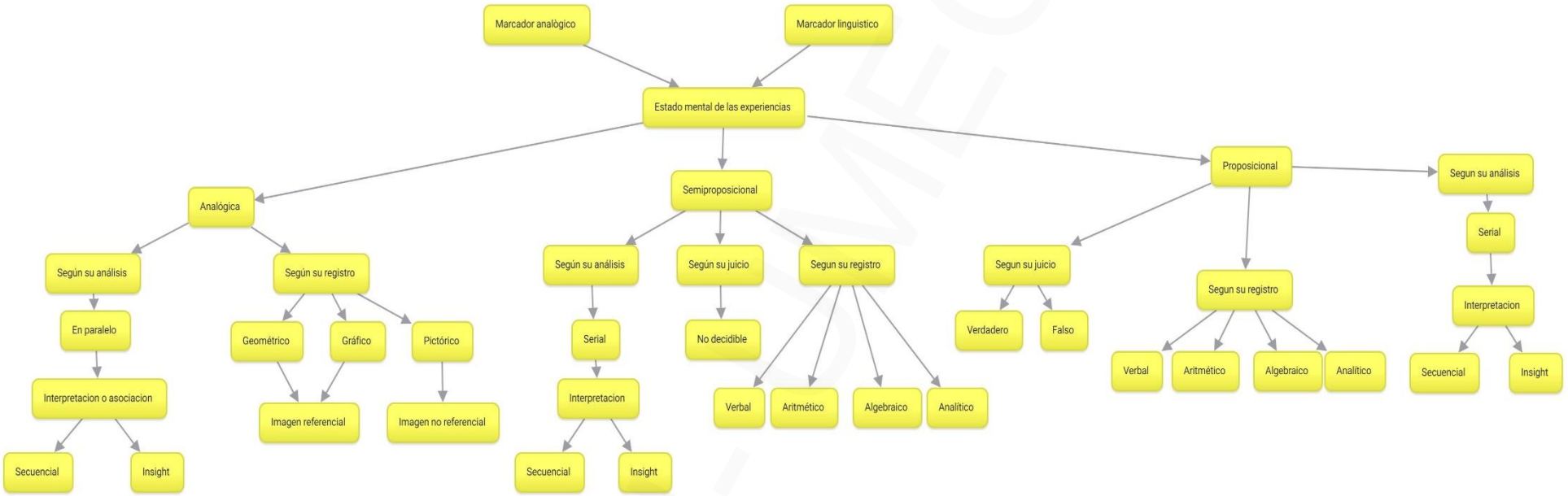


Fuente: autor (2022).

Lo anterior indica que la organización conceptual en las estructuras mentales sigue una lógica inductiva, en la que cada concepto pertenece a una clase de concepto más general, el cual, a su vez, es una clase general de una serie de conceptos más específicos. Esta idea se relaciona con lo señalado por Cornu y Vergnioux (citado en Duval, 2016) cuando afirman que "el aprendizaje de un concepto aislado es imposible, dado que todo concepto se halla en correlación, con otros. Por tanto, para comprender un concepto es necesario analizar las categorías conceptuales de su contexto epistémico. Esto implica que el aprendizaje significativo es aquel que logra crear conceptos a partir de la identificación de objetos y situaciones que los originan, no en su forma transcontextual. En cuanto a la estructura de las experiencias o situaciones, a continuación, se muestran,

RED-UNEXT

Figura 17. Estructura del estado mental de las experiencias



Fuente: autor (2022)

Como puede verse, una experiencia se evoca a partir de marcadores lingüísticos o analógicos, y puede expresarse en diferentes registros, pero comprenderse, por lo general, en el registro natural. Complementando la información de la gráfica, cabe anotar que esos estados mentales de las experiencias son la materia prima de los conceptos, incluso, de conceptos de orden superior o superconceptos, que suponen un mayor nivel de abstracción que los conceptos de partida. En tal caso, el estado mental de una experiencia puede ser un concepto.

En esa línea, los esquemas cognoscitivos de los sujetos tienden a ser cuasi conceptos en la medida en que nacen de una situación objetiva o ideal, que es identificada, reconocida en diferentes contextos y categorizadas, pero, en muchos casos, no consolidadas en conceptos formales, sino, desde su carácter operatorio, los que Vergnaud (2016) les llama “conceptos en acto y teoremas en acto” (p.35).

4.3.1.4.1. Funciones semióticas

Dado un problema, una vez se realiza la descodificación en el registro y representación semiótica del problema, a partir de sus marcas lingüísticas ocurren asociaciones con esquemas previos (empezando por al menos un problema similar) de las que emergen, en primera instancia, actividades cognoscitivas procedimentales y, a partir de estas, actividades cognoscitivas regulatorias, ambas con sus respectivos aspectos condicionales. Dicha asociación es justamente la actividad de las funciones semióticas, por lo que, redefiniéndoles, según el concepto de Hjemlev (citado en Godino, 2012) estas sería reglas, criterios o códigos de asociación entre un antecedente o estímulo y un consecuente o respuesta.

De esa manera, las funciones semióticas son, en esencia procesos interpretativos, en tanto que consisten en la contextualización de un marco de conocimiento o esquema cognoscitivo previo para un caso particular: un nuevo problema, como se dijo anteriormente, mediante asociación. En ese punto, el problema deja de ser una entidad externa al sujeto y se integra a su esquema cognoscitivo, generando un nuevo estado o esquema emergente, de forma continua, hasta la solución del problema.

4.3.1.4.2. Actividades cognoscitivas procedimentales

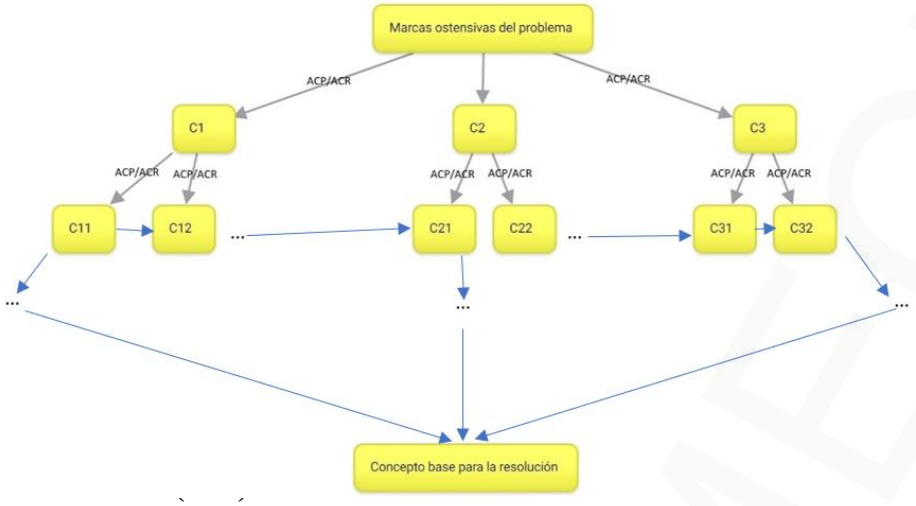
Las actividades cognoscitivas procedimentales son las primeras que emergen de las funciones semióticas aplicadas al problema, mediante asociaciones por estímulo respuesta, causadas por la motivación, impresiones, aprendizajes, etc. Se refieren a secuencias de razonamientos u operaciones matemáticas automatizadas, que utiliza a priori para ciertos problemas y se originan por aprendizaje externo o por autoconstrucción, con el fin de resolver un problema determinado, sin alterar los esquemas cognoscitivos previos. El *producto directo* es un nuevo estado del problema, el cual se evidencia con el progreso en construcción de un modelo del problema, y/o el curso subsiguiente de la manipulación a la notación simbólica.

4.3.1.4.3. Actividades conceptuales regulatorias

Las estrategias metacognitivas en el contexto de la presente investigación son llamadas actividades cognoscitivas regulatorias, dado que permiten visualizar mejor la función de estas. Estas emergen en segunda instancia de las funciones semióticas aplicadas al problema y se realizan cuando el sujeto percibe que las actividades cognoscitivas procedimentales no son suficientes para resolver el problema, o enfrenta atascos intermedios, es decir, su presencia está condicionada por la aplicación previa de una ACP. Aunque el producto directo es una actividad cognoscitiva procedimental o conceptual regulatoria, influye indirectamente sobre la construcción del modelo del problema y sobre el curso de los procedimientos de manipulación simbólica. Asimismo, las ACR se encargan de orientar las ACP hacia el propósito general del problema, es decir, que no solo se produzcan estados, sino, que estos tengan relación deductiva con el estado de llegada. No obstante, su capacidad para realizar cambios estructurales en los esquemas cognoscitivos, las diferencia de las ACP.

PREPRINT

Figura 18. Generalización del esquema cognoscitivo de un sujeto



Fuente: autor (2022)

4.3.1.5.Aproximación conceptual de la estructura de los esquemas cognoscitivos en la resolución de problemas algebraicos

Los siguientes son conceptos, operadores y propiedades que en el presente trabajo investigativo son el producto de la abstracción y análisis de teorías relacionadas con los resultados obtenidos.

4.3.1.5.1. Conceptos descriptores

Sesgo de estímulo-respuesta. Es la asociación de las marcas lingüísticas de cierto estado del problema, con determinados entes cognoscitivos predilectos, ACP o ACR, del esquema previo, por el éxito que se ha tenido en asociaciones con estos, en problemas similares. No obstante, se debe tener en cuenta que las representaciones asociadas son solo algunas de las múltiples de dicho objeto (Duval, 2016). Generalmente, el sesgo de estímulo-respuesta determina la aparición de otros tipos de sesgo: de impresión y motivación. El primero consiste en creencias, imaginarios, sobre la forma en que debe abordarse. El segundo, hace referencia a sensaciones anímicas asociadas a los entes cognoscitivos, incluso, al mismo problema, que hace percibirlos como valiosos o sin importancia.

Actividad cognoscitiva procedimental (ACP). Se refiere a los procedimientos emergentes por los de sesgos, para operar objetos institucionales en un estado presente del problema. No es consciente sobre su enunciación misma, es decir, sobre los objetos que la componen, su definición y análisis gramatical. Además, su presencia tiene sentido solo si va a aplicarse a un problema algebraico concreto.

Actividad conceptual reguladora (ACR). Se refiere a actividades conscientes sobre la enunciación de cierta ACP, el estado presente del problema, así como su análisis gramatical, para evaluar la interpretación que sustenta la actividad procedimental y, quizá, dinamizarla (o generar nuevas). Cuando se genera una nueva interpretación que justifica la modificación de la actividad procedimental, esta se convierte en una ACR, es decir, las ACR pueden producir nuevas ACR. Por tanto, interviene sobre las marcas lingüísticas de un estado del problema, de forma secundaria a la acción de ACP, dado que su enunciación refiere a un problema algebraico concreto. Es la responsable de mantener, el objetivo global, en los diferentes estados del problema y genera cambios estructurales en el esquema cognoscitivo.

Ente o elemento cognoscitivo. Se refiere a cada uno de los objetos que conforman el esquema previo de un sujeto.

Estado presente del problema. Se refiere a la estructura del esquema previo en un momento interpretativo del problema, producto de la aplicación de ACP. En el instante en que el sujeto empieza a descodificar el problema, su estado presente es 0. Un estado presente se delimita por el "atasco" de la ACP que se viene ejecutando, el cual requiere una ACR, para continuar al siguiente estado.

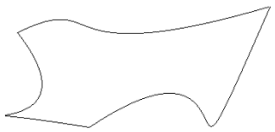
Interpretación. Conjunto de asociaciones de marcas lingüísticas de un estado presente del problema, con los esquemas previos, para determinar el próximo estado al que se desea llegar, las ACP, incluso, ACR requeridas.

Solución del problema. Solucionar un problema equivale a crear un nuevo esquema para ese problema, que equivale al último estado presente del problema. No obstante, dado que estos se obtienen de entes cognoscitivos que *ya están*, por nuevos puentes asociativos entre estos, en realidad, no se trata, en sentido estricto, de una construcción de nuevos entes, sino de reinterpretación, es decir, reasociaciones de los entes cognoscitivos.

Objeto institucional. se refiere al (los) objeto-esquemas *construidos por la comunidad matemática*: conceptos puros, propiedades aritméticas, operaciones básicas, teoremas, fórmulas matemáticas, reglas de reducción de expresiones, jerarquía de operaciones (Godino et. al., 2015).

Representación semiótica no referencial. Se refiere a cualquier representación en lenguaje natural o pictórico que describe un objeto, cuya representación solamente se puede expresar en su mismo registro, es decir, como máximo, se les puede realizar tratamiento, dado que no se han creado representaciones en otros registros para la representación inicial. Ej. "Las cualidades del ser humano". O la siguiente línea, cuya representación pictórica no tiene equivalente o referencia verbal,

Figura 19. Línea cerrada sin denominación verbal o analítica



Fuente: autor (2022)

Representación semiótica referencial. Toda representación en lenguaje natural que describe un objeto de otra representación. Ej: "el triple de un número fraccionario". Estas son susceptibles de realizársele conversión y tratamiento, dado que ya se ha creado una representación de la misma, que, para el caso del ejemplo, es en registro algebraico.

Esquema global ideal. Dados ciertos entes cognoscitivos axiomáticos, es una estructura de indeterminadas asociaciones conceptuales posibles (combinaciones en el sentido estadístico, en clúster de al menos un concepto), tanto en número como en clase entre dichos entes. Así, este esquema único se constituye en un modelo teórico del conocimiento humano.

Ruta particular cognoscitiva. Trazabilidad de estados presentes de un problema. El recorrido total de esta ruta es el esquema del problema y es solo una de las potenciales construibles, a partir del esquema previo.

Esquemas previos. Estructuras de entes cognoscitivos de un sujeto particular compuesta de subestructuras conceptuales, con su respectiva trazabilidad epistémica

(completa o a medias) que se asocian a las marcas lingüísticas del problema, para construir estados presentes. Los sujetos poseen distintos esquemas previos, aparentemente inconexos.

Unidad semiótica inhibible. Partes analizables de un estado del problema y, en general, de cualquier ente cognoscitivo. Se toman desde macro unidades semióticas, incluso, por clústeres de unidades semióticas inhibibles no necesariamente consecutivos, siendo una de las partes de la enésima división menor a una proposición. En lenguaje natural se refiere a artículos, conjunciones, preposiciones, conectores, verbos, sustantivos, adverbios, proposiciones, párrafos y cualquier categoría gramatical: En lenguaje pictórico: punto, línea, plano, ángulo, propiedades.

En lenguaje algebraico es posible hablar de unidad semiótica de inhibición sintética y analítica

Sea el objeto: 3x-6= 8x+17

US sintética o estructuralista: a, a=b, a+b=c; a=b+c; a+b=c+d; 3x-6= a, a-b;…

US analítica o fraccionable: 3x= 2x+x,…; -6=-2-4,….

Deducción. Proceso asociativo del problema con entes cognoscitivos del esquema previo, cuyo producto es la transferencia de cierta propiedad de un ente cognoscitivo general o hiperónimo, a uno específico, o hipónimo.

Inducción. Proceso asociativo del problema con entes cognoscitivos del esquema previo, cuyo producto es la comunalidad o propiedad de un grupo de hipónimos, para construir otro hipónimo y/o enunciar una generalización o hiperónimo. Este proceso se refiere a la simplificación o búsqueda de casos particulares, es decir, dividir para conquistar; escoger valores particulares para facilitar la comprensión del problema y, con base en ellos, intentar obtener cierto procedimiento para la solución ((Mieles & Montero, 2012; Suarez, 2013; Morillo, Moreno & Díaz, 2014).

Registro semiótico. Se refiere a cada una las categorías representacionales lingüísticas de un objeto: natural/verbal, lenguaje pictórico/gráfico, lenguaje algebraico/analítico, lenguaje aritmético. Cada registro contiene un paquete indeterminado de representaciones semióticas (Duval, 2012).

Registro semiótico natural o verbal. Es la categoría representacional lingüística correspondiente al lenguaje verbal o común. Es el registro en el que se realizan los procesos de análisis conceptual. En cuanto a los procesos comprensivos en este registro, cabe anotar

que las representaciones de este registro no poseen reglas explícitas de tratamiento, pero, en cierto sentido, los conectores, y en general, las conjunciones gramaticales funcionan como funciones semióticas de las representaciones del registro natural, dado que, al igual que un estas, determina la relación de la idea antecedente como consecuente. Para ello, puede dinamizar partes del enunciado problema por conservación semántica (tratamiento en lenguaje natural u otro lenguaje), con el fin de mostrar que a una misma representación aritmética puede corresponder más de una representación natural.

Registro semiótico pictórico, gráfico, icónico y/o geométrico. Se refiere a la categoría de representaciones que no poseen código proposicional, por lo que no se leen serialmente, sino, de forma discontinua. Aunque se conciben mentalmente estáticas, pueden imaginarse en movimiento. A diferencia del registro algebraico y aritmético, y, de forma semejante al registro verbal, no se han definido funciones semióticas para la transformación de tratamiento en lenguaje pictórico.

Al igual que los otros registros semióticos, existen representaciones pictóricas no referenciales, es decir, no pueden expresarse, o, al menos no se conoce una forma de expresarlas en otro registro. Por ejemplo, una línea continua cerrada que encierra un área no siempre tiene nombre. Ej.: el círculo y la elipse y unas cuantas más, son las únicas concebidas. El resto, no tienen nombre en lenguaje natural. Es decir, ahí hay un ejemplo de una representación en cierto registro que no tiene un signo asociado en lenguaje natural o algebraico. Esto es de vital importancia, ya que los objetos se aprehenden también, a través del cambio de representación semiótica. Si no tiene nombre, no puede ser formalmente analizado. Un sistema de reglas de tal tipo debe consistir en operadores entre trazos de figuras pictóricas para obtener nuevas figuras, es decir, solucionar un problema en ese mismo registro, sin tener que buscarle sentido algebraico. También se podría inventar un sistema de códigos para modelar un problema pictórico, cuya transformación de tratamiento y resultado, sea una receta de construcciones auxiliares que permitan darle una solución geométrica al problema, sin recurrir al modelo algebraico convencional.

Registro semiótico aritmético. Son todas las representaciones que utilizan signos aritméticos. Ej. $2(4) +3 = 6+5$

Registro semiótico algebraico y/o analítico. Son todas las representaciones que utilizan signos algebraicos y otros símbolos matemáticos. Ej. $3x$, x, etc. $2x+6=3+x$

Función semiótica. Hacen parte de los esquemas previos en que procesan marcas lingüísticas (antecedentes), para producir ACP, ACR, o un estado presente del problema (consecuentes)

Enunciado. Estado interpretativo a0 sobre objetos no previos

Problema. Interrogante sobre el estado interpretativo a0

Resolución de un problema. Es la construcción de líneas interpretativas entre un estado 0 hasta un estado interpretativo n, conocido como solución. Cabe anotar que, si un problema se interpreta y soluciona con los recuerdos a priori o ACP, su resolución será, desde la perspectiva del resolutor, sencilla, en tanto, que, si necesita utilizar sus ACR, tendrá una concepción de mayor dificultad del problema mismo.

Definición. Es la conceptualización de un objeto A, mediante el uso de objetos de mayor generalidad que A, y así sucesivamente, estos nuevos objetos se conceptualizan hasta llegar a uno no conceptualizable por ser axiomático.

Inhibición analítica. Es la tarea más importante de la ACR y se refiere al proceso de separación contextual de al menos, una unidad semiótica, para determinar sus propiedades generales y conceptualización, de la forma más amplia posible, con el fin de mejorar la comprensión del sentido de la misma y de la unidad semiótica de tamaño consecutivo, con lo cual se disminuye el sesgo interpretativo. Se operacionaliza mediante dos procesos inversos entre sí: fragmentación semiótica y reconstrucción de sentido, que son procesos de la ACR. Una primera aproximación a esta tarea la hizo el famoso filósofo René Descartes cuando menciono que se debe dividir cada dificultad y examinar en tantas partes como sea posible. Asimismo, autores recientes mencionan que la solución de un problema se facilita y puede ser encontrada a través del análisis de las partes constitutivas de los componentes semánticos del problema (Brown et. al., citados en Atenas & Vera, 2017).

Concepto. Definición de un objeto. Los procesos secuenciales que ocurren durante su formación son: concreto, identidad, clasificación y formal. Dichos procesos hacen posible la construcción, en primer lugar, de una función procedimental-condicional y la propiamente conceptual y declarativa.

Superconcepto. Concepto cuyo significado trasciende los significados de cierto conjunto de conceptos de partida.

Reversibilidad y/o exclusión de ruta. Acción aplicada a una ruta cognoscitiva para dejarla latente y empezar otra alternativa. Es desencadenada por insight, intuición del sujeto o motivación o sesgo respecto a la ruta escogida inicialmente, con predominio de la ley del mínimo esfuerzo, es decir, si por determinada ruta la solución es más lejana o compleja, se tiende a cambiar por otra de menos demanda cognoscitiva. También es causada por una conclusión derivada de la aplicación de ACR.

Intuición. Desde una visión gestaltista se refiere a la asunción de un esquema cognoscitivo, con base en algunos indicios percibidos que se asocian al mismo, bien sea por algunos de los tipos de sesgos: estímulo-respuesta (procesamiento no consciente de experiencias previas), motivaciones, impresiones. Es decir, la intuición mostraría la tendencia gestáltica del ser humano, dado que se conciben o construyen formas, estructuras, solo con un puñado de indicios asociados a estas. En el contexto de un problema, se evidencia en asumir que cierto concepto o ACP es una estructura que soluciona el problema o permitirá superar un atasco.

4.3.1.5.2. Operadores

Adición semántica (A-->B). Consiste en establecer una conexión lógica entre dos entes cognoscitivos, ambos dados o uno de ellos, agregado, durante un proceso asociativo-interpretativo, con la condición de que estén en la misma representación (añadir un segmento de recta a otro, para interpretarlo). En un texto continuo, su marca lingüística es dada por los conectores textuales, que indican una relación de adición de la siguiente manera: causa-efecto, oposición, condición, o simple progreso pragmático (Aplicable en objetos de tipo ACP Y ACR y representaciones de todos los registros)

*Orden por agotación (A*B).* Se utiliza para adicionar la actividad representada por el símbolo consecuente Y, sí y solo si primero verifica la insuficiencia de la actividad representada por el antecedente X. (Aplicable en objetos de tipo ACP Y ACR y representaciones solo en lenguaje natural)

ac*r= Realización de “ac” y, solo si es insuficiente, se convierte en “acr”

Ejemplo: E0= P; E1= E0 + ac*r= EP1; E2= E1+ ac*r= EP2…

E=estado presente del problema

EP= Esquema previo presente del problema

Multiplicación semántica (AxB). Se utiliza para autoaplicar una ACR, el fin de generar nuevas s ACP. (Aplicable en objetos de tipo ACR solo en lenguaje natural). Podría inferirse que (ACR1) elevado a la n= infinitas tareas cognoscitivas conceptuales regulatorias.

¿Qué semejanzas y diferencias tienen los resultados obtenidos y el operador, respecto a su análogo aritmético?, ¿Es posible concebir otro operador adicional a + y *? ¿Es posible construir una aritmética especial de operaciones semánticas?

4.3.1.5.3. Propiedades de ACP y ACR

Multirrelacionalidad de los esquemas previos. Todo esquema previo puede relacionarse con cualquier otro o con sí mismo.

Unicidad de estado de AC. En un instante cognoscitivo, se es consciente de una ACP o ACR, no ambas a la vez.

Registro natural de la ACR. El primer registro de análisis de toda ACR a cierta ACP es el natural.

Previsualización. Acción consciente referida a planear el recorrido de una ACP o ACR en cierto estado presente del problema, con el fin de predecir su éxito.

Priorización por estímulo respuesta. Se refiere a la priorización de una ACP, ACR, ente cognoscitivo, y, por extensión, un esquema previo, por encima de otros plausibles, con base en su uso exitoso en problemas anteriores.

Insight. Interpretación no consciente frente a un estado presente del problema, cuya probabilidad de emergencia aumenta con la familiaridad y práctica que se tenga con cierto tipo de ACP y/o ACR, para el mencionado estado presente del problema. Este emerge después de comprender el problema y haber estado ensayando procesos de solución (Kernberg, 2012; Sanz, 2016).

No aritmeticidad de adición conceptual. La operación de acumulación o integral semántica de dos conceptos, ambos en lenguaje natural puro, no posee sentido aritmético. El sentido adicional no siempre se establece con la agregación íntegra de los códigos lingüísticos.

Apertura. Propiedad de un esquema previo de relacionarse entre sus entes cognoscitivos, para construir nuevos conceptos.

Densidad conceptual. Dada una clase de objetos y un concepto representativo, es posible encontrar un tercer concepto que represente a dicha clase y delimite mejor sus propiedades.

Indeterminación de orden de estados. Se puede asumir un estado futuro del problema y, a partir de él, verificar las condiciones iniciales del problema. Esta propiedad permite la formulación de hipótesis.

Multirrepresentacionalidad de objetos. Hace referencia a la característica de un objeto de tener múltiples representaciones, pero ninguna, individualmente agota su conceptualización (ej. el radio que puede moverse en el círculo, los valores que puede tomar una variable)

Tratamiento. Se refiere al cambio de representación de un objeto en el mismo registro (Duval, 2012).

Conversión. Es el cambio de representación de un objeto en distintos registros (Duval, 2012).

Conservación semántica. Se refiere al significado idéntico de dos representaciones, dado que una es producto de la transformación semiótica de otra, por tratamiento o conversión. Esta propiedad se usa para reescribir conceptos, de forma que sean más fácilmente aprehensibles por el sujeto. Por ejemplo, es posible encontrar un número n de proposiciones en el mismo lenguaje del problema original (u otro lenguaje) para reescribirlo, conservando definición (o significado).

Identidad de ruta. Aunque existen múltiples rutas cognoscitivas para llegar al estado interpretativo solución del problema, son axiomáticamente idénticas.

4.3.1.6. Propuestas de actividades conceptuales regulatorias para la densificación constante de los esquemas cognoscitivos

En primer lugar, los procesos de las ACR nacen de juicios valorativos, sensaciones sobre si las ACP, incluso ACR, a aplicar son suficientes o no, para resolver el problema o avanzar de estado. Este es el punto álgido, para ser consciente que debe aplicarse un

conjunto de procesos conceptuales regulatorios que permitan la resignificación y replanteo del curso que se adelanta en la resolución.

Las ACR se fundamentan, en primer lugar, en el hecho de que, durante la descodificación del problema se enfoca en ciertas marcas lingüísticas, por su uso en ocasiones anteriores, motivación e impresión generada en el lector, es decir, por un tipo de sesgo.

Luego, a estas marcas lingüísticas, por estímulo-respuesta u otro tipo de sesgo, también se les asocia con un significado con base en lo anterior es que se siente "comprendida" la expresión inicial del problema. Lo anterior es una forma económica y rápida de actuar frente a un problema, automatizando procedimientos, razonamientos o entes cognoscitivos, para ciertas marcas lingüísticas, sin implicar el análisis conceptual. No obstante, dicha economía y rapidez no es funcional cuando el problema tiene un atasco interpretativo, dado que requiere un cambio de enfoque o proceso, el cual, a su vez, requiere, de un análisis paradigmático del mismo.

Bajo esta perspectiva, el sesgo aparecería como una consecuencia de la rapidez de respuesta del cerebro frente a un estímulo, de la economía de pensamiento. El cerebro busca el logro de más, con menos, es decir, la vía más fácil y rápida, para resolver un problema. Lo anterior no quiere decir que las ACP, razonamientos y procesos generados por algún tipo de sesgo deban eliminarse, sino, complementarse o ampliarse, bajo la premisa de su limitación. No obstante, cabe mencionar que el uso de las ACR no elimina el sesgo frente a la asociación generada por cierta marca lingüística. Mas bien, es una forma de dividir el sesgo en tantas partes como se analice cierto estado interpretativo del problema.

A continuación, se proponen una serie de actividades conceptuales regulatorias, para resolver atascos generados en la resolución de problemas o fomentar el cambio paradigmático.

- Escribir en el registro natural el problema o atasco presentado en el mismo.
- Recorrer mentalmente los pasos siguientes de la ACP antes de su ejecución, para anticipar posibles atascos o, por el contrario, suficiencia de esta para solucionar el problema.

- Transferir del plano subjetivo (voz interior) al plano objetivo (registro verbal o natural) mediante su conversión al registro natural, los entes cognoscitivos de la enunciación del problema o atasco de este, y analizarlo por fragmentación semiótica y reconstrucción de sentido.
- Transferir del plano subjetivo (voz interior) al plano objetivo (registro verbal o natural), mediante su conversión al registro natural, la ACP y el conjunto de entes cognoscitivos, razonamientos o conceptos de esquemas previos que justifican su uso y analizarlo por fragmentación semiótica y reconstrucción de sentido.
- Escribir los supuestos de base o interpretaciones por defecto encontradas a lo largo del análisis, tanto del problema o atasco del mismo, como de las ACP, que se rechazaron o, simplemente no se concibieron, aun sin tener razones lógico-matemáticas para rechazarlos, por lo que son plausibles, además, ofrecen otra posibilidad semántica alternativa al supuesto utilizado y correspondiente ACP, sin entrar en conflicto con el análisis fragmentación semiótica y reconstrucción del sentido del problema. Estos supuestos los generan los sesgos y se evidencian con acciones tales como la fijación con transferir ciertos conceptos o procesos de otros problemas en sus formas típicas, uso unirrepresentacional de ciertos objetos, conceptos de trabajo o de base, modos de razonar autoimpuestos, representaciones semióticas por defecto y ACP estereotipadas.
- Escribir las hipótesis que se derivan con base en las novedades encontradas en el análisis del problema o atasco y ACP, que ayuden a plantear el nuevo rumbo del proceso o a determinar otras líneas de análisis posteriores.
- Con el análisis por grado y tipo de técnica de los entes cognoscitivos de la enunciación del problema o atasco y de la ACP, razonamientos, conceptos, esquemas previos, determinar la pertinencia de la interpretación o supuesto utilizado, el ACP respectivo y proponer ajustes.
- Implementar y verificar los ajustes a la ACP en el estado del problema.

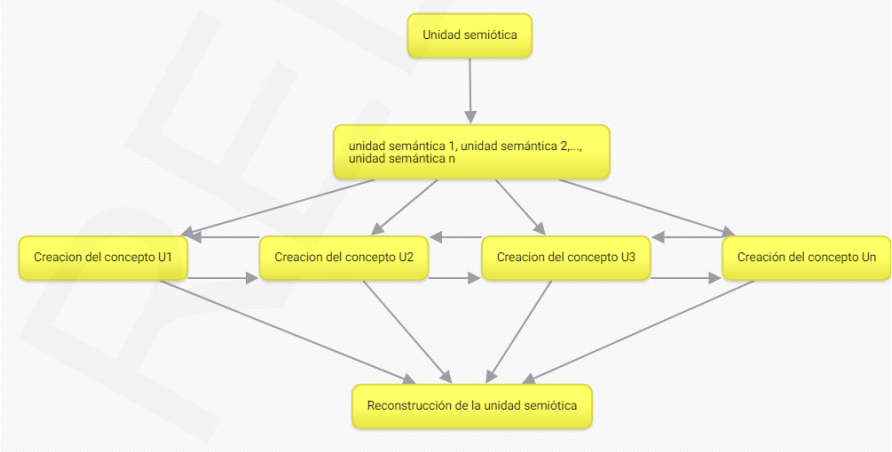
Precisamente, en estas últimas actividades se hace énfasis en la presente descripción de procesos de la ACR, ya que se implica directamente el cambio paradigmático. Esta exige como prerrequisito la fragmentación semántica y la reconstrucción del sentido, tanto de la ACP, como de la lectura del estado del problema, aunque ello implique la destrucción de la

Gestalt (Velasco, 2012, p.65). En cuanto a la fragmentación semántica, esta se refiere a la desagregación de unidades semióticas, desde la mínima expresión (palabra del enunciado o ACP), hasta problemas más generales que el problema enunciado, que, en un sentido estricto no es una fragmentación, sino, de mayor nivel de generalidad que el problema mismo.

En cuanto a la reconstrucción de sentido, se realiza mediante procedimientos de carácter unitario y sistémico, utilizados para encontrar casos similares que contengan la propiedad buscada, pero de fácil comprensión y transferirlos al modelo inicial.

En primer lugar, los procedimientos de carácter unitario consisten en el análisis de la mínima unidad semiótica (palabra, expresión o proposición), para inferir el significado de la unidad semiótica más amplia que la contiene. Para ello, se identifica la palabra y se define, en primer lugar, con base en su estructura etimológica. Luego, se recuerda ejemplos de contextos próximos y lejanos, o proposiciones que la contengan, para extraer los sentidos locales de cada contexto, inducir uno general y verificar la estabilidad de su significado en cada ejemplo adicional. Dicho significado será el que se asigne a la mínima unidad semiótica y el que se integrará con los significados construidos del resto de unidades semióticas mínimas, para definir de forma menos sesgada a la unidad semiótica más amplia. Lo anterior constituye en un aporte de esta investigación para adicionar argumentos sin pérdida de generalidad, por ejemplo, asignar a uno de los datos un valor con el que pueda trabajarse por experiencias anteriores, modificar el problema mediante su reformulación o fraccionarlo en metas parciales (Mieles & Montero, 2012; Suarez, 2013; Morillo, Moreno & Díaz, 2014).

Figura 20. Proceso de reconstrucción de sentido a partir de la fragmentación semántica

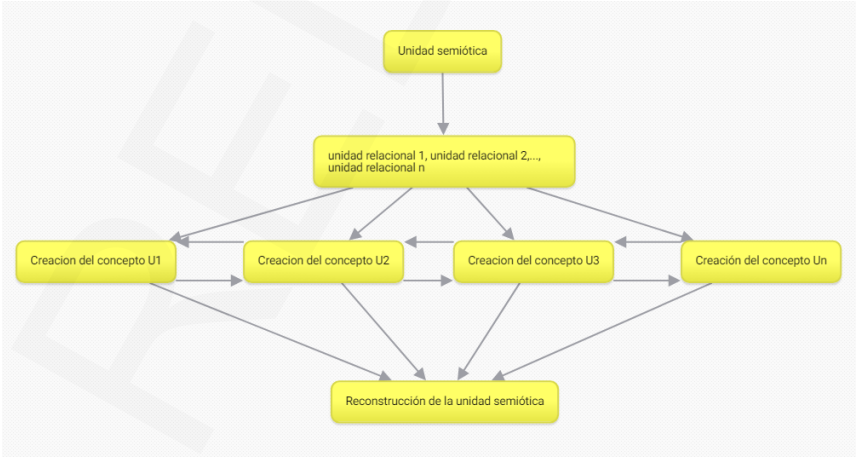


Fuente: autor (2022)

Respecto a los procesos de carácter sistémico, consiste en el análisis de significados de una unidad semiótica A o cierta subunidad, mediante la comunalidad de interrelación semántica de subunidades, con otras unidades semióticas B, C, y D. Implica el descubrimiento de una similitud particular entre dos aspectos aparentemente distintos, quizá de contextos distintos, pero que poseen un aspecto estructural común, que permite incluirlos en una categoría, y, por tanto, tratarlos de forma parecida, tal como lo planteó Dicha interrelación semántica no depende del contexto, pero es conveniente construir o recordar unidades semióticas de semántica conocida, para determinar mejor dicha interrelación. Para ello, se asigna una variable a al menos una de las expresiones que no son conjunciones gramaticales, verbos y adverbios, entre las cuales puede encontrarse cierta subunidad. Ej. Si la expresión es "*las personas poseen estudios superiores*" y se requiere comprender de manera más profunda la relación entre la palabra "*personas"* con el resto, entonces, unas de las formas de asignar una variable sería construir la frase general: "*las personas poseen y"; "las x poseen estudios superiores", las x poseen y".* En este punto se requiere conocer muy bien los sentidos de los conectores, partículas deícticas, que permitan construir dichas interrelaciones.

Para ello, puede ayudarse reemplazando las partes generales por palabras auxiliares que sean de la misma categoría gramatical, de manera iterativa, e identificar el significado, para garantizar su estabilidad. Una vez encontrada la comunalidad en el significado, se procede a asignársele a la unidad semiótica original.

Figura 21. Proceso de reconstrucción de sentido a partir de la interrelación semántica



Fuente: autor (2022)

Así, dado que el producto de una ACR es una conclusión conceptual, aún falta un paso más para que el proceso sea eficaz: la reorientación de la ACP anterior, que en últimas determina la eficacia de la ACR.

Por último, en los procesos de reconstrucción de sentido de las ACR se evidencia que, para construir una definición inicial de A, se utilizan algunos ejemplos para "dividir" los sesgos (impresión con el problema, estímulo respuesta y motivación preliminar) de la definición inicial de A en todos los ejemplos utilizados. Dichos ejemplos son analógicos respecto a su generalidad, al estilo de Cantoral (2014). Entonces, la nueva definición de A, obtenida de las propiedades comunes de los ejemplos utilizados presenta menor sesgo que la definición inicial.

Con base en el esquema global ideal, se evidencia que las ACP, razonamientos, y, en general, los entes cognoscitivos que se utilizan en un problema o estado de este son un subconjunto de todos los posibles que podrían aplicarse en dicho momento del problema. Por ejemplo, un sujeto, al planteársele un problema relacionado con un triángulo rectángulo, es posible que lo relacione, sesgadamente, con ACP del teorema de Pitágoras. Sin embargo, hay muchos otros objetos institucionales que, aun siendo conocidos y recordables por el mismo sujeto, no emergen a priori: el Teorema de Thales, suma de ángulos internos, externos, bidimensionalidad del triángulo, unidad mínima fundamental de otros polígonos, etc.

En ese sentido, el objetivo central de las ACR es construir enfoques conceptuales, procedimentales adicionales a la ACP convencional, de forma que se utilicen más relaciones contenidas en el esquema global ideal. Si bien, es cierto que los razonamientos, ACP y quizá, bases conceptuales convencionales podrían ayudar a responder con más eficiencia y eficacia a cierto tipo de problemas, y, por lo tanto, a potenciar el pensamiento reproductivo, es necesario ejercitarse en problemas que requieran cambios paradigmáticos, dado que esto estimula el pensamiento reproductivo. En síntesis, el esquema global ideal es un conjunto de máximo número y tipo de relaciones entre entes cognoscitivos que, en teoría, representan todos los conceptos, razonamientos, ACP y ACR posibles con las que podría resolverse cualquier problema. Desde una perspectiva matemática, podría decirse

que el esquema global ideal se refiere a la estructura que puede establecerse por conexiones mediadas por actividades cognoscitivas conceptuales y regulatorias, entre un número finito de conceptos y superconceptos.

Para finalizar, todas las conclusiones aquí aportadas permitirían densificar conceptual y procedimentalmente los métodos de resolución de problemas algebraicos, propuestos por los teóricos de la didáctica de la matemática, especialmente, el propuesto por Pólya. Específicamente, respecto al primer proceso "comprender el problema" implica, inicialmente reconocer una serie de marcas lingüísticas en el problema y asociarlas con al menos un esquema previo, dotado de experiencias, sentidos, conceptos y ACP interconectados entre sí. En ese sentido, la evidencia de la comprensión es la construcción de una relación personal entre los entes cognoscitivos de su esquema, que represente la información del problema. Asimismo, el segundo proceso, "concebir un plan", implica la emergencia espontánea de los sesgos racionales o emocionales, sobre un ACP a utilizar. En caso de no encontrarse una relación inmediata, es decir, un ACP, implica utilizar las ACR, cuyas tareas se basan en la fragmentación semántica y reconstrucción de sentido, lo cual puede entenderse como una subdivisión del problema en auxiliares. Por último, examinar la solución obtenida, implica nuevamente, el uso de las ACR, para verificar el cumplimiento de las condiciones iniciales del problema, consolidar asociaciones de conceptos y procedimientos con estados del problema para trasferir a futuros y el planteamiento de hipótesis sobre rutas alternativas o variaciones del problema mismo. Por último, cada subproblema implica la replicación de los pasos de Pólya.

4.3.1.7. Síntesis conceptual en relación con los esquemas cognoscitivos y reflexiones conjeturales

Durante la descodificación de un problema particular el sujeto reconoce una serie de marcas lingüísticas que son interpretadas, es decir, asociadas con entes cognoscitivos de sus esquemas previos, que son lógicamente independientes, es decir, con entes cognoscitivos no conexos entre sí, para resignificar dichos esquemas y construir una ruta cognoscitiva de resolución, hasta lograr un estado del problema que suponga el procedimiento final de la ruta, en la que la respuesta del problema sea un nuevo ente cognoscitivo integrado al

esquema, lo que le otorga su resignificación. Así, un concepto, razonamiento, creencia, resultado de un problema, asociación-interpretación, ACP y ACR, son entes cognoscitivos, donde cierta ACP como ente cognoscitivo, representa las conexiones entre otros entes cognoscitivos.

Dicha asociación o conexión se produce siguiendo las leyes de los sesgos emocionales y racionales, siendo los primeros: la impresión y motivación; los segundos: insight, previsualización y estímulo-respuesta y la intuición, que toma elementos de ambos y son, en el concepto de Duval (2012) funciones semióticas, cuyo antecedente son las marcas lingüísticas del problema y el consecuente, un ACP o ACR. Estas leyes son las que determinan la emergencia de las actividades cognoscitivas y, por ende, de las ACP, a la que confieren una eficiencia relativamente mayor, pero omiten la apertura paradigmática y flexibilidad conceptual de las ACR, cuando se presenta atascos conceptuales. Este análisis conceptual se hace sobre los fundamentos epistémicos de las ACP: conceptos, razonamientos, proposiciones y demás creencias, con sus aspectos declarativos-procedimentales y su dimensión condicional.

Siguiendo la línea argumentativa de los sesgos, en esta investigación se plantea que los sesgos emocionales y racionales son el principal factor que explica el progreso de estados presentes del problema en la resolución de problemas algebraicos. Asimismo, estos sesgos emergentes podrían ser una Gestalt, que el cerebro percibe a bajo costo biológico y se evidenciarían en las construcciones de sentido de la unidad total, el insight, la previsualización e intuición. Por ejemplo, si se entiende por unidad total a un texto, un párrafo, una frase, una expresión o, incluso una palabra, el hecho de que el conocimiento asociado a dicho objeto sea distinto al obtenido con posterioridad a su fragmentación semántica y reconstrucción de sentido, muestra que la Gestalt se destruye al ser analizada. Así, parece ser que la Gestalt es la forma en que se guarda la información, pero, que, es necesario destruirla para analizarla conscientemente. Es decir, de manera natural, el cerebro parece estar programado para percibir o sentir estructuras gestálticas del problema, pero debe destruirlas para analizarlas, comprenderlas y realizar progresos conceptuales y procedimentales con ellas.

De esta manera, las tareas aquí propuestas de la ACR se constituyen en un aporte metodológico para desarrollar heurísticas que en investigaciones prospectivas pueden

utilizar para avanzar hacia la construcción de reglas con el fin de realizar procesos de conversión y tratamiento semiótico, dado que solamente existe un procedimiento definido para el tratamiento de una representación algebraica o aritmética. Por ejemplo, para expresar un enunciado problema, mediante una ecuación y viceversa (registro natural al registro algebraico y viceversa), expresar una figura geométrica o pictórica en términos de una ecuación y viceversa(registro pictórico al natural y viceversa), expresar una relación entre números como una función y viceversa (registro aritmético al algebraico y viceversa), reducir la cantidad de texto del enunciado sin afectar su sentido-idea medular- y viceversa (tratamiento del registro natural al registro natural) y todos los derivados de las combinaciones entre dichos registros. Pero, sobre todo, las ACR dotan al sujeto de una serie de tareas para identificar sus propios supuestos, razonamientos, autoconcepciones y creencias arraigadas que implícitamente condicionan su proceso, y posteriormente plantear posibilidades resolutivas más amplias que la inicialmente considerada.

Con base en lo anterior, se propone el desarrollo de la competencia algebraica escolar mediante el uso del razonamiento hipotético-inductivo, hipotético-deductivo y creativo, así como ACP y ACR para la manipulación de conceptos, razonamientos y creencias del estudiante, con el fin de reconstruir el conocimiento algebraico, desde la representación misma del número hasta el uso significativo de las propiedades de las igualdades, es decir, sus reglas sintácticas y la notación respectiva, para plantear ecuaciones que modelen un problema algebraico. Desde una perspectiva didáctica, el docente debe asumir que el estudiante posee conocimientos previos, de los cuales apoyar los conceptos, tipos de razonamientos, ACP y ACR. Asimismo, de igual o más importancia es identificarlos, para colocar en dichos términos el nuevo aprendizaje, con el fin de favorecer su aprendizaje y evidenciarlo con asociaciones estímulo-respuesta en nuevos problemas propuestos al estudiante.

Todas las reflexiones hasta este punto hacen pensar en un número mínimo y clase de entes cognoscitivos empíricos y/o racionales, así como propiedades de estos, aprehendidos en los primeros años de vida, de forma autodidacta o enseñada, que podrían ser el fundamento de los esquemas cognoscitivos y de todo el conocimiento contenido en él, es decir, todo el conocimiento podría expresarse en últimas, en los términos de, al menos, uno de dichos entes y una propiedad. Estos pueden ser perceptibles (racionales y

empíricos), tales como espacio-tiempo, causalidad, adición y sustracción) y sensibles (racionales y empíricos), tales como sentimientos, formas geométricas. Además, tendrían la característica de ser independientes entre sí y representarían para una teoría del conocimiento humano, lo mismo que los axiomas de Peano, para la Matemática.

En ese sentido, la resolución de problemas y la construcción de conocimiento nuevo es generada por la relación de entes axiomáticos, consigo mismos y entre sí y con combinaciones entre grupos de combinaciones de al menos 2 entes, por lo que el esquema global ideal representa un estado de conocimiento ilimitado, producido por todas las posibilidades combinatorias entre todos los entes cognoscitivos, cuyas combinaciones generadas son susceptibles de convertirse, por construcción conceptual, en nuevos entes cognoscitivos. Lo anterior significa que el nuevo conocimiento no debe entenderse como el aumento del número y clase de entes, sino, del número de relaciones entre los ya existentes. Entonces, dichas reconexiones generan, a su vez, nuevos entes cognoscitivos, que "densifican" el esquema ideal.

Por último, con base en la percepción de entes cognoscitivos empíricos y/o racionales y algunas propiedades axiomáticas a través de nuestros sentidos y su procesamiento mental, para la posterior construcción inductiva, deductiva y creativa, así como la construcción esquemática del conocimiento es posible afirmar que todo el conocimiento humanamente posible esta ajustado a los entes cognoscitivos aprehensibles y a las conclusiones derivables de ellos. En ese sentido, la validez del conocimiento está sujeta a la validez de la percepción y del procesamiento mental. Entonces, si se asume que los entes cognoscitivos conscientes son el producto del procesamiento de estímulos sensoriales por el cerebro, y dado que los procesos que los transforman son mentales, es probable que dicho conocimiento sea solamente intersubjetivo. En ese sentido, todo el conocimiento que se cree tener sobre una realidad externa al ser humano, más bien, correspondería la realidad de la construcción de nuestro propio conocimiento.

PREPRINT

CAPÍTULO V. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

REDI-UNEG

1. Conclusiones respecto al análisis de resultados por Variables o Categorías

1.1. Saberes previos

En términos generales, desde su dimensión teórica, se concluye que los saberes previos consisten en una serie de cadenas lógicas de argumentos, conceptos, procedimientos creencias y otros entes cognoscitivos, así como cargas emocionales, con discontinuidades o brechas epistémicas al interior de dichas cadenas, potencialmente utilizables, antes de abordar un problema o subproblema algebraico.

En el contexto de la transición de la aritmética al algebra, la cadena conceptual lógica más notable es la que conecta epistémicamente la concepción misma de número y el razonamiento proto algebraico. No obstante, los estudiantes poseen discontinuidades se evidencian cuando los estudiantes realizan operaciones aritméticas sin ser conscientes de las propiedades de los números reales implicadas, del sistema de numeración y el porqué de la forma espacial en que se realizan ciertas operaciones, el significado de signos que expresan relaciones entre números, la construcción de los conjuntos numéricos, el razonamiento inductivo, deductivo y la construcción de hipótesis para dar saltos conceptuales, así como la abstracción de relaciones numéricas y su representación simbólica.

Respecto a su dimensión social, se concluye que algunos estudiantes tienden a creer que existe un solo método o respuesta para solucionar el problema (la del docente), piensan que la resolución debe ser un proceso rápido y que solamente basta con recordar o aplicar la fórmula correcta. Además, exaltan los resultados por encima de los razonamientos, procesos conceptuales o procedimentales, cuya causa probable es el hecho de que en sus ambientes de aprendizaje algebraico no se fomenta una cultura de argumentación, demostración y justificación.

Además, cuantitativamente hablando, el nivel de saberes previos y el número de estudiantes, dadas las condiciones de normalidad poblacional poseen una correlación inversa: a mayor nivel de saberes previos evaluado, se espera un menor número de estudiantes en dicho nivel.

1.2.Estrategias metacognitivas

En términos generales, se concluye que las estrategias metacognitivas son una una serie de cadenas lógicas de argumentos, conceptos, procedimientos, heurísticas, creencias y otros entes cognoscitivos, así como cargas emocionales, con discontinuidades o brechas epistémicas al interior de dichas cadenas, que se constituyen en funciones semióticas para el análisis, regulación y evaluación conceptual de su actividad misma y la de los demás entes cognoscitivos, con el fin de superar un obstáculo epistémico en cierto problema o subproblema algebraico. De hecho, de las tres variables analizadas en esta investigación, es la de mayor influencia en la resolución de problemas algebraicos.

Además, los aspectos operatorios que determinan las estrategias metacognitivas durante la resolución de un problema algebraico son los siguientes: procesos regulatorios en la planeación, procesos de planeación en la regulación, procesos regulatorios en la evaluación, procesos evaluativos de la regulación, revisión de procesos ejecutivos, articulación de tareas proyectivas, de revisión y valoración, evaluación de los procesos de planeación y planeación del proceso de evaluación.

Respecto a la dimensión social, se concluye que la mayoría de los estudiantes posee bajo nivel en el uso de estrategias metacognitivas, situación que se extiende entre instituciones educativas, a excepción de las subvariables regulación y evaluación, cuyas medias si presentan variación estadística significativa entre instituciones. De cualquier forma, a nivel de variable se determinó una correlación inversa entre el nivel de la variable estrategias metacognitivas y el número de estudiantes: a mayor nivel de la variable, menos estudiantes se ubican en este.

Asimismo, se concluye que no tienen procesos construidos a priori, de accesibilidad y organización de recursos cognitivos, sino que, en la interpretación de cierto problema, parecen adquirir nitidez cognitiva. Esta nitidez ocurre cuando identifican marcas lingüísticas en el enunciado del problema, las cuales, les induce a evocar experiencias, razonamientos, o procedimientos que les han sido útiles, para transferirlos reproductivamente al problema en cuestión. Asimismo, cuando se atascan en el problema, lo revisan nuevamente, consultan información a otras personas y utilizan el método del tanteo o analítico, que consiste en dividir el problema en subproblemas de mayor facilidad.

También se encontró que los estudiantes tienden a asumir un método de resolución como único, una concepción memorística y mecánica de las matemáticas y piensan que la resolución debe ser rápida. Además, poseen argumentos muy generales y pobres conceptualmente para describir su propio proceso de planeación, incluso, presentan falencias en la comprensión lectora, dado que las respuestas son incoherentes con lo planteado.

1.3. Transformación semiótica

En términos generales, se concluye que la transformación semiótica es el proceso operatorio cognitivo o metacognitivo, por el que se construye un producto o avance conceptual en la resolución de un problema. Dichos productos son estados progresivos en la resolución del problema que pueden representarse mediante los siguientes registros: natural o verbal, aritmético, geométrico, algebraico, gráfico y pictórico. Estas representaciones son susceptibles de ser convertidas (transformadas en otra representación de otro registro distinto al de origen) o tratadas (transformadas en otra representación del mismo registro.

Los factores determinantes de la transformación semiótica son los siguientes tipos de razonamiento: hipotético inductivo-deductivo-creativo, interpretativo, argumentativo, así como el conocimiento notacional semiótico en un registro determinado.

Respecto a la dimensión social, se concluye que la mayoría de los estudiantes poseen un nivel bajo en esta variable y que las instituciones educativas poseen la misma tendencia sin mayores variaciones entre sí. Esto se explica por los vacíos conceptuales y asociaciones reduccionistas en los procesos argumentativos propios de las transformaciones de conversión y tratamiento, que en ocasiones se evidencia en la restricción de algunos objetos matemáticos a una o algunas de sus representaciones, quizá, porque les son familiares y en ocasiones anteriores les han resultado útiles.

Asimismo, se concluye que esos vacíos conceptuales acentúan las falencias en la modelación y resolución de ecuaciones del tipo $Ax + B = C$ y $Ax+B=Cx+D$; particularmente en la transposición de términos, operaciones con sus coeficientes, dada la estrecha relación epistémica de los axiomas y propiedades de los R, con la modelación y el tratamiento de dichas ecuaciones.

Además, los estudiantes presentan falencias conversión semiótica del registro natural o verbal al algebraico, y en el tratamiento de ecuaciones, así como falencias en la comprensión lectora, dado que algunas respuestas eran incoherentes.

2. Triangulación de resultados, estado del arte y marco teórico

2.1. Saberes previos

A partir de la triangulación por el método cuantitativo y cualitativo, aplicada a la variable saberes previos, se concluye que esta variable está determinada por los procesos cognoscitivos transicionales desde el concepto de número hasta el razonamiento protoalgebraico.

Lo anterior explica, en relación con el estado del arte, que el bajo desempeño de los estudiantes en el dominio de las operaciones aritméticas, axiomas y propiedades, así como nociones referidas a objetos simbólicos es causado por los vacíos procesos de pensamiento numérico y su trazabilidad epistémica hasta el razonamiento proto algebraico (López & López, 2014; Ruiz, 2016; Popayán, 2016; Paniza y David; 2018; Valencia & Díaz, 2019).

Respecto al marco teórico, los resultados de la triangulación constatan las teorías generales, como la Gestalt, teoría conductista y teoría cognitiva, así como teorías sustantivas, como la teoría de los esquemas, teoría de los campos conceptuales, teoría de registros de representación semiótica y Enfoque Ontosemiotico de la cognición e instrucción matemática; en el sentido de que apoyan que los saberes previos no son conocimientos aislados, sino que están organizados en una red cognoscitiva con conceptos, desde su función declarativa, procedural y condicional, en el que intervienen prácticas matemáticas, objetos personales, e institucionales, que son evocados mediante asociaciones o recuerdos causados por estímulos.

2.2.Estrategias metacognitivas

A partir de la triangulación por el método cuantitativo y cualitativo, aplicada a la variable estrategias metacognitivas, se concluye que los factores determinantes de las

dificultades de los estudiantes son los procesos regulatorios en la planeación, procesos de planeación en la regulación, procesos regulatorios en la evaluación, procesos evaluativos de la regulación, revisión de procesos ejecutivos, articulación de tareas proyectivas, de revisión y valoración, evaluación de los procesos de planeación y planeación del proceso de evaluación.

Así, estos resultados suponen una inducción a los hallazgos descritos en el estado del arte, toda vez que relacionan las estrategias metacognitivas con las tareas concretas de esquematización, fraccionamiento de la información, construcción de preguntas autorreguladoras y el razonamiento plausible, para categorizarlas en una serie de procesos de proyección y orientación dirigida hacia un objetivo (Troncoso, 2013; Moreno & Daza, 2014; Huaynaso, Verónica y Mendoza, 2018; Gutiérrez & Vargas, 2020).

Respecto al marco teórico, los resultados de la triangulación constatan las teorías generales, como la Gestalt, teoría conductista y teoría cognitiva; y las teorías sustantivas, tales como la teoría de los esquemas, teoría de los campos conceptuales, teoría de registros de representación semiótica y Enfoque Ontosemiotico de la cognición e instrucción matemática, dado que explican las estrategias metacognitivas como procesos controlados de planificación, regulación y evaluación, cuya operatividad depende de tareas de tipo perceptual, mnemotécnico, inferencial, analógico, heurístico y funciones semióticas de tipo argumentativo (Echeverry, 2010; Otero & Elichiribehety, 2016; Gangoso, 2016).

2.3.Transformación semiótica

A partir de la triangulación por el método cuantitativo y cualitativo, aplicada a la variable estrategias metacognitivas, se concluye que los factores determinantes de las dificultades de los estudiantes son los siguientes tipos de razonamiento: hipotético inductivo-deductivo-creativo, interpretativo, argumentativo, así como el conocimiento notacional semiótico en un registro determinado.

En ese sentido, la triangulación de hallazgos explica el estado del arte, dado que la ausencia de los mencionados tipos de razonamiento causa dificultades en la resolución de problemas algebraicos, en la representación semiótica de registros verbales, operaciones de

conversión y tratamiento del modelo algebraico construido, y la contextualización del resultado obtenido (Ordóñez, 2017; Ospina & Reyes, 2018; Gil & Mercado, 2019).

Respecto al marco teórico, los resultados de la triangulación constatan las teorías generales, como la Gestalt, teoría conductista y teoría cognitiva; y las teorías sustantivas, tales como la teoría de los esquemas, teoría de los campos conceptuales, teoría de registros de representación semiótica y el enfoque ontosemiotico de la cognición e instrucción matemática, dado que hacen referencia a los procesos generales de pensamiento que permiten realizar conversiones semióticas, a partir de marcas ostensivas de las representaciones en los diferentes registros (Duval, 2012; Núñez et al., 2017; Núñez, 2017).

3. Constructo analítico derivado de los resultados y el estado del arte

La perspectiva general resultados, más allá de las variables/categorías individuales, sugiere procesos cognitivos comunes, que pueden entenderse como un sistema sinérgico, articulado entre sí, y orientados hacia la resolución de problemas algebraicos.

Dicho esquema cognoscitivo podría servir de referencia a la didáctica de la matemática para organizar los aprendizajes en su forma epistémica natural, dado que los esquemas que los estudiantes poseen se componen de cuasi conceptos o conceptos que todavía dependen de la situación que los originó o con eslabones epistémicos perdidos, que generan discontinuidades en desarrollo del pensamiento algebraico.

En ese sentido, el esquema cognoscitivo debe estructurarse con experiencias y sentidos asociados a la relación entre el concepto de número, sistemas numéricos, operadores, propiedades en R, razonamientos deductivo-inductivo, hipotético-creativo, que permita el progreso conceptual natural desde una experiencia concreta, hasta su modelo algebraico. Asimismo, debe contener las distintas representaciones en otros registros de los conceptos construidos, así como con las convenciones algebraicas establecidas institucionalmente, que le permitan al estudiante, por ejemplo, modelar problemas algebraicos, realizar conversiones semióticas a conveniencia en los distintos registros semióticos (Duval, 2012), aplicar tratamiento a ecuaciones de la forma $Ax + B= C$, y de tipo $Ax+B=Cx+D$, incluso, con posibilidad de ampliar conceptualmente las propiedades algebraicas conocidas.

Pero, lo más importante de todo es clarificar la forma en que ocurren los saltos epistémicos, es decir, progresos conceptuales o cuasi conceptuales en el esquema. Con base en la interpretación de los resultados, se encontró que ocurre gracias a dos tipos de fuerzas mentales: *las racionales*, representadas por actividades de tipo procedimental y conceptual regulatorio o metacognitiva, siendo estas últimas, delimitadas mediante tareas de fragmentación semiótica y reconstrucción de sentido, previamente explicitadas en el apartado de discusión y contrastación; y *las emocionales*, representadas por la motivación y la autoconfianza del sujeto. Estas últimas quedan pendiente de analizar en investigaciones prospectivas.

Todos los anteriores constructos analíticos se constituyen en un aporte al estado del arte, en la medida que explica a través de la introducción del concepto de esquema cognoscitivo, procesos de las variables analizadas, tales como las relaciones aritméticas tempranas, las representaciones simbólicas, la orientación procesual constante hacia el objetivo, la notación algebraica y procesos de conversión y tratamiento en diferentes representaciones, de forma que ya no se comprendan como procesos de pensamiento independiente, sino, como parte de una estructura de pensamiento (López & López, 2014; Ruiz, 2016; Popayán, 2016; Ordóñez, 2017; Ospina & Reyes, 2018; Huaynaso, Verónica & Mendoza, 2018; Gil & Mercado, 2019; Gutiérrez & Vargas, 2020).

4. Conclusiones finales de la investigación

Respecto al primer objetivo, identificar los saberes previos en la resolución de problemas algebraicos, se encontró que estos corresponden a un esquema de procesos cognoscitivos transicionales desde el concepto de número hasta el razonamiento protoalgebraico, con brechas epistémicas y discontinuidades en la secuencia de configuraciones que integran los respectivos recorridos epistémicos. Este constructo contiene creencias relacionadas con la unicidad de la respuesta correcta, sentido de inmediatez del proceso resolutivo, operacionalización y algoritmación por encima de la comprensión y autoridad absoluta del docente. También se destaca la ausencia de procesos argumentativos y de justificación, incluso, de comprensión lectora.

Respecto al segundo objetivo, describir las estrategias metacognitivas implicadas en la resolución de problemas algebraicos, se encontró que estas se caracterizan por la ejecución de procesos regulatorios en la planeación, procesos de planeación en la regulación, procesos regulatorios en la evaluación, procesos evaluativos de la regulación, revisión de procesos ejecutivos, articulación de tareas proyectivas, de revisión y valoración, evaluación de los procesos de planeación y planeación del proceso de evaluación. Es decir, la novedad consiste en develar la dependencia entre estos, para mostrar que solo pueden estudiarse desde su totalidad. Además, se encontró que las estrategias metacognitivas influyen de forma contundente y superlativa en la resolución de problemas algebraicos.

De otro lado, las estrategias metacognitivas de los estudiantes se configuran como un constructo no definido a nivel procedimental o conceptual, que parece adquirir nitidez cognitiva cuando se enfrenta a un problema y que puede construirse colectivamente y/o mediante un enfoque analítico. En este proceso, se asocian marcas lingüísticas del problema a experiencias, razonamientos, o procedimientos que les han sido útiles en casos anteriores. Asimismo, se encuentran aspectos emocionales referidos a la motivación y la autopercepción en cuanto a si el conocimiento o plan es suficiente para resolver el problema.

Además, las estrategias metacognitivas se encuentran asociadas a creencias de este tipo: solo hay un método o forma correcta de resolver y revisar un problema, solo se revisa la respuesta, no el proceso o el plan, la valoración de los procesos es relativa, para unos está bien y para otros, mal, no es necesario revisar procesos, y existe la influencia de un ser sobrenatural en la resolución.

Por último, dichas estrategias pueden representarse como un esquema cognoscitivo con cuasi conceptos o argumentos muy generales, con brechas epistémicas y discontinuidades en la secuencia de configuraciones que tienen su origen, incluso, desde la comprensión lectora misma de los estudiantes.

Respecto al tercer objetivo, interpretar la transformación semiótica de registros de representación en la resolución problemas algebraicos, se concluye que dichas transformaciones son producto de los siguientes tipos de razonamiento: hipotético-inductivo, hipotético-deductivo, hipotético-constructivo y analógico, y del conocimiento de las marcas ostensivas y sus asociaciones no ostensivas, correspondientes a los objetos

matemáticos que entran en juego en los mencionados tipos de razonamiento. A partir de lo anterior, se infiere que existe una estrecha relación entre la comprensión de los axiomas y propiedades y la conversión/tratamiento de ecuaciones de la forma Ax + B= C y Ax+B=Cx+D. Entonces, los vacíos conceptuales, asociaciones reduccionistas de objetos ostensivos con no ostensivos, reglas personales de los estudiantes en sus representaciones pictóricas a partir de enunciados y la construcción de modelos algebraicos y la resolución de ecuaciones, indican que los saberes previos son un constructo que implica el progreso y continuidad epistémica del esquema cognoscitivo del sujeto, comenzando por el concepto de número y utilizando los tipos de razonamiento antes mencionados, para sus construcciones proto algebraicas y articularlas con el conocimiento notacional y reglas de manipulación de objetos ostensivos.

En relación con el objetivo general, analizar los saberes previos, las estrategias metacognitivas y la transformación semiótica en la resolución de problemas algebraicos, desde la perspectiva del EOS, se develó que las variables saberes previos, estrategias metacognitivas y transformación semiótica se componen de procesos cognoscitivos fundamentales que son comunes, por lo que introdujo un nuevo concepto denominado "esquema cognoscitivo", el cual permite explicar mejor la resolución de problemas algebraicos a partir su modelación conceptual. Dicho esquema está compuesto por objetos no ostensivos, que son asociados por las marcas ostensivas de cierto objeto semiótico o problema.

En ese sentido, las funciones semióticas de las que habla Godino et al. (2015) se refieren a asociaciones de objetos ostensivos con no ostensivos, mediados por el refuerzo proveniente de las practicas personales o por una autoridad institucional. Dado que estas asociaciones comienzan desde la primera infancia, y en los primeros años de escolaridad, su estructura está basada en la trazabilidad conceptual desde las experiencias y el sentido intuitivo de número hasta la resolución de problemas algebraicos, como una red conceptual lógica que comprende, entre otras, la relación entre el concepto de número, construcción de sistemas numéricos, operadores, propiedades, razonamiento deductivo-inductivo, hipotético-creativo, para el progreso conceptual natural hacia la competencia algebraica. Asimismo, se concluye que en dicho esquema se deben integrar las distintas representaciones en otros registros de los conceptos construidos, así como con las

convenciones algebraicas establecidas institucionalmente, que le permitan al estudiante, por ejemplo, modelar problemas algebraicos, realizar conversiones semióticas, a conveniencia, en los distintos registros semióticos (Duval, 2012), aplicar tratamiento a ecuaciones de la forma Ax + B= C, y de tipo Ax+B=Cx+D, y, por qué no, generar nuevo conocimiento matemático.

5. Recomendaciones

Las recomendaciones aquí presentadas consisten en aspectos que deben ser tratados en investigaciones prospectivas,

- Construir instrumentos de respuesta abierta que permitan recoger información sobre procesos resolutivos y de metacognición, con el fin de observar las formas naturales y espontaneas en que el estudiante razona, condicionando al mínimo sus respuestas, para acercarse al esquema de cognoscitivo particular del estudiante.
- Formular instrumentos que midan o permitan interpretar la metacognición del sujeto a través de tareas no autorreportadas, evitando posibles faltas a la ética por parte del evaluado o el efecto Drunnig-Kruger.
- Desarrollar un instrumento que permita determinar las características y tipo de conocimientos previos de los estudiantes. Con base en esto se podrían clasificar a los sujetos de una muestra, con similares resultados, para explicar mejor el efecto en la colectividad de un nuevo método de enseñanza, eliminando variables intervinientes asociadas al conocimiento previo entre sujetos. Dicho instrumento debe contemplar desde preguntas elementales, que todos responden, hasta preguntas que nadie debería responder, por su complejidad. Esto puede hacerse con base en ítems que permitan visualizar el progreso de la competencia algebraica. No obstante, dicho instrumento debe ser perfectamente comprendido por los estudiantes. (Ausubel, citado en Lazo, 2015)

Por último, con base en la clasificación de los registros semióticos referenciales y no referenciales, los procesos de transformación semiótica presentan ciertos alcances y limitaciones. Respecto a los alcances, en los registros referenciales el tratamiento es

susceptible de realizársele al registro natural, de forma intuitiva; al aritmético y algebraico, con reglas determinadas. En cuanto a los registros no referenciales, solamente se le realiza tratamiento al lenguaje natural, de forma intuitiva. En relación con la conversión semiótica, solamente se realiza de forma intuitiva para todos los registros referenciales. Respecto a las limitaciones, en los registros referenciales no se cuenta con un sistema de reglas para realizar tratamiento al registro natural, pictórico, geométrico y gráfico. En el caso de los registros no referenciales, ninguno de ellos tiene un sistema de reglas para las transformaciones de tratamiento. Por último, ninguno de los registros, referenciales o no referenciales, poseen reglas definidas de conversión semiótica, por lo que dichos temas podrían abordarse en investigaciones prospectivas.

En la siguiente tabla se resumen los vacíos en las transformaciones de representación semiótica entre registros, para abordar en las próximas investigaciones relacionadas,

Tabla 84. Vacíos en el tratamiento y/o conversión de representaciones semióticas

Tipo de registro/ Transformación semiótica		**Tratamiento**		**Conversión**	
		Intuitivo	Determinado	Intuitivo	Determinado
Referencial	Natural	X		X	
	Aritmético		X	X	
	Algebraico		X	X	
	Geométrico			X	
	Pictórico			X	
	Gráfico			X	
No referencial	Natural	X			
	Aritmético				
	Algebraico				
	Geométrico				
	Pictórico				
	Gráfico				

Nota. El registro gráfico incluye el cartesiano, polar, y otros. Los espacios no marcados con X representan los vacíos en la explicitación didáctica del tratamiento o conversión entre registros.
Fuente: autor (2022).

Considerando los vacíos anteriores, las investigaciones prospectivas en el área relacionada deberían enfocarse en los siguientes objetivos,

- Construir reglas didácticas en los registros semióticos referenciales para realizar tratamiento a representaciones naturales o verbales, pictóricas, geométricas, gráficas, así como de conversión semiótica y tratamiento para para todas las

representaciones de registros referenciales y no referenciales. Lo anterior, dado que únicamente se tienen reglas de tratamiento para los registros aritmético y algebraico referenciales. Por ejemplo, para representaciones referenciales, aunque es frecuente realizar transformaciones semióticas en la resolución de problemas, no existen reglas didácticas de conversión que permitan hacer enseñable cómo modelar un problema mediante una ecuación y viceversa (Castro, 2017), o como representar en una ecuación la incógnita en una figura geométrica, o describir en código verbal o algebraico una figura geométrica, por ejemplo, definir qué es un circulo a partir de la interpretación de su ecuación y viceversa, y los aspectos comunes, en registro natural, de objetos matemáticos aparentemente disímiles. Asimismo, no existen reglas de tratamiento que permitan la explicitación didáctica, para reescribir la información de un problema, por ejemplo, extraer su propósito, así como la idea principal de un texto (Estupiñán, Arias & García, 2010).

- Establecer un registro semiótico en el que se pueda solucionar analíticamente problemas, mediante la comprensión y representación de las *modificaciones progresivas* que se realizan a una *representación semiótica* (ambas en el mismo registro) para resolver un problema algebraico, pudiendo el representante y representado tener o no, el mismo registro. Por ejemplo, construir un sistema de códigos que represente objetos del registro geométrico (referenciales o no referenciales), de forma que permita encontrar soluciones puramente geométricas, es decir, predecir las transformaciones de rotación, translación, reflexión, prolongación, etc., a realizarle a una figura, para obtener un resultado geométrico. En el caso del estudio de figuras geométricas no referenciales, por ejemplo, una línea cerrada con protuberancias en su perímetro, la cual, no contiene la misma información que la representación natural o verbal con la que se le describe (Rojano, 2010), es probable que pueda hacerse, no al caso particular, sino, al caso general que los incluya a todos, por lo que las leyes de tratamiento a dicho caso, en el nuevo registro, sean las mismas que las del caso particular. En todo caso, tal registro debe tener en cuenta los criterios de Duval (2004) para su desarrollo: construir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado, 2. Transformar

las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales, y 3. convertir las representaciones producidas en un sistema de representaciones en otro sistema, de manera tal que éstas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado. (p. 45).

RED-UMECIT

Referencias bibliográficas

Abal, F., Auné, S., & Attorresi, H. (2018). Variación de la escala Likert en el test de Utilidad de la Matemática. *Interacciones*, 177-189.Recuperado de: https://www.ojs.revistainteracciones.com/index.php/rin/article/view/63

Acosta Moreno, L. M. (2017). Resolución de problemas que requieren de la ecuación cuadrática: rutinas de pensamiento y registros de representación semiótica en octavo grado. Recuperado de: https://repositoriosed.educacionbogota.edu.co/handle/001/2555

Aguirre, J. C., & Jaramillo, L. G. (2015). El papel de la descripción en la investigación cualitativa. *Cinta de moebio*, (53), 175-189.Recuperado de: https://scielo.conicyt.cl/scielo.php?pid=S0717-554X2015000200006&script=sci_arttext

Alcaldía de Chigorodó (2019). Plan de desarrollo del municipio de Chigorodó 2020-2023. Chigorodó, Antioquia, Colombia. Recuperado de: confecoopantioquia.coop/CkEditor//UserFiles/File/articulos/2019/planes-de-gobierno/uraba/pg-chigorodo-20-23.pdf

Alfonso, M. D. C. C., & González, J. C. N. (2014). La resolución de problemas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la eLaM. *Panorama. Cuba y Salud*, *5*(4), 143-145. Recuperado de: http://www.revpanorama.sld.cu/index.php/panorama/article/view/282

Álvarez, M. Y., Alonso, I., & Gorina, A. (2012). Dinámica del razonamiento inductivo en la resolución de problemas matemáticos. Una propuesta didáctica. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/4328/

Antón, L. F. (2011). Teorías contemporáneas del aprendizaje. *Teorías del aprendizaje en Educación Superior*. Recuperado de: http://www.academia.edu/download/36658878/teorias-del-aprendizaje.pdf

Apud, E. M. L. (2014). Aprendizaje de sistemas matemáticos de símbolos en álgebra lineal y cálculo. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 299-318.

Ardila, R. (2013). Obituario. *Revista latinoamericana de psicología*, *45*(2), 315-319. Recuperado de: http://www.scielo.org.co/scielo.php?pid=S0120-05342013000200014&script=sci_arttext&tlng=pt

Arguedas, V. (2012). George Pólya: el razonamiento plausible. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, *12*(2). Recuperado de: https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/1679

Ariza, K. P., García, E. Á., & Rivero, C. B. (2016). Reflexiones sobre el concepto de problema matemático. *Revista Bases de la Ciencia. e-ISSN 2588-0764*, *1*(1), 25-34. Recuperado de: http://revistas.utm.edu.ec/index.php/Basedelaciencia/article/view/98

Arreaza, T., & Valencia, I. (2015). La resolución de problemas matemáticos: una estrategia en el aula de clase. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/10822/

Arroyo, G. C. (2014). Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales: El caso de estudiantes de octavo nivel de un colegio de Heredia. *Uniciencia*, *28*(2), 15-44. Recuperado de: https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/6009

Assuero, O. E. (2020). *Antecedentes intelectuales de la psicología de la Gestalt* (Doctoral dissertation). Recuperado de: http://rpsico.mdp.edu.ar/handle/123456789/1269

Ausubel, D. P. (2012). *The acquisition and retention of knowledge: A cognitive view*. Springer Science & Business Media. Recuperado de: https://books.google.com/books?hl=es&lr=&id=wfckBAAAQBAJ&oi=fnd&pg=PR9&dq=AUSUBEL&ots=m93wipQ1FX&sig=edphV7ZRxBBJDpVPpjo0_Xco0Nw

Ayllón Blanco, M. F. (2013). *Invención-resolución de problemas por alumnos de Educación Primaria*. Universidad de Granada. Recuperado de: https://digibug.ugr.es/handle/10481/27771

Ayllón, M. F., Gómez, I. A., & Ballesta-Claver, J. (2016). Pensamiento matemático y creatividad a través de la invención y resolución de problemas matemáticos. *Propósitos y representaciones*, *4*(1), 169-218. Recuperado de: http://revistas.usil.edu.pe/index.php/pyr/article/view/89

Aylwin, C. U. (2011). Los números reales y el infinito. *Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela*. Recuperado de: http://ciencias.uis.edu.co/conjuntos/doc/Los%20reales%20y%20el%20infinito%20-%20Carlos%20Uzcategui.pdf

Atenas Vásquez, A. P., & Vera Muñoz, J. R. (2017). *Influencia de la comprensión lectora en la resolución de problemas matemáticos en estudiantes de segundo año básico del colegio San Luís de Maipú* (Doctoral dissertation, UCINF). Recuperado de: http://repositorio.ugm.cl/handle/20.500.12743/1116

Aznar, A., Baccelli, S., Figueroa, S., Distéfano, M. L., & Anchorena, S. (2016). Las Funciones Semióticas como instrumento de diagnóstico y abordaje de errores. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(55), 670-690. Recuperado de: https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-636X2016000200670&script=sci_arttext&tlng=es

Ballesteros, S. (2014). La atención selectiva modula el procesamiento de la información y la memoria implícita. *Acción psicológica*, *11*(1), 7-20. Recuperado: http://scielo.isciii.es/scielo.php?pid=S1578-908X2014000100002&script=sci_arttext&tlng=en

Banegas, J. A. (2017). La epistemología y la metodología naturalistas de la matemática de Ph. Kitcher. *Factótum: Revista de filosofía*, (18), 64-84. Recuperado de: http://www.revistafactotum.com/revista/f_18/articulos/Factotum_18_5_ALCOLEA.pdf

Barbosa, P. M. R. (2010). La Filosofía de Gottlob Frege. Recuperado de: http://pmrb.net/books/texts/frege.pdf

Barrachina Tormo, A. (2015). *El engaño visual en el arte: análisis de la percepción visual y las leyes de la Gestalt* (Doctoral dissertation). Recuperado de: https://riunet.upv.es/handle/10251/45868

Barrantes, H., Meta-Matemáticas, U. C. R., & de Ciencias Exactas, E. (2006). Resolución de problemas. *El trabajo de Allan*. Recuperado de: https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6971

Barrantes, H., Meta-Matemáticas, U. C. R., & de Ciencias Exactas, E. (2006). Resolución de problemas. *El trabajo de Allan*. Recuperado de: https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/download/6971/6657/0

Barraza López, E. (2019). Habilidades metacognitivas y rendimiento académico en el área de matemática en los estudiantes del cuarto grado de nivel secundaria de la institución educativa "san pedro de Chorrillos"-lima, 2017. Recuperado de: http://repositorio.uladech.edu.pe/handle/123456789/9517

Barreiro, P., & Leonian, P. (2017). Metacognición en clases de Matemática: un aporte para la enseñanza. *Épsilon*, (97), 43-56. Recuperado de: https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/epsilon97_3.pdf

Barría Bobadilla, A. E., & Chavarría Lara, M. I. (2010). Dificultades que presentan los estudiantes de primer año de enseñanza media en la resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado. Recuperado de: http://repobib.ubiobio.cl/jspui/handle/123456789/1986

Barroso, J. & Rodríguez Ortiz, I.d.l.R. (2007). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de educación*, 342, 257-286.Recuperado de: https://idus.us.es/xmlui/bitstream/handle/11441/60933/dificultades%20de%20aprendizaje.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Bassols, A. T. (2014). La filosofía de las matemáticas del segundo Wittgenstein. *Praxis Filosófica*, (39), 11-40. Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/2090/209032749002.pdf

Batthyány, K., Cabrera, M., Alesina, L., Bertoni, M., Mascheroni, P., Moreira, N., ... & Rojo, V. (2011). Metodología de la investigación para las ciencias sociales: apuntes para un curso inicial. Recuperado de: http://repositorio.minedu.gob.pe/handle/123456789/4544

Becerra, O. J., Buitrago, M. R., & Calderón, S. C. (2014). Fenomenología asociada a una tarea que involucra adición y sustracción de números enteros. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/5738/

Bell, E. T. (2016). *Historia de las matemáticas*. Fondo de cultura económica. Recuperado de: https://books.google.com/books?hl=es&lr=lang_es&id=9PR2DQAAQBAJ&oi=fnd&pg=PT5&dq=que+es+la+matematica&ots=gT71gKv9A0&sig=1NAH0_0P0FB68VvsBil1ageMTkI

Benavides Romero, Y. (2018). Transformación del lenguaje natural al algebraico a través de estrategias metacognitivas con estudiantes de grado octavo. Recuperado de: http://repositorio.autonoma.edu.co/xmlui/handle/11182/543

Binda, N. U., & Balbastre-Benavent, F. (2013). Investigación cuantitativa e investigación cualitativa: buscando las ventajas de las diferentes metodologías de investigación. *Revista de Ciencias económicas*, *31*(2), 179-187. Recuperado de: https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/economicas/article/view/12730

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In *Early algebraization* (pp. 5-23). Springer, Berlin, Heidelberg. Recuperado de: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Botina Cruz, W. A. (2019). Aprendizaje del concepto variable, a partir de la regulación metacognitiva y la resolución de problemas. Recuperado: http://repositorio.autonoma.edu.co/xmlui/handle/11182/953

Breda, A., Font Moll, V., do Rosário Lima, V. M., & Villela Pereira, M. (2018). Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. *Transformación*, *14*(2), 162-176.Recuperado de: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Breda_Font_Pino-Fan_2018_BOLEMA.pdf

Buitrago, S., & García, L. (2011). Procesos de regulación metacognitiva en la resolución de problemas. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/2373/

Bullaro, L. (2017). Parque Educativo de Chigorodó. *Ciudad y Territorio Estudios Territoriales (CyTET)*, *49*(191), 137-141.Recuperado de: https://recyt.fecyt.es/index.php/CyTET/article/viewFile/76531/46869

Burgos, C. (2011). Hacia una teoría educativa desde el pensamiento de Karl Popper. In *XII Congreso Internacional de Teoría de la Educación, Universidad de Barcelona. Barcelona, España*. Recuperado de: https://www.academia.edu/download/38777513/Popper__K_OK.pdf

Cáceres, Z., & Munévar, O. (2017). Evolución de las teorías cognitivas y sus aportes a la educación. *Actividad Física y Desarrollo Humano*, *7*(2). Recuperado de: http://revistas.unipamplona.edu.co/ojs_viceinves/index.php/AFDH/article/view/2408

Cadena, C. H. G., & Saucedo, L. K. C. (2016). Cien años de distancia (1913-2013) desde el principio del conductismo de Watson. *Revista Interamericana de Psicología*, *50*(2), 265-275. Recuperado de: https://go.gale.com/ps/i.do?id=GALE%7CA607787428&sid=googleScholar&v=2.1&it=r&linkaccess=abs&issn=00349690&p=IFME&sw=w

Caicedo, J. (2014). Pensamiento Matemático en relación con las pruebas PISA. *XII Coloquio Regional de Matemáticas y II Simposio de Estadística*. Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño, Pasto, Colombia. Recuperado de: http://sired.udenar.edu.co/23/

Cajaraville Pegito, J. A., & Gusmão, T. C. R. S. (2010). Significado referencial y personal de nociones algebraicas en educación Secundaria. El caso del número áureo. Recuperado de: https://minerva.usc.es/xmlui/handle/10347/4995

Campistrous, L., & Rizo, C. (2013). La resolución de problemas en la escuela. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/3741/

Campos, H. B. (2006). La teoría de los campos conceptuales de Gérard Vergnaud. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*. Recuperado de: https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6888

Campos, H. B. (2006). Resolución de problemas El trabajo de Allan Schoenfeld. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Recuperado de: https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6971

Cantoral, R. (1988). La Heurística y Arquímedes de Siracusa. Recuperado de: https://www.researchgate.net/profile/Ricardo_Cantoral/publication/261650686_La_heuristica_y_Arquimedes_de_Siracusa/links/02e7e53819539a214c000000.pdf

Cañón-Rincón, C. A., & García-Pupo, M. M. (2018). Tipos de insight presentes en la solución de problemas matemáticos en clases. *Ciencias Holguín*, *24*(2), 10-24.

Recuperado de: http://www.ciencias.holguin.cu/index.php/cienciasholguin/article/view/1079

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2015). Powerful ideas in elementary school mathematics. In *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 203-230). Routledge. Recuperado de: https://scholar.google.com/citations?user=ZG-F6pIAAAAJ&hl=es&oi=sra

Carvajal, C. A. (2006). Las ideas de Pólya en la resolución de problemas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*. Recuperado de: https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/download/6967/6653

Casado, C. M. M. (2010). Poincaré: ciencia, matemáticas y realismo estructural. Recuperado de: https://www.jstor.org/stable/43046835

Cassirer, E. (2017). *Filosofía de las formas simbólicas, III: fenomenología del pensamiento*. Fondo de cultura económica. Recuperado de: https://books.google.com/books?hl=es&lr=lang_es&id=GtNSDwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PT6&dq=Cassirer,+E.+(2017).+&ots=95YRtj_ndi&sig=f1dgK0QRlK0ACDzdiQxmT8oaUU0

Castillo, M. C. (2012). Algunas consideraciones teóricas polémicas sobre los problemas matemáticos. *Número 32–Diciembre de 2012*, 105. Recuperado de: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/32/archivo11_volumen32.pdf

Castro Araujo, E. A. (2017). Abordaje didáctico de la comprensión de los problemas algebraicos en el nivel secundario de la República Dominicana. Transformación, 13(3), 314-326. Recuperado de: http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2077-29552017000300003

Castro, E. (2011). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación. *Investigaciones en pensamiento numérico y algebraico e historia de la matemática y educación matemática*, 1-15. Recuperado de: https://core.ac.uk/download/pdf/12342301.pdf#page=5

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/11199/

Caycedo Vega, C. A. (2018). La resolución de problemas desde la regulación metacognitiva, hacia el aprendizaje del concepto de fracción. Recuperado de: http://repositorio.autonoma.edu.co/xmlui/handle/11182/457

Cerdán, F. (2010). El cálculo de probabilidades en la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. In *Investigación en educación matemática XIV* (pp. 353-364). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3629461.pdf

Chávez, G. P. (2012). Las estrategias de aprendizaje un avance para lograr el adecuado procesamiento de la información. *Investigación educativa*, *16*(29), 57-68. Recuperado de: http://www.acuedi.org/ddata/4013.pdf

Cobo, P., & Molina, M. A. (2014). ¿ Pueden nuestros estudiantes construir conocimientos matemáticos?. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *85*, 49-73. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/3680/

Comisión Internacional de Instrucción Matemática (IMCE). Decimotercer Congreso Internacional de Educación Matemática. 24 a 31 de Julio, Hamburgo, Alemania, 2016. Recuperado de: http://icme13.org/icmi_and_german_mathematics_education

Conejo, L., & Ortega, T. (2013). Clasificación de los problemas propuestos en aulas de Educación Secundaria Obligatoria. *Educación matemática*, *25*(3), 129-158. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-58262013000300006&script=sci_arttext

Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (NTCM). Principios y estándares para la educación matemática. Estados Unidos de América, 2000. Recuperado de: https://revistasuma.es/IMG/pdf/48/105-112.pdf

Constitución Política de Colombia. Gaceta constitucional número 114. Bogotá, Colombia, 4 de julio de 1991. Recuperado de: https://dapre.presidencia.gov.co/normativa/normativa/constitucion-politica-colombia-1991.pdf

Coronado-Hijón, A. (2014). Estudio de prevalencia de dificultades de aprendizaje en el cálculo aritmético. *Bordón. Revista de pedagogía*, *66*(3), 39-60. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4748793.pdf

D'Amore, B. (2012). El debate sobre conceptos y objetos matemáticos: la posición "ingenua" en una teoría "realista" vs. el modelo "antropológico" en una teoría "pragmática". *Perspectivas en la didáctica de las matemáticas*, 17-46. Recuperado de: http://www.academia.edu/download/40892351/enfasis6.pdf#page=18

Da Silva, R. (2014). Los teoremas de incompletitud de Gödel, teoría de conjuntos y el programa de David Hilbert. *EPISTEME*, *34*(1), 19-40. Recuperado de: https://www.academia.edu/download/52407626/Godel.pdf

Dahab, J. (2015). El mito de la" revolución" cognitiva. *PSIENCIA: Revista Latinoamericana de Ciencia Psicológica*, *7*(1), 88-102. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5114121

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2017). Reflexiones teóricas sobre las bases del enfoque ontosemiótico de la Didáctica de la Matemática. Recuperado de: https://digibug.ugr.es/handle/10481/45156

D'Amore, B., & Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *10*(2), 191-218. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362007000200002&script=sci_arttext&tlng=en

D'Amore, B., Pinilla, M. F., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la" Paradoja cognitiva de Duval". *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *18*(2), 177-212. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362015000200003&script=sci_abstract&tlng=fr

De Souza, M. A. V. F. (2015). ANTECEDENTES HISTÓRICOS DA PSICOLOGIA COGNITIVA: DA ANTIGUIDADE À TEORIA COMPUTACIONAL DA MENTE. *Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica*, *5*(01), 3-24. Recuperado de: https://ojs.ifes.edu.br/index.php/dect/article/view/86

Decreto No. 1075. Por medio del cual se expide el Decreto Único Reglamentario del Sector Educación. DIARIO OFICIAL. AÑO CL. N. 49523. Bogotá, Colombia, 26 de mayo de 2015. Recuperado de: http://www.suin-juriscol.gov.co/viewDocument.asp?ruta=Decretos/30019930

Desoete, A. (2017). La evaluación y mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a través de la metacognición. *Electronic Journal of Research in Education Psychology*, *5*(13), 705-730. Recuperado de: http://ojs.ual.es/ojs/index.php/EJREP/article/view/1243

Di Barbaro, E. M., del Valle Olmedo, N., Galíndez, M. A., & Peralta, R. J. (2015, March). Errores y concepciones de los alumnos en álgebra. In XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Recuperado de: http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/view/877

Díaz, C. M. (2009). ¿ Cómo desarrollar, de una manera comprensiva, el análisis cualitativo de los datos?. *Educere*, *13*(44), 55-66.Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/356/35614571007.pdf

Díaz, D., Vélez, J. & Guerrero, J. Estrategias metacognitivas para el desarrollo de competencias genéricas en la resolución de problemas matemáticos de tipo numérico variacional en estudiantes de grado noveno. Recuperado de: https://www.edunexos.edu.co/T_grado_Unicordoba/06_COHORTE/DIAZ_D_PALOMINO_J.pdf

Diaz, L. B., Gimeno, M. S., & Nappa, N. (2011). Representaciones mentales originadas a partir de ilustraciones de sistemas tecnológicos. *Avances en Ciencias e Ingeniería*, *2*(2), 107-116. Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/3236/323627682010.pdf

Domínguez Campillo, E. (2017). Fundamentos de la Geometría desde un punto de vista axiomático. Recuperado de: https://uvadoc.uva.es/handle/10324/26120

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168. Recuperado de: http://cmapspublic.ihmc.us/rid=1JM80JJ72-G9RGZN-2CG/La%20habilidad%20para%20cambiar%20el%20registro%20de%20representaci%C3%B3n.pdf

Duval, R. (2012). Lo esencial de los procesos cognitivos de comprensión en matemáticas: los registros de representación semiótica. *Resúmenes del VI Coloquio Internacional de Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales*, 14-17. Recuperado de: http://www.irem.pucp.edu.pe/wp-content/uploads/2012/02/Resumen_coloquio_2012-1.pdf#page=31

Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/12213/

Duval, R., & Duval, R. (2004). Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Recuperado de: https://www.scienceopen.com/document?vid=171dcd43-7a1d-4e9e-b717-77febb4547a1

Echeverry, I. G. (2010). Ciencia Cognitiva, Teoría de la Mente y autismo. *Pensamiento psicológico*, *8*(15), 113-124. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3339348

Embus Galindo, F., & Reyna Beltrán, E. A. (2014). La Heurística como una Técnica para el Proceso de Enseñanza Aprendizaje de las Matemáticas. Recuperado de: http://repositorio.usco.edu.co/handle/123456789/1315

Erazo, L., & Muñoz, J. (2014). La conversión en la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Diseño y validación de una metodología de análisis para libros de texto. Recuperado de: http://sired.udenar.edu.co/id/eprint/864

Escobar Mendoza, A. E., López Centeno, D. E., & Sánchez Morán, M. A. (2015). *Unidad didáctica ecuaciones cuadráticas para noveno grado de educación secundaria* (Doctoral dissertation). Recuperado de: http://riul.unanleon.edu.ni:8080/jspui/bitstream/123456789/4963/1/230465.pdf

Espinosa Valdés, M. E. (2019). Tipologías de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre la evaluación con profesores en formación inicial. Recuperado de: https://digibug.ugr.es/handle/10481/54936

Espinosa, L. A., & Tamayo, A. M. C. (2010). La enseñanza de estrategias metacognitivas para el mejoramiento de la comprensión lectora. Estado de la cuestión. *Pensamiento Psicológico*, *5*(12). Recuperado de: https://revistas.javerianacali.edu.co/index.php/pensamientopsicologico/article/view/110

Espinoza, J., Lupiañez, J. L., & Segovia, I. (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, *14*(2). Recuperado de: https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/1664

Esquivel, E. C., Araya, R. G., & Sánchez, M. C. (2008). Creencias de los estudiantes en los procesos de aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación Matemática*. Recuperado de: https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6906

Estupiñán, M. C., Arias, G. O., & García, I. R. (2010). *La inferencia en la comprensión lectora: De la teoría a la práctica en la Educación Superior*. Universidad Tecnológica de Pereira. Recuperado de: https://media.utp.edu.co/referencias-bibliograficas/uploads/referencias/libro/381-la-inferencia-en-la-comprensin-lectora-de-la-teora-a-la-prctica-en-la-educacin-superiorpdf-BNk9F-libro.pdf

Fernández, B. G. (2019). El papel de los esquemas previos en la lectura. *ACTIO NOVA: Revista de Teoría de la Literatura y Literatura Comparada*, (3), 166-193. Recuperado de: https://revistas.uam.es/index.php/actionova/article/view/actionova2019.3.008

Fernández, F. (1997). Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales. *Granada, España: Tesis Doctoral, Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática*. Recuperado de: https://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalles/6681/descargar/

Fernández, J. J., & Vidal-Abarca, E. (2010). Importancia de las destrezas de procesamiento de la información en la comprensión de textos científicos. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(4), 529-541. Recuperado de: https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1174/021037010793139581

Fernández, M. (2010). El instrumentalismo de Dewey, la hermenéutica de Heidegger y la educación en derechos humanos (EDH). Una propuesta pedagógica para abordar la problemática de la violencia escolar. *Antíteses, Ahead of Print*. Recuperado de: https://biblat.unam.mx/hevila/AntitesesLondrina/2010/vol3/no6/7.pdf

Fernández, M. Á. R., GARCíA, M. I. D., & Crespo, A. V. (2012). *Manual de técnicas de intervención cognitivo conductuales*. Desclée de Brouwer. Recuperado de: http://www.academia.edu/download/56350918/manual_de_tecnicas_de_intervencion_cognitivo_conductual.pdf

Fernández, P., Caballero, P., & Fernández, J. A. (2013). ¿ Yerra el niño o yerra el libro de Matemáticas?. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, *83*, 131-148. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/3660/

Forigua, J. E., & Velandia, D. A. (2015). Sobre la interpretación y uso de la letra como número generalizado en tareas sobre generalización de patrones: reporte de una experiencia con estudiantes de grado octavo. *RECME*, *1*(1), 273-278. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/8604/

Franco, L. A. R. (2014). Psicología cognitiva e inteligencia artificial: mitos y verdades. *Avances en Psicología*, *22*(1), 21-27. Recuperado de: http://revistas.unife.edu.pe/index.php/avancesenpsicologia/article/view/270

Fuentes, J. B. (2011). El conductismo en la historia de la psicología: Una crítica de la filosofía del conductismo radical. *Psychologia Latina*, *2*(2), 144-157. Recuperado de: http://psicologia.ucm.es/data/cont/docs/29-2013-04-25-art19.pdf

Gairín, J. M., & Oller, A. M. (2011). Proporcionalidad aritmética en Secundaria. Ideas para una propuesta didáctica. *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática*, *2011*, 179. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/2015/1/ActasPNAGranada.pdf#page=183

Gaitero, O. G., & Naranco, F. J. (2016). La cara B de la resolucion de problemas matemáticos se soluciona con el aprendizaje autorregulado. *DIM: Didáctica, Innovación y Multimedia*, (33), 1-9. Recuperado de: https://www.raco.cat/index.php/DIM/article/viewFile/306815/396798

Gallardo Romero, J., & Quintanilla Batallanos, V. A. (2019). El círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas: una propuesta integradora para la evaluación en el aula. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *22*(1). Recuperado de: https://www.researchgate.net/profile/Jesus_Gallardo/publication/332153042_El_circulo_hermeneutico_de_la_comprension_en_matematicas_una_propuesta_integradora_para_la_evaluacion_en_el_aula/links/5ca8dc1192851c64bd55e0c2/El-circulo-hermeneutico-de-la-comprension-en-matematicas-una-propuesta-integradora-para-la-evaluacion-en-el-aula.pdf

Gallardo, A. M. (2018). *La controversia Chomsky-Skinner*. Universidad Nacional Autónoma de México. Recuperado de: https://books.google.com/books?hl=es&lr=lang_es&id=oQqnDwAAQBAJ&oi=fnd

&pg=PT2&dq=skinner+teoria+conductista&ots=QWM3GdnLwh&sig=98gXMvoz1yfisxOQaUlxBK0XuXI

Gangoso, Z. (2016). Investigaciones en resolución de problemas en ciencias. *Investigações em ensino de ciências*, *4*(1), 7-50.Recuperado de: https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/view/609

García García, J. J., & Perales Palacios, F. J. (2006). ¿ Cómo usan los profesores de Química las representaciones semióticas?. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*. Recuperado de: http://200.24.17.68:8080/jspui/handle/123456789/2690

García, J., Segovia, I., & Lupiáñez, J. L. (2012). Antecedentes y fundamentación de una investigación sobre errores en la resolución de tareas algebraicas. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/2016/

García, L. I., & Campuzano, C. M. (2014). Representaciones semióticas sobre el número racional. *Magistro*, *8*(15), 3.Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5023854

García-García, J., Rodríguez, F. M., & Navarro, C. (2015). Las estrategias utilizadas por los niños Tee Savi en la resolución de problemas aritméticos. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *18*(2), 213-244. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362015000200004

Gascón, J., Bosch, M., & Ruiz-Munzón, N. (2017). El problema del álgebra elemental en la teoría antropológica de lo didáctico. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/11175/

Gil Osorio, J. E., & Mercado Arrieta, M. E. (2019). Interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita a partir del trabajo cooperativo. Recuperado de: http://bibliotecadigital.udea.edu.co/handle/10495/10884

Giovannini, E. N. (2014). Geometría, formalismo e intuición: David Hilbert y el método axiomático formal (1891-1905). Recuperado de: https://ri.conicet.gov.ar/handle/11336/15437

Giudici Fernández, B. (2019). El papel de los esquemas en la lectura. *Actio Nova: Revista de Teoría de la Literatura y Literatura Comparada*. Recuperado de: https://repositorio.uam.es/handle/10486/689700

Godino, J. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. Recuperado de: https://digibug.ugr.es/handle/10481/45152

Godino, J. D. (2010). Hacia una teoría de la instrucción matemática significativa. *Documento de trabajo del curso de doctorado "Teoría de la*

educación Matemática. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/05_InstruccionMS.pdf

Godino, J. D. (2010). Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático. *Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada*. Recuperado de: http://www.academia.edu/download/35782583/marcos_teoricos_ddm.pdf

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didactica de la Matematica. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/11194/

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/11194/

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), 127-135. Recuperado de: https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355. Recuperado de: https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355. Recuperado de: https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355. Recuperado de: https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

Godino, J. D., & Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática. Recuperado de: http://www.univermedios.com/wp-content/uploads/2018/08/Razonamiento-algebraico-y-su-didactica-para-maestros.pdf

Godino, J. D., Aké, L. P., Contreras, A., Díaz, C., Estepa, A. Blanco, T. F., Lacasta, E., Lasa, A., Neto, T., Oliveras, M. L. & Wilhelmi, M. R. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. Enseñanza de las Ciencias, 33 (1), 127 - 150. ISSN: 0212-4521.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*, 127-135. Recuperado de: https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V., & Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/8859/

Godino, J. D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico elemental. BOLEMA, 26 (42B), 483-511. Recuperado de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291223574005

Godino, J. D., Font, V., & Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones: Facultad de Educación y Humanidades del Campus de Melilla*, (38), 25-48. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2763091.pdf

Godino, J. D., Font, V., Contreras, Á., & Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *9*(1), 117-150. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362006000100006&script=sci_arttext

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), 90-113. Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/2912/291250692007.pdf

Godino, J. D., Gonzato, M., Cajaraville, J. A., & Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 109-130. Recuperado de: https://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/view/254506

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L. P., Etchegaray, S., & Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (8).Recuperado de: https://www.eriaff.com/index.php/aiem/article/view/105

Godino, J.D., Batanero, C. & Font, V. (2008). Síntesis actualizada del EOS en formato poster; se muestran las fuentes y conexiones con otros marcos teóricos (póster). Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/poster_EOS_19diciembre08.pdf

Gómez, K., & Cordero, F. (2013). La institucionalidad, funcionalidad e historicidad. Elementos para el rediseño del discurso matemático escolar. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/4349/

González, E. M. L., Guerrero, A. C., & Yáñez, J. C. (2015). La resolución de problemas en los libros de texto: un instrumento para su análisis. *Avances de investigación en educación matemática*, (8). Recuperado de: https://www.degren.eu/index.php/aiem/article/view/122

González, H. R. B. (2019, June). Los errores frecuentes que cometen un grupo de estudiantes al utilizar y comprender el significado de las letras en álgebra. Universidad Nacional de Costa Rica. In *I Congreso Internacional de Ciencias Exactas y Naturales*. http://www.eventos.academicos.una.ac.cr/index.php/cicen/ICICEN/paper/view/58

González, J. P. (2013). El esquema. Una estrategia de estudio y aprendizaje. *Educere*, *17*(57), 245-252. Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/356/35630152011.pdf

González, T. (2000). Metodología para la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas: un estudio evaluativo. *Revista de Investigación educativa*, *18*(1), 175-199. Recuperado de: https://revistas.um.es/rie/article/view/121541

Gordón, J., & Arellano, A. S. (2014). Análisis de las convergencias entre las escuelas psicológicas y las teorías del aprendizaje. *Sophia, Colección de Filosofía de la Educación*, (16), 191-205. Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/4418/441846097009.pdf

Guerra, E. D. C. C., Bruña, M. D. P. H., & Alvarado, A. L. M. Taller: el método integrador: la metacognición y la resolución de problemas como herramienta en la enseñanza de la matemática. Recuperado de: http://www.cientec.or.cr/matematica/2012/ponenciasVIII/Elidia-Castillo.pdf

Guerrero Álvarez, L. (2013). El ser humano, un signo en crecimiento semiótica de la subjetividad y moldeamiento de la conducta humana. *REPOSITORIO NACIONAL CONACYT*. Recuperado de: http://192.100.201.228/xmlui/handle/123456789/3702

Guerrero, D., Moreno, Á. D., & Niño, L. (2015). Las representaciones semióticas como medio para entender el álgebra: Una experiencia del análisis del libro Hipertexto 8, sobre los productos notables. *RECME*, *1*(1), 472-476. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/8614/

Guevara, L. M. (2013). Reflexiones sobre las teorías de aprendizaje. *REDHECS: Revista electrónica de Humanidades, Educación y Comunicación Social*, *8*(14), 6-15. Recuperado: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4339400

Gusmão, T. C. R. S. (2006). Los procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: una perspectiva ontosemiótica. Tesis Doctoral, Universidad de Santiago de Compostela. Recuperado de: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Tesis_doctoral_Tania_Gusmao.pdf

Gusmão, T. C. R. S. (2006). Los procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: una perspectiva ontosemiótica. Recuperado de: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Tesis_doctoral_Tania_Gusmao.pdf.

Gusmão, T. C. R. S. (2006). Los procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: una perspectiva ontosemiótica. Recuperado de: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Tesis_doctoral_Tania_Gusmao.pdf.

Gutiérrez Gutiérrez, J. D., & Vargas Velásquez, J. A. (2020). Metacognición y Aprendizaje de las Matemáticas: El Caso de la Función Lineal. Recuperado de: https://repositorio.unillanos.edu.co/handle/001/1589

Gutierrez, R. (2016). Polisemia actual del concepto "modelo mental". Consecuencias para la investigación didáctica. *Investigações em Ensino de Ciências*, *10*(2), 209-226. Recuperado de: http://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/view/517

Gutiérrez, S. G. (2016). Russell y Hegel, una discusión sobre deícticos. *Universitas Philosophica*, *33*(66), 113-127. Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/4095/409544845013.pdf

Guzmán, I. (2010). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 1(1), 5-21. Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/335/33510102.pdf

Hernández, A., & Larios, V. (2010). La resolución de problemas algebraicos como medio para vincular el conocimiento matemático escolar con la vida cotidiana. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/4654/

Hernández, R., Fernández, Collado, A. & Baptista (2014). Metodología de la Investigación. 6ta Edición MrGraw-Hill. Recuperado de: https://periodicooficial.jalisco.gob.mx/sites/periodicooficial.jalisco.gob.mx/files/metodologia_de_la_investigacion_-_roberto_hernandez_sampieri.pdf

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational studies in mathematics*, *27*(1), 59-78. Recuperado de: https://link.springer.com/article/10.1007/BF01284528

Hoyles, C., Krummheuer, G., Ciscar, S. L., Raig, N. P., Potari, D., Setati, M., ... & Rodríguez, A. G. (2012). *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (Vol. 41). Graó. Recuperado de: https://books.google.com/books?hl=es&lr=&id=YNGcCQAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA9&dq=Teor%C3%ADa,+cr%C3%ADtica+y+pr%C3%A1ctica+de+la+educaci%C3%B3n+matem%C3%A1tica&ots=hTgAsyhSVN&sig=A-0CnE98W99uMXFeeKHiMoR9Ls4

Huaynaso, C., Verónica, G., & Mendoza Paye, M. L. (2018). Procesos metacognitivos para la resolución de problemas en el área de matemática en alumnos de segundo grado del nivel secundario de la Institución Educativa "Coronel Gregorio Albarracín" de Tacna, 2008. Recuperado de: http://www.saber.ula.ve/bitstream/123456789/20281/1/articulo15.htm

Huertas Bustos, A. P., Vesga Bravo, G. J., & Galindo León, M. (2014). Validación del instrumento'inventario de habilidades metacognitivas (Mai)'con estudiantes colombianos. *Praxis & Saber*, *5*(10), 56-74. Recuperado de: http://www.scielo.org.co/scielo.php?pid=S2216-01592014000200004&script=sci_abstract&tlng=fr

HURTADO, P. A., GARCIA, M., RIVERA, D. A., & FORGIONY, J. O. (2018). Las estrategias de aprendizaje y la creatividad: Una relación que favorece el procesamiento de la información. *Revista Espacios*, *39*(17). Recuperado de: http://www.revistaespacios.com/a18v39n17/18391712.html

Ibarra Colado, E. (2010). Herbert A. Simon y su monomanía: El comportamiento humano como comportamiento artificial. *Gestión y política pública*, *19*(1), 155-170. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1405-10792010000100005&script=sci_arttext&tlng=pt

Institución Educativa Los Andes (2020). Manual de Convivencia de la Institución Educativa Los Andes. Chigorodó, Antioquia, Colombia.

Institución Educativa Los Andes (2020). Proyecto Educativo Institucional de la Institución Educativa Los Andes. Chigorodó, Antioquia, Colombia.

Institución Educativa Los Andes (2020). Sistema Institucional de Evaluación de la Institución Educativa Los Andes. Chigorodó, Antioquia, Colombia.

Instituto Colombiano Para la Evaluación de la Educación (ICFES, 2018). *Resultados de las pruebas Saber 3, 5, 9 por Establecimiento Educativo*. Recuperado de: https://diae.mineducacion.gov.co/dia_e/

Instituto Colombiano Para la Evaluación de la Educación (ICFES, 2018). *Guía de uso e interpretación de los resultados*. Recuperado de: http://www2.icfesinteractivo.gov.co/investigacionFormulario/docman/estudiantes-y-padres-de-familia/saber-359-estudiantes-y-padres/documentos-juridicos-y-tecnicos-

2017-saber-3-5-y-9/5236-guia-de-interpretacion-de-resultados-saber-3-5-y-9-2018/file?force-download=1

IÑESTA, E. R. (2012). Skinner y la psicología: lo que hizo, lo que no hizo y lo que nos corresponde hacer. *Apuntes de Psicología*, *30*(1-3), 77-91. Recuperado de: http://apuntesdepsicologia.es/index.php/revista/article/view/394

Jara, V. (2012). Desarrollo del pensamiento y teorías cognitivas para enseñar a pensar y producir conocimientos. *Sophia, colección de filosofía de la educación*, (12), 53-66. Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/4418/441846101004.pdf

Johnson-Laird, P. N. (2010). Mental models and human reasoning. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *107*(43), 18243-18250. Recuperado de: https://www.pnas.org/content/107/43/18243.short

Josep, G. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *14*(2), 203-231. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362011000200004

KERNBERG, O. (2012). Mentalización, Mindfulness, Insight, Empatía E Interpretación. Recuperado de: http://www.revistamentalizacion.com/ultimonumero/mentalizacion_mindfulness_insight_empatia_e_interpretacion.pdf

Kieran, C. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *7*(3), 229-240.Recuperado de: https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/download/51268/93013

Klimenko, O. (2009). La enseñanza de las estrategias cognitivas y metacognitivas como una vía de apoyo para el aprendizaje autónomo en los niños con déficit de atención sostenida. Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 1(27). Recuperado de: https://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/100

Lacasa, P. (2015). *La actividad del sujeto en el proceso de equilibración de las estructuras cognoscitivas en Jean Piaget* (Doctoral dissertation, Universidad Complutense de Madrid). Recuperado de: https://eprints.ucm.es/52737/1/5309859548.pdf

Lara Solís, J. H. (2017). Aprendizaje autorregulado y metacognición para potenciar la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico en escolares de secundaria (Master's thesis, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla). Recuperado de: http://repositorioinstitucional.buap.mx/handle/20.500.12371/200

Latorre, A., Del Rincón, D. y Arnal. J (2005). Bases metodológicas de la investigación educativa. Barcelona: Ediciones experiencia. Recuperado de:

https://www.researchgate.net/publication/265594728_Bases_metodologicas_de_la_investigacion_educativa

Lazo Salandía, S. M. (2016). La heurística una estrategia alternativa frente a los procesamientos tradicionales en la resolución de problemas matemáticos aplicada en la asignatura MM-110 del Centro Universitario Regional del Litoral Pacífico. Recuperado de: https://tzibalnaah.unah.edu.hn/handle/123456789/4481

Lazo, M. S. (2015). DAVID AUSUBEL Y su aporte a la educación. *Ciencia Unemi*, *2*(3), 20-23. Recuperado de: http://cienciaunemi.unemi.edu.ec/index.php/cienciaunemi/article/download/126/127

Ley No. 115. Por la cual se expide la Ley General de Educación. Diario Oficial No. 41.214. Bogotá, Colombia, 8 de febrero de 1994. Recuperado de: http://www.secretariasenado.gov.co/senado/basedoc/ley_0115_1994.html

Livia, V. O. (2013). Los criterios epistemológicos en la investigación económica. *Pensamiento crítico*, *18*(1), 063-079. Recuperado de: https://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/econo/article/view/8916

Lizcano, J. P. (2013). Investigación cualitativa de segundo orden y la comprensión de la realidad. *Hallazgos*, *10*(19). https://revistas.usantotomas.edu.co/index.php/hallazgos/article/view/747

Lobato, J. (2014). Why do we need to create a set of conceptual learning goals for algebra when we are drowning in standards. *Epistemic algebraic students: Emerging models of students' algebraic knowing, WISDOMe Monographs*, *4*, 25-47. Recuperado de: http://www.academia.edu/download/39018945/Lobato_MonographChapter.pdf

López Ortiz, R. H. (2016). *Análisis de las leyes de la Gestalt y su aplicación en materiales didácticos para niños de educación inicial II* (Doctoral dissertation, Ecuador-PUCESE-Escuela de Diseño Gráfico). Recuperado de: http://repositorio.pucese.edu.ec/handle/123456789/905

López, A. (2009). La importancia de los conocimientos previos para el aprendizaje de nuevos contenidos. Innovación y Experiencias Educativas. Revista Digital, (16). Recuperado de: http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1316-48212009000300004

López, L., & López, P. (2014) Problemas de comprensión sobre el planteamiento y solución de problemas en algebra .Recuperado de: http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v11/docs/area_14/2554.pdf

Lotero, L. A. A. (2012). Teoría de la carga cognitiva, diseño multimedia y aprendizaje: un estado del arte. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, *5*(10). Recuperado de: https://revistas.javeriana.edu.co/index.php/MAGIS/article/view/4166

Lozano, A. B., Rioboo, A. M. P., Peralbo, M., Brenlla-Blanco, J. C., Fraga, H. M., & Seijas-Ramos, S. (2007). Metas academicas y atribuciones causales del alumnado de educacion secundaria y bachillerato: sus efectos sobre el rendimiento academico. In *IX Congreso internacional galego-portugués de psicopedagoxía* (p. 41). Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/277266847_Metas_academicas_del_alumnado_de_Educacion_Secundaria_Obligatoria_ESO_y_Bachillerato_con_alto_y_bajo_rendimiento_escolar

Martínez Videla, M. V. (2011). *Utilización del método geométrico lineal (MGL) para la resolución de problemas de álgebra elemental*. Granada: Universidad de Granada. Recuperado de: https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/18534/19986026.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Martínez, B. A., Sánchez, J. M., & Pizarro, N. (2020). La representación en la resolución de problemas matemáticos: un análisis de estrategias metacognitivas de estudiantes de secundaria. Uniciencia, 34(1), 263-280.Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7148002

Martínez, G. A. R. (2017). Bisociaciones creativas, sinéctica y pensamiento divergente. *Revista Q*, *8*(15). Recuperado de: https://revistas.upb.edu.co/index.php/revista_Q/article/view/7733

Martínez, G. A. R. (2017). Bisociaciones creativas, sinéctica y pensamiento divergente. *Revista Q*, *8*(15). Recuperado de: https://revistas.upb.edu.co/index.php/revista_Q/article/view/7733

Martinez, S. B., & Brendy, S. (2015). Método Pólya en la resolución de problemas matemáticos. *Quetzaltenango. Escaso Monitoreo y acompañamiento orientado al Desconocimiento de los uso de estrategias*. Recuperado de: http://www.academia.edu/download/54260501/Escalante-Silvia.pdf

Matas, A. (2018). Diseño del formato de escalas tipo Likert: un estado de la cuestión. *Revista electrónica de investigación educativa*, *20*(1), 38-47. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1607-40412018000100038&script=sci_arttext

Mato-Vázquez, D., Espiñeira, E., & López-Chao, V. A. (2017). Impacto del uso de estrategias metacognitivas en la enseñanza de las matemáticas. *Perfiles educativos*, *39*(158), 91-111. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S0185-26982017000400091&script=sci_arttext&tlng=pt

Mejía, M. E., & Londoño, J. A. (2017). Caracterización de estrategias y procedimientos utilizados por los estudiantes de grado undécimo de la Institución Educativa

Gilberto Alzate Avendaño en la solución de situaciones problema en el área de matemáticas, contrastadas con métodos heurísticos de George Polya y Allan Schoenfeld. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/12529/

Mena, A., Abraham, G., Rodríguez, M., Galindo, G., & Golbach, M. (2012). Investigación sobre la calidad de las guias de estudio para la autorregulación del aprendizaje del algebra. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/4163/

Mesa, V. M. (2017). Enseñanza del álgebra: reflexiones para la observación de clase. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/9398/

Mesnil, J. (2015). La desimbolización generalizada. Baudrillard, Lefebvre, Ladrière, Goux, Lipovetsky y Bastide. Recuperado de: http://revistadefilosofia.com/77-10.pdf

Mieles, M. M. B., & Montero, K. L. K. (2012). Metodología basada en el método heurístico de Polya para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos. *Escenarios*, *10*(2), 7-19. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4496526

Mieles, M. M. B., & Montero, K. L. K. (2012). Metodología basada en el método heurístico de Polya para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos. *Escenarios*, *10*(2), 7-19. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4496526

Ministerio de Educación Nacional (MEN). Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas. Bogotá, Colombia, mayo de 2006. Recuperado de: http://cms.mineducacion.gov.co/static/cache/binaries/articles-340021_recurso_1.pdf?binary_rand=1223

Ministerio de Educación Nacional (MEN). Lineamientos Curriculares del Área de Matemáticas. Bogotá, Colombia, 7 de junio de 1998. Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-339975_matematicas.pdf

Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 2006). *Estándares de Competencias Matemáticas.* Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Ministerio de Educación Nacional, MEN, 2020. Sistema Integrado de Matrícula. Recuperado de: https://www.sistemamatriculas.gov.co/simat/app

Molina, A. M. (2011). *Aptitud viso-espacial en tests dinámicos* (Doctoral dissertation, Universidad Autónoma de Madrid). Recuperado de: https://pdfs.semanticscholar.org/9a82/d047ec64724f838a57ebdae2f77139557c82.pdf

Molina, J. (2014). Aprendizaje significativo y resolución de problemas de ecuaciones de primer grado. Recuperado de: http://recursosbiblio.url.edu.gt/tesiseortiz/2014/05/86/Lopez-Juan.pdf

Molina, M. S. (Eds.). (2007). *Graph algebras: bridging the gap between analysis and algebra*. Universidad de Málaga. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=372372

Mondino, G. M. (2014). Modelos conceptuales y mentales Elementos para repensar la enseñanza y el aprendizaje. *Enfoques*, *26*(1), 57-78. Recuperado de: http://publicaciones.uap.edu.ar/index.php/revistaenfoques/article/view/103

Montealegre, R. (2007). La solución de problemas cognitivos. Una reflexión cognitiva sociocultural. *Avances en psicología Latinoamericana*, *25*(2), 20-39. Recuperado de: https://revistas.urosario.edu.co/index.php/apl/article/view/1205

Montealegre, R. (2013). *Manual orientador en solución de problemas cognitivos* (No. 6). U. Externado de Colombia. Recuperado de: https://books.google.com/books?hl=es&lr=&id=5eFHAQAAQBAJ&oi=fnd&pg=PP3&dq=ernst+newell+y+simon&ots=gTqJtSkzgG&sig=AO3nXRyNoNuHBu-1O2hUm4AKeeQ

Montealegre, R. A. C., & Pinzon, E. V. (2015). Las letras en el álgebra como número general en estudiantes colombianos de grado 7° de educación formal. In *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Recuperado de: http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/view/889

Montes, M., Flores, E., Carmona, E., Huitrado, J. L., & Flores, P. (2014). Reflexiones sobre la naturaleza del conocimiento, las creencias y las concepciones. *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*, 9-22. Recuperado de: https://www.researchgate.net/profile/Miguel_Montes/publication/271205342_Reflexiones_sobre_la_naturaleza_del_conocimiento_las_creencias_y_las_concepciones/links/5553144108ae980ca606d43e.pdf

Montes, P., Carrillo, C., & López, J. M. (2018). La noción de equivalencia en alumnos con discapacidad intelectual: construcción de su pensamiento algebraico. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/13742/

Mora Ramirez, R. F. (2016). La evolución de la paradoja de las clases propuesta por Bertrand Russell. Recuperado de: http://cybertesis.unmsm.edu.pe/handle/cybertesis/5197

Morales, E. (2017). Enseñanza de la matemática por la mayéutica. *Praxis investigativa ReDIE: revista electrónica de la Red Durango de Investigadores Educativos*, *9*(17), 53-60.Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6560023

Morales, Y. A. (2018). Revisión teórica sobre la evolución de las teorías del aprendizaje. *Revista Vinculando*. Recuperado de: http://vinculando.org/educacion/revision-teorica-la-evolucion-las-teorias-del-aprendizaje.html

Moreno, A. N., & Daza, B. Y. (2014). Incidencia de estrategias metacognitivas en la resolución de problemas en el área de la matemática (Doctoral dissertation, Pontificia Universidad Javeriana). Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/10689/

Moreno, A. N., & Daza, B. Y. (2014). *Incidencia de estrategias metacognitivas en la resolución de problemas en el área de la matemática* (Doctoral dissertation, Pontificia Universidad Javeriana). Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/10689/

Moreno, G. (2017). Ernst Cassirer. Hacia una comprensión simbólica del lenguaje. *Ágora-Trujillo. Revista del Centro Regional de Investigación Humanística, Económica y Social.*, *19*(37), 89-119. Recuperado de: https://www.aacademica.org/gendrik.moreno/2

Moreno, M., Rubí, G., & Pou, S. (2015). Panorama y actualidad de la enseñanza basada en la resolución de problemas en matemáticas. *Quaderns Digitals*, *63*, 45-62.Recuperado de: https://quadernsdigitals.net/datos_web/hemeroteca/r_1/nr_810/a_10945/10945.pdf

Moreno, M., Rubí, G., & Pou, S. (2015). Panorama y actualidad de la enseñanza basada en la resolución de problemas en matemáticas. *Artículo en la Revista Quaderns Digitals*, *63*, 45-62. Recuperado de: https://quadernsdigitals.net/datos_web/hemeroteca/r_1/nr_810/a_10945/10945.pdf

Morillo, D., Moreno, L., & Díaz, J. (2014). Metodologías Analíticas y Heurísticas para la Solución del Problema de Programación de Tareas con Recursos Restringidos (RCPSP): una revisión Parte 1. *Ingeniería y Ciencia*, *10*(19), 247-271. Recuperado de: http://publicaciones.eafit.edu.co/index.php/ingciencia/article/view/1982

Muñoz, J. A., Erazo, L. G., & Marmolejo, G. A. (2013). La conversión en la resolución de ecuaciones lineales de primer grado con una incógnita. Un análisis semiótico de libros de texto. *Revista científica*, 675-678. Recuperado de: https://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/article/download/7750/9559

Murillo, J. (2011). Métodos de investigación de enfoque experimental. *USO LOS Recur. DIDÁCTICOS POR PARTE LOS Maest. Maest. Prim. CUARTO AÑO BÁSICO LAS Esc. PARROQUIA*, *5*. Recuperado de: http://www.postgradoune.edu.pe/pdf/documentos-academicos/ciencias-de-la-educacion/10.pdf

Naranjo, L. M. J., & Gallardo, V. P. S. (2014). La metacognición y su aplicación en herramientas virtuales desde la práctica docente. *Sophia*, (16), 300-313. Recuperado de: https://sophia.ups.edu.ec/index.php/sophia/article/view/16.2014.13

Naranjo, W. E. (2015). La letra como número generalizado: algunos errores de estudiantes de grado noveno. *Revista Ejes, 3,* 37-42. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/9794/

Navas, R. M., Aragones, F. A., & Payares, A. C. (2015). Aprendizaje basado en Proyectos: Estrategia Pedagógica en la Enseñanza de las Matemáticas. *Revista Méthodos, 13*(13).Recuperado de: http://colmayorbolivar.edu.co/sitios/OpenJournalSys/index.php/Methodos/article/view/12

Nieto, J. H. (2005). Resolución de problemas, Matemática y Computación. *Enl@ ce: Revista Venezolana de Información, Tecnología y Conocimiento*, *2*(2), 37-45.Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/823/82320204.pdf

Nieto, L. B., & Lizarazo, J. A. C. (2013). La Resolución de Problemas como contenido en el Currículo de Matemáticas de Primaria y Secundaria. *Campo Abierto. Revista de Educación*, *32*(1), 137-156. Recuperado de: https://mascvuex.unex.es/revistas/index.php/campoabierto/article/view/1393

Nieto, L. B., & Lizarazo, J. A. C. (2013). La Resolución de Problemas como contenido en el Currículo de Matemáticas de Primaria y Secundaria. *Campo Abierto. Revista de Educación*, *32*(1), 137-156. Recuperado: https://mascvuex.unex.es/revistas/index.php/campoabierto/article/view/1393

Nieva Chaves, J. A., & Martínez Chacón, O. (2019). Confluencias y rupturas entre el aprendizaje significativo de Ausubel y el aprendizaje desarrollador desde la perspectiva del enfoque histórico cultural de LS Vigotsky. *Revista Cubana de Educación Superior*, *38*(1). Recuperado de: http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0257-43142019000100009

Núñez Rojas, E. F. (2017). Representación semiótica como estrategia didáctica y competencias matemáticas en estudiantes del segundo grado de secundaria de la Institución Educativa Privada Educare de Chosica, Lima 2017. Recuperado de: http://repositorio.une.edu.pe/handle/UNE/1340

Núñez, R. P., Hernández-Suárez, C. A., & Contreras, L. A. J. (2017). Representación semiótica de la noción de función: concepciones de los estudiantes que transitan del colegio a la universidad-Semiotic Representation of the notion of function: Conceptions of Students who pass from High School to College. Revista Panorama, 11(20), 33-44. Recuperado de: https://journal.poligran.edu.co/index.php/panorama/article/view/1008

OCDE (2017), *Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias*, Versión preliminar, OECD Publishing, Paris. Recuperado

de: https://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/ebook%20-%20PISA-D%20Framework_PRELIMINARY%20version_SPANISH.pdf

Olazábal, A. (2013). *Categorías en la traducción del lenguaje natural al algebraico de la matemática en contexto* (Doctoral dissertation).Recuperado de: http://www.repositoriodigital.ipn.mx/handle/123456789/11608

Orama, F. A. L., & Guzman, R. R. R. (2019). Estrategia metodológica para desarrollar la habilidad resolver problemas matemáticos en la secundaria básica. *Revista de Investigación Académica Sin Frontera: División de Ciencias Económicas y Sociales*, (29), 38-38. Recuperado de: http://revistainvestigacionacademicasinfrontera.com/sistema/index.php/RDIASF/article/view/207

Ordenanza No. 30. Por medio de la cual se adopta el nuevo modelo educativo para los antioqueños, y se pone en marcha el Plan Educativo Antioquia 2030. Antioquia, Colombia, 12 de julio de 2019. Recuperado de: http://www.asambleadeantioquia.gov.co/2016/index.php?option=com_jdownloads&task=download.send&id=2257&catid=147&m=0&Itemid=0

Ordóñez, L. N. (2017). Representaciones Semióticas del Concepto de Ecuación Lineal con una Variable a partir de la implementación de un juego didáctico. Amazonia Investiga, 6(11), 38-52. Recuperado de: https://amazoniainvestiga.info/index.php/amazonia/article/view/598

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO). Declaración mundial sobre educación para todos y marco de acción para satisfacer las necesidades básicas de aprendizaje. Jomtiem, Tailandia, 5 al 9 de marzo de 1990. Recuperado de: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000127583_spa

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO). Foro Mundial sobre la Educación, Dakar, Senegal: informe final. París, Francia, 26-28 de abril de 2000. Recuperado de: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000121117_spa

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO). La Educación para Todos, 2000-2015: logros y desafíos, informe de seguimiento de la EPT en el mundo, resumen. Paris, Francia, 2015. Recuperado de: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000232565_spa

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO). SERCE: Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo: los aprendizajes de los estudiantes de América Latina y el Caribe; reporte técnico. Santiago, Chile, 2009. Recuperado de: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000190297

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO). Aportes para la enseñanza de la matemática. Santiago, chile, enero de 2009. Recuperado de: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000180273

Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos (OCDE). Estudios Económicos de la OCDE: Colombia 2019, OECD Publishing, Paris. https://doi.org/10.1787/805f2a79-es

Ospina García, D. (2012). Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto funcional lineal. Recuperado de: http://167.249.43.80/jspui/handle/11182/165

Ospina Muñoz, G., & Reyes Mosquera, D. (2018). Nociones conceptuales de función en los estudiantes de noveno grado. Recuperado de: http://repository.udem.edu.co/handle/11407/4955

Osses Bustingorry, S., & Jaramillo Mora, S. (2008). Metacognición: un camino para aprender a aprender. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, *34*(1), 187-197. Recuperado de: https://scielo.conicyt.cl/scielo.php?pid=S0718-07052008000100011&script=sci_arttext&tlng=e

Otero, M. R. (2016). Psicología cognitiva, representaciones mentales e investigación en enseñanza de las ciencias. *Investigações em Ensino de Ciências*, *4*(2), 93-119. Recuperado de: https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/view/651

Otero, M. R., Papini, C., & Elichiribehety, I. (2016). Las representaciones mentales y la resolución de un problema: Un estudio exploratorio. *Investigaçoes em Ensino de Ciencias*, *3*(1), 47-60. Recuperado de: https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/view/624

Ottonello, S. I., Veliz, M., & Ross, S. (2011). Estrategias metacognitivas en el aprendizaje del álgebra. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/4838/

Páez, A. C. (2011). Piaget: lenguaje, conocimiento y educación. *Revista colombiana de educación*, (60), 71-91. Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/4136/413635253005.pdf

Palacio, O. J. (2013). Génesis del álgebra. *Pedagogía en Acción*, *1*, 97-100. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/10325/

Palarea, M. M. (2012). Introducción al seminario II sobre fines de la investigación en pensamiento algebraico. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/11195/

Paniza, Q., & David, H. (2018). Práctica Pedagógica Innovadora Apoyada por TIC Fundamentada en la EPC para trabajar Ecuaciones de Primer Grado con Estudiantes de Noveno Grado en la IED Bosanova (Master's thesis, Universidad de La Sabana). Recuperado de: https://intellectum.unisabana.edu.co/handle/10818/33193

Pellón, R. (2013). Watson, Skinner y Algunas Disputas dentro del Conductismo. *Revista colombiana de psicología*, *22*(2), 389-399. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4703413.pdf

Peña Correal, T. E. (2010). ¿ Es viable el conductismo en el siglo XXI?. *Liberabit*, *16*(2), 125-130. Recuperado de: http://www.scielo.org.pe/scielo.php?pid=S1729-48272010000200002&script=sci_arttext

Peña-Correal, T. E. (2014). El legado del Manifiesto Conductista: 100 años después. *Avances en Psicología Latinoamericana*, *32*(1), 1-3. Recuperado: http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1794-47242014000100001

Pérez Ariza, K., & Hernández Sánchez, J. E. (2017). La elaboración de preguntas en la enseñanza de la comprensión de problemas matemáticos. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *20*(2), 223-248. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362017000200223&script=sci_abstract&tlng=fr

Pérez González, F. J. (2000). Cálculo Diferencial e Integral de Funciones de una variable. Recuperado de: http://up-rid2.up.ac.pa:8080/xmlui/handle/123456789/1508

Pérez, Y., & Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos: Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de investigación*, *35*(73), 8-26. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3897810

Pérez, Y., & Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos: Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de investigación*, *35*(73), 8-26. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3897810

Pérez, Y., & Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos: Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de investigación*, *35*(73), 8-26. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3897810

Pérez, Y., & Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos: Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de investigación*, *35*(73), 8-26. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3897810

Pérez-Acosta, G. (2018). Las representaciones mentales como herramienta para la interpretación musical y sus características desde la práctica instrumental: un estudio en el marco de la ciencia cognitiva. *Epistemus. Revista de Estudios en*

Música, Cognición y Cultura, *6*(1), 46-75.Recuperado de: https://revistas.unlp.edu.ar/Epistemus/article/view/3942

Piaget, J. (2019). *Psicología y pedagogía*. Siglo XXI Editores. Recuperado de: https://books.google.com/books?hl=es&lr=&id=2m7DDwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PT5&dq=piaget&ots=VwDkoYgu84&sig=E5DVnehRHf7hcqCIzps4bduxois

Piñeiro, J. L., Pinto, E., & Díaz-Levicoy, D. (2015). ¿ Qué es la Resolución de Problemas?. *Boletín REDIPE*, *4*(2), 6-14. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/6495/

Polya, G. (1965). *Cómo Plantear y Resolver Problemas* (NO. 04; QA11, P6.). México: Trillas. Recuperado de: http://www.academia.edu/download/38419233/ComoPlantearYResolverProblemasG.Polya.pdf

Popayán, Y. (2016). Situaciones didácticas en el aprendizaje de las expresiones algebraicas para la conversión del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico (Doctoral dissertation, Universidad ICESI). Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/10645/

Pozo, J. I. (2016). La psicología cognitiva y la educación científica. *Investigaçoes em ensino de ciências*, *1*(2), 110-131. Recuperado de: https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/view/639

Pozo, J. I. (2016). La psicología cognitiva y la educación científica. *Investigaçoes em ensino de ciências*, *1*(2), 110-131. Recuperado de: https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/view/639

Prieto Ursúa, M. (2015). Aprendizaje y condicionamiento humano. Recuperado de: https://repositorio.comillas.edu/xmlui/bitstream/handle/11531/2472/E000004221.pdf?sequence=1

Prieto, C. D., Sánchez, J. N. G., Martín, J. G., & Sanz, D. I. P. (2014). Dificultades de aprendizaje en las matemáticas. Prevención y actuación. *Prevención en dificultades del desarrollo y del aprendizaje*, 235-250. Recuperado de: https://www.researchgate.net/profile/Jesus_Garcia33/publication/261703968_Dificultades_de_aprendizaje_en_las_matematicas_prevencion_y_actuacion/links/56c5bfc108ae7fd4625c5612/Dificultades-de-aprendizaje-en-las-matematicas-prevencion-y-actuacion.pdf

Puig, L. (2019). Observaciones acerca de la historia de las matemáticas en la matemática educativa. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/14514/

Pupo, A. J. I. (2011). Desarrollo de la competencia resolución de problemas desde una didáctica con enfoque metacognitivo. Zona próxima, (15), 2-21.Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6398336

Quezada, V. E. (2013). A cien años de "Psicología como la ve un conductista". *Revista de Psicología*, *22*(1), ág-99. Recuperada: https://revistas.uchile.cl/index.php/RDP/article/view/30022

Quintero García, E. A. (2014). Dificultades que identifican los estudiantes a través de la metacognición en el aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria. Recuperado de: http://repositorio.autonoma.edu.co/xmlui/handle/11182/236

Quispe Imaña, J. R. (2020). Guía de resolución de problemas con las operaciones básicas para incrementar los logros de los aprendizajes en los estudiantes del 2° grado de educación primaria de la IE N° 16113 "Señor de los Milagros" Hualatan-Chontali. Recuperado de: http://repositorio.unprg.edu.pe/handle/UNPRG/8412

Radford, L. (2010, July). Elementary forms of algebraic thinking in young students. In *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 73-80). Recuperado de: https://www.academia.edu/download/54435976/20_PME342010_3.pdf

Radford, L., & André, M. (2009). Cerebro, cognición y matemáticas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *12*(2), 215-250. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362009000200004&script=sci_arttext

Radford-Hernandez, L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación: el caso de la didáctica de las matemáticas. *La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación: el caso de la didáctica de las matemáticas.*, 63-79.

Rahman, S. (2015). Henri Poincaré y El Ir y Venir de la Filosofía a las Matemáticas Sobre Contenido, Arquitectura Conceptual y Juegos al Alcance Humano. Notas para una Lectura Contemporánea. Recuperado de: https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01229018/

Raynaudo, G., & Peralta, O. (2017). Cambio conceptual: una mirada desde las teorías de Piaget y Vygotsky. *Liberabit*, *23*(1), 110-122. Recuperado de: http://www.scielo.org.pe/scielo.php?pid=S1729-48272017000100011&script=sci_arttext&tlng=en

Retamozo, M. (2012). Constructivismo: epistemología y metodología en las ciencias sociales. *En Tratado de metodología de las ciencias sociales: Perspectivas actuales. DF (México): Fondo de Cultura Económica.* Recuperado de: https://www.aacademica.org/martin.retamozo/20

Rey, J., Quiroga, P., & Martínez, G. (2012). Generalización y simbolización de procesos de medición: una herramienta en la iniciación al álgebra. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/2645/

Reyes, F. E. G., & Toro, M. E. N. (2016). Estado del arte en el tema de los organizadores gráficos en la representación de esquemas y diagramas. *Revista UNIMAR*, *34*(2), 43-60. Recuperado de: https://pdfs.semanticscholar.org/0bfe/28c19cc4ce004d74966f6d2c9fb3585fe994.pdf

Reynaga Alarcón, O., & Ruiz Arango, I. (2014). Influencia de las aplicaciones de los métodos de Polya y Aprendizaje Basado en Problemas en el rendimiento matemático de los estudiantes del IEP Jean Piaget del distrito de Carabayllo. Recuperado: http://repositorio.uigv.edu.pe/handle/20.500.11818/360

Ricaldi, M. (2013). Análisis del tratamiento del álgebra en el primer año de secundaria: su correspondencia con los procesos de algebrización y modelización. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/3796/

Rico, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de educación*, 275-294. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/531/

Robine, J. M. (2013). *Contacto & Relación en Psicoterapia: Reflexiones sobre terapia Gestalt*. Cuatro Vientos. Recuperado de: https://books.google.com/books?hl=es&lr=lang_es&id=7NRGAwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA97&dq=transferencia+gestalt&ots=X_AGPrVl9S&sig=a-H7JVV9zTuOdxnxEunkOMHpyUc

Rocca, A. V. (2014). Lógica paraconsistente, paradojas y lecturas parasitarias: Del virus del lenguaje a las lógicas difusas. *Eikasia: Revista de Filosofía*, (58), 43-63. Recuperado de: http://www.revistadefilosofia.org/58-01.pdf

Rodríguez Domingo, S., Molina González, M., Cañadas Santiago, M. C., & Castro Martínez, E. (2015). Errores en la traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal. *PNA*. Recuperado de: http://www.redined.educacion.es/xmlui/handle/11162/111221?locale-attribute=eu

Rodríguez Peña, A. (2010). Kurt Gödel: el límite lógico de la Modernidad. Recuperado de: https://repositorio.uam.es/bitstream/handle/10486/6138/37339_31.pdf?sequence=1

Rodríguez Quintana, E. (2006). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de matemáticas una propuesta integradora desde el enfoque antropológico*. Universidad Complutense de Madrid, Servicio de Publicaciones. Recuperado de: https://eprints.ucm.es/7256/

Rodríguez, E. (2005). Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de matemáticas una propuesta integradora desde el enfoque antropológico. Universidad Complutense de Madrid. Recuperado de: https://elibro.net/es/lc/umecit/titulos/88735

Rojano, T. (2010). Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 75*, 5-20. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/3553/

Rojas Garzón, P. J. (2012). Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos. Recuperado de: http://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/16315

Rozo, O. P., & Pérez, V. R. D. (2014). Didáctica de las matemáticas y tecnologías de la información y la comunicación. *Educación y desarrollo social*, *8*(2), 60-81. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5386136

Ruiz Moreno, M.(2016). Diseño de una propuesta metodológica que contribuya al lenguaje algebraico, su precisión e importancia para la enseñanza-aprendizaje del álgebra. Facultad de Ciencias. Recuperado de: https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/59655

Ruiz, A., & Chavarría, J. (2003). Los "estándares" en la educación matemática de los Estados Unidos: contexto, reforma y lecciones. *Uniciencia, 20*(2), 379-391. Recuperado de: https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/5915

Ruiz, R. M., Luque, F. S., & García, P. A. B. (2015). Formación universitaria e intervención social: una contribución de las técnicas gestálticas. *Revista costarricense de psicología, 34*(2), 130-146.Recuperado de: https://www.scielo.sa.cr/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1659-29132015000200130

Saldarriaga-Zambrano, P. J., Bravo-Cedeño, G. D. R., & Loor-Rivadeneira, M. R. (2016). La teoría constructivista de Jean Piaget y su significación para la pedagogía contemporánea. *Dominio de las Ciencias*, *2*(3 Especial), 127-137. Recuperado de: http://dominiodelasciencias.com/ojs/index.php/es/article/view/298

Samamé Toro, N. (2018). Programa de estrategias Meta cognitivas basado en las teorías transaccional psicolingüística de Rosemblat y de Rumelhart para el Mejoramiento de la Comprensión Lectora en niños del 5° Grado de Educación Primaria de la Institución Educativa Nª 16506 "San José" del centro poblado Puerto Ciruelo de San Ignacio, Cajamarca, 2012. Recuperado de: http://repositorio.unprg.edu.pe/handle/UNPRG/6144

Sanabria Rodríguez, L., Ibáñez Ibáñez, J., & Valencia Vallejo, N. (2016). Ambiente metacognitivo digital para apoyar el aprendizaje de las matemáticas. *Papeles*, *7*(14), 42-54. Recuperado de: http://csifesvr.uan.edu.co/index.php/papeles/article/view/558

Sanabria Rodríguez, L., Ibáñez Ibáñez, J., & Valencia Vallejo, N. (2016). Ambiente metacognitivo digital para apoyar el aprendizaje de las matemáticas. *Papeles*, *7*(14), 42-54. Recuperado de: http://csifesvr.uan.edu.co/index.php/papeles/article/view/558

Sánchez López, F. (2013). *Estrategias de resolución geométrica por Insight Un estudio exploratorio*. Universitat Autònoma de Barcelona. Recuperado de: https://ddd.uab.cat/record/113970

Sánchez Texis, D. (2017). *El ciclo de aprendizaje autorregulado con problemas de álgebra en Nivel Medio Superior: La viabilidad de la implementación y el efecto en el razonamiento lógico* (Master's thesis, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla). Recuperado de: http://repositorioinstitucional.buap.mx/handle/20.500.12371/99

Santos, L. (2013). O raciocínio matemático-Evocando Paulo Abrantes. *Investigação em Educação Matemática*, 15-30. Recuperado de: https://www.researchgate.net/profile/Leonor_Santos3/publication/261214625_O_raciocinio_matematico_-_Evocando_Paulo_Abrantes/links/5927f075aca27295a80292e5/O-raciocinio-matematico-Evocando-Paulo-Abrantes.pdf

Sanz, A. Á. F. (2016). La terapia Gestalt al servicio de la educación emocional. In *Inteligencia Emocional y Bienestar II: reflexiones, experiencias profesionales e investigaciones* (pp. 258-271). Ediciones Universidad de San Jorge. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5572554

Sastre-Riba, S. (2012). Alta capacidad intelectual: perfeccionismo y regulación metacognitiva. *Rev Neurol*, *54*(Supl 1), S21-9. Recuperado de: https://webdocente.altascapacidades.es/Modulo-3-Diagnostico/perfeccionismo.pdf

Secretaría de Educación de Antioquia, SEDUCA, 2020. Caracterización sociodemográfica de las instituciones educativas del municipio de Chigorodó. Recuperado de: http://www.seeduca.gov.co/sala-de-prensa/archivo-de-prensa/item/5166-caracterizacion-sociodemografica

Sigarreta, J. M., Rodrıguez, J. M., & Ruesga, P. (2006). La resolución de problemas: una visión histórico-didáctica. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *13*(1), 53-66. Recuperado de: https://www.researchgate.net/profile/Jose_Sigarreta/publication/228377845_La_resolucion_de_problemas_una_vision_historico-didactica/links/55ebaa2508ae21d099c5ea5d.pdf

Sigarreta, J.M., Rodríguez, J.M. y Ruesga P. (2006) La resolución de problemas: una visión histórico didáctica. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 13(1), 53-66. Recuperado de: emis.de/journals/BAMV/conten/vol13/pruesga.pdf

Silveira Donaduzzi, D. S. D., Colomé Beck, C. L., Heck Weiller, T., Nunes da Silva Fernandes, M., & Viero, V. (2015). Grupo focal y análisis de contenido en investigación cualitativa. *Index de Enfermería*, *24*(1-2), 71-75. Recuperado de: http://scielo.isciii.es/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1132-12962015000100016

Sirvent Urquidi, F. M. (2015). Intuicionismo y formalismo en la filosofía de la matemática de I. Kant y H. Hilbert. Sobre función y significado de la intuición matemática. Recuperado de: https://addi.ehu.es/handle/10810/15991

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/1247/

Soto, B. D. G., & Vallori, A. B. (2011). UVE de Gowin instrumento metacognitivo para un aprendizaje significativo basado en competencias. *IN. Investigació i Innovació Educativa i Socioeducativa*, *3*(1), 51-62. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3634436

Soto, C. M. (2010). El Sistema de Calificación Cualitativa para la Prueba Gestáltica de Bender-Modificada: Estudio preliminar de sus propiedades psicométricas. *Avances en Psicología Latinoamericana*, *28*(1), 63-73. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3329323

Soto, D., & Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión socioepistemológica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*(50), 1525-1544. Recuperado de: http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-636X2014000301525&script=sci_arttext

Soto, J. G., Vera, D. A., & González, J. A. (2015). Un estudio exploratorio sobre el uso de DragnBox Algebra© como una herramienta para la enseñanza de la resolución de ecuaciones. *Ensayos: Revista de la Facultad de Educación de Albacete*, *30*(1), 33-44. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5163596

Soto-Hernández, M. E. (2019). La resolución de problemas matemáticos para lograr un aprendizaje desarrollador de los alumnos de primer grado de secundaria. *Maestro y Sociedad*, *16*(4), 915-928. Recuperado de: https://maestroysociedad.uo.edu.cu/index.php/MyS/article/view/5081

Suárez, E. A. G. (2012). Teoría euclidiana de la proporción en la construcción de los números reales:¿ un asunto útil para un profesor?. *Tecné Episteme y Didaxis: TED*, (31). Recuperado de: https://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/ted/article/view/1651

Suarez, O. (2013). Una aproximación a la heuristica y metaheuristicas. *INGE@ UAN-Tendencias en la Ingeniería*, *1*(2). Recuperado de: http://revistas.uan.edu.co/index.php/ingeuan/article/view/198

Suriá Martínez, R. (2010). Tema 2: Socialización y desarrollo social. *Psicología Social (Sociología)*. Recuperado de: http://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/14285/1/TEMA%202%20SOCIALIZACI%C3%93N%20Y%20DESARROLLO%20SOCIAL.pdf

Torrecilla, J. M. (2006). La entrevista. *Madrid, España: Universidad Autónoma de Madrid*. Recuperado de: http://www.uca.edu.sv/mcp/media/archivo/f53e86_entrevistapdfcopy.pdf

Torres, L. A. (2010). *Fenomenología histórica del concepto de ecuación y potencialidades de su uso en la escuela* (Doctoral dissertation, Maestría en educación con énfasis en educación matemática-Universidad del Valle). Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/11580/

Troncoso Giron, O. M. (2013). Estrategias metacognitivas en el aprendizaje de las matemáticas: una intervención en el aula para determinar las implicaciones de la implementación de estrategias metacognitivas en el aprendizaje de las matemáticas. Recuperado de: http://repository.ut.edu.co/handle/001/1073

Trujillo, P. A., Castro, E., & Molina, M. (2009). Un estudio de casos sobre el proceso de generalización. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/1585/

Txabarri, J. G. (2017). La resolución de problemas aritmético-algebraicos y las estrategias de aprendizaje en matemáticas. Un estudio en educación secundaria obligatoria (ESO). RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 20(2), 1. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6158572

Urdiain, I. E. (2006). Matemáticas resolución de problemas. *Navarra: Fondo de publicaciones del gobierno de Navarra*. Recuperado de: http://ceip-parquedelamuneca.centros.castillalamancha.es/sites/ceip-parquedelamuneca.centros.castillalamancha.es/files/descargas/Matematicas_ResolucionProblemasInstrumenta2.pdf

Valencia Salinas, P., & Diaz Villaneda, E. (2019). Estrategia didáctica para fortalecer el Razonamiento Algebraico fundamentada en la Etnomatemática.Recuperado de: http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/handle/123456789/3533

Vega-Castro, D., Molina, M., & Castro, E. (2011). Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/1841/

Velasco, M. P. (2012). Descartes y la Gestalt: La ilusión encerrada en las imágenes. *Numeros. Revista de didáctica de las matemáticas*, *81*, 61-66. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/3635/

Veloz, N. S., Reyes, O. V., Rodríguez, M. L., & Aguirre, Z. B. P. (2020). Los esquemas conceptuales y las relaciones interdisciplinares en el proceso de enseñanza aprendizaje de las asignaturas escolares.(Revisión). *Roca: Revista Científico-Educaciones de la provincia de Granma*, *16*(1), 109-121. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/7414315.pdf

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2), 3. Recuperado de: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/122730/mod_resource/content/1/art_vergnaud_espanhol.pdf

Vergnaud, G. (2016). ¿ En qué sentido la teoría de los campos conceptuales puede ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo?. *Investigações em ensino de ciências*, *12*(2), 285-302. Recuperado de: https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/view/475

Viñoles, M. (2013). Conductismo y constructivismo: modelos pedagógicos con argumentos en la educación comparada. *Consejo de Redacción*, *2*(3), 7. Recuperado de: http://files.revista-humanartes.webnode.es/200000009-30ff132f29/HumanArtes%20N%C2%B0%203%20-%20Julio-Diciembre%202013.pdf#page=7

Viñoles, M. (2013). Conductismo y constructivismo: modelos pedagógicos con argumentos en la educación comparada. *Consejo de Redacción*, *2*(3), 7. Recuperado de: http://files.revista-humanartes.webnode.es/200000009-30ff132f29/HumanArtes%20N%C2%B0%203%20-%20Julio-Diciembre%202013.pdf#page=7

Williams, L. C., & Gómez Chacón, I. M. (2007). Sistema de creencias sobre las matemáticas en alumnos de secundaria. *Revista Complutense de Educación*, *18*(2), 125-143. Recuperado de: https://eprints.ucm.es/21633/1/IGomez14.pdf

Wilson Bello, M. G., Velázquez, O. J. R., & Sigarreta, J. M. (2016). INCIDENCIA DE LOS PROBLEMAS LÓGICOS MATEMÁTICOS EN LA MOTIVACIÓN HACIA LA MATEMÁTICA. *Revista Premisa*, *18*(70). Recuperado de: http://www.soarem.com.ar/Documentos/70_123_Bello_Garcia_RojasV_Sigarreta.pdf

Yáñez, J. (2019). Epistemología, problemas y métodos en la obra de Piaget. *Scientia in verba Magazine*, *3*, 155-165. Recuperado de: https://scientiainverbaojs.nulliusinverbasite.com/index.php/rev/article/view/99

Zambrano, G. (2008). Preguntas cognitivas y metacognitivas en el aprendizaje y la generación de estrategias de resolución de problemas matemáticos. *INVENTUM*, *3*(4), 25-50. Recuperado de: https://revistas.uniminuto.edu/index.php/Inventum/article/view/74

Zapata, A. G. (2013). Relaciones entre trasfondo (Searle) y teoría de la mente (Rivière). *Textos y Sentidos*, (7), 118-135. Recuperado de: http://revistas.ucp.edu.co/index.php/textosysentidos/article/view/533

Zill, D. G., Wright, W. S., & Escutia, J. I. (2015). *Matemáticas 1: cálculo diferencial*. McGraw Hill/Intermericana. Recuperado de: http://biblioteca.uazuay.edu.ec/opac_css/index.php?lvl=notice_display&id=81567

RED-UWEC

APÉNDICES

Apéndice No. 1. Matriz de rastreo bibliográfico de los antecedentes investigativos

Referencia	País	Año	Objetivo	Metodología	Enfoque metodológico	Enfoque disciplinar	Resultado	Aporte
Duval, R. (2016). Un análisis semiótico de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/12213/	Colombia	2016	Analizar el papel de la semiotica desde un punto de vista cognitivo para la resolucion de problemas matemáticos	De tipo documental, se realizo una revisión bibliografica de la literatura concerniente al rol de los registros de representación semiótica en la resolución de problemas algebraicos en estudiantes de primaria y secundaria.	Cualitativo	Psicoeducativo	Cuando analizamos el papel de los registros de representación semiótica en la resolución de problemas algebraicos desde un punto de vista cognitivo, se deben tener en cuenta tres características específicas estrechamente conectadas: 1. Los pasos de resolución de problemas transcurren a través de una transformación de representaciones semióticas que involucra el uso de algún sistema semiótico. 2. Para llevar a cabo esta transformación, se pueden usar registros diferentes de representaciones semióticas. 3. Los objetos matemáticos nunca se deben confundir con las representaciones semióticas utilizadas, aun si no hay acceso a ellos, diferente del uso de una representación semiótica	Como parte de la estructura ontosemiótica de las estrategias cognitivas y metacognitivas de los saberes previos, se debe garantizar que los estudiantes puedan utilizar diferentes registros de representacion semiótico de un mismo objeto matematico y lo puedan utilizar en al menos un paso determinado en el proceso de resolución
Valencia Salinas, P., & Diaz Villaneda, E. (2019). Estrategia didáctica para fortalecer el Razonamiento Algebraico fundamentada en la Etnomatemática.Recuperado de: http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/handle/123456789/3533	Colombia	2019	Evaluar la implementación de una estrategiadidáctica basada en la RA de Godino (2012) y Etnomatemática en la resolucion de problemas algebraicos	Se desarrollaron procesos referentes a rastreo bibliográfico de los teóricos sobre RA y Etnomatemática con el fin de identificar fuentes de información, además se realizó la intervención en el aula con estudiantes grado 8° de la Institución Educativa los Andes del	Cualitativa	Educativa	La implementación de actividades en referencia al RA desde el EOS, permitió el logro de aprendizaje significativo en los estudiantes en cuanto al reconocimiento, percepción, identificación y caracterización de las variaciones y los patrones de cambio, y de esta manera originaban expresiones algebraicas a partir de las generalizaciones que construían.	Se debe tener en cuenta como indicadores de razonamiento algebraico el reconocimiento e identificación de variables en la enunciación de problemas y su modelación, como uno de los pasos iniciales en la resolución de problemas algebraicos

				municipio de Chigorodó. se utilizaron tecnicas de recolección tales como la observacion participante, encuesta y entrevista semiestructurada y pruebas				
Gusmão, T. C. R. S. (2006). Los procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: una perspectiva ontosemiótica. Recuperado de: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Tesis_doctoral_Tania_Gusmao.pdf.	España	2006	Describir los procesos cognitivos y metacognitivos en el marco del EOS en la resolucion de problemas matemáticos en los estudiantes de grado octavo	Metodología mixta, se estructuró un marco de referecnia de la siguiente manera, segun la configuración epistémica para el EOS (en lo cognitivo): situación, interpretación a partir del lenguaje de la misma, conceptos previos, procedimientos, proposiciones y argumentos. Para la metacognicion, se establecieron criterios primarios: lectura comprensiva, observación y conciencia , argumentación; y secundarios: de supervision, de regulación y evaluación, transferencia. Basado en ello, se tomo una muestra de 185 estudiantes y se les aplico los instrumentos:	Mixta	Educativa	Los estudiantes presentaron falencias en los criterios establecidos en le marco de referencia establecido en la metodología. Cuando los resolutores presentan carencias significativas en su configuración cognitiva también se presentan paralelamente carencias en sus configuraciones metacognitivas. Recíprocamente el poseer una configuración cognitiva desarrollada hace paralelamente aflorar una configuración metacognitiva que a su vez se aproxima a la configuración metacognitiva de referencia. EOS y de la Metacognición, para el análisis de las prácticas de los estudiantes pudimos percibir como de hecho estos dos conocimientos están próximos.	Es necesario construir un marco referenciald el EOS que integre la cognicion y metacognicion de conocimientos previos para comprender las respuestas de los estudiantes luego de las sesiones de aprendizaje de la estructura ontosemiotica de las estrategias cognitivas y metacognitivas para la resolución de problemas algebraicos.

				PHM, entrevistas orales y semiestructuradas, debate en grupo, prueba				
Rodríguez, E. (2005). Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de matemáticas una propuesta integradora desde el enfoque antropológicoUniversidad Complutense de Madrid. Recuperado de: https://elibro.net/es/lc/umecit/titulos/88735	España	2005	Explorar la explicitación de conocimiento metacognitivo en el ámbito de la resolución de problemas de matemáticas	Se realizo una revision dcumental de investigaciones de otros autores y se realizo un analisis de las pruebas aplicadas a ciertos estudiantes. Se utilizo una metodología mixta, con un grupo de control y experimental, a los que se les aplico pruebas escritas	Mixta	Educativa	Los alumnos no adquieren por tanto el sentido de la matemática, no son conscientes de la forma en que la matemática se construye, reduciéndose ésta a un recetario de procedimientos a aplicar. Además, se ignora el razonamiento matemático plausible o conjetural, los "patrones" que rigen dicho razonamiento (Pólya, 1954) y, por tanto, su función complementaria del razonamiento deductivo. Por esta razón, las fases exploratorias de la actividad matemática (formulación de hipótesis, búsqueda de contraejemplos, elaboración de estrategias, tanteo de técnicas, etc.) quedan muy debilitadas. Luego de la aplicacion de los instrumentos, se evidencia que los estudiantes asumieron su responsabilidad -como protagonistas en la construcción de la respuesta a la cuestión- sobre aspectos del proceso de estudio que normalmente quedan bajo la responsabilidad única del profesor relacionada con la aparición de la regulación metacognitiva	En la construccion de referentes metacognitivos en el esquema de resolución, debe tenerse en cuenta la autorregulación y control del mismo estudiante a partir de tecnicas de razonamiento plausible, que permita ver los problemas matematicos reales y no como un resultado de aplicación de reglas rígidas.
Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didactica de la Matematica	España	2012	Mostrar la necesidad de estudiar la resolucion de problemas matematicos a partir de la ontología y semiotica presentes en los objetos matematicos y las acciones cognitivas del individuo puestas en juego en la actividad resolutiva	Se realizo un analisis crítico a partir de la interacción de investigadores con los desarrollos teóricos de la didáctica de la Matematica, ademas de la revisión documental de articulos y enfoques cientificos sobre la instrucción y cognicion matemática	Cualitativa	Educativa	Se debe elaborar una ontología suficientemente rica para describir la actividad matemática y los procesos de comunicación de sus "producciones. desarrollamos y precisamos progresivamente las nociones de "significado institucional y personal de un objeto matemático" (entendidos ambos en términos de sistemas de prácticas en las que el objeto es determinante para su realización) y su relación con la noción de comprensión, la clarificación de las nociones teóricas que se vienen utilizando en el área de conocimiento, en particular las nociones usadas para analizar los fenómenos cognitivos	Es necesario articular los procesos de comunicacion matematica personales de los estudiantes con el significado institucional o académico del mismo objeto matematico utlizado en la resolucion de un problema algebraico con el fin de facilitar la comprension del alumno y al docente, asociar las configuraciónes epistemicas personales a la configuracion epistemic institucional.

Troncoso Giron, O. M. (2013). Estrategias metacognitivas en el aprendizaje de las matemáticas: una intervención en el aula para determinar las implicaciones de la implementación de estrategias metacognitivas en el aprendizaje de las matemáticas.	Colombia	2013	Establecer la influencia de la incorporación de estrategias metacognitivas en la resolucion de problemas algebraicos	Es una investigación cuasiexperimental, se utilizó la metodología planteada por Mateos (citada por Heit, 2011), en la que se proponen cuatro momentos a partir de los cuales se cede de manera progresiva el control del aprendizaje, para que el estudiante cree sus propias formas de resolver problemas matemáticos. La poblacion esta conformada por estudiantes de grado octavo, a los que se les aplico una prueba diagnóstica; y otra de referencia (postest), para establecer el progreso y mejora de los estudiantes	Mixto	Psicoeducativa	Desde lo cuantitativo: las mediciones indican que la implementación de estrategias metacognitivas, sí ejerce un impacto importante en el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes. Desde lo cualitativo: desarrollan procedimientos con más orden y aunque se presentan errores en la ejecución del algoritmo o la elección de la información para resolver los problemas. el proceso realizado ayudó, de acuerdo a los autoinformes, a comprender qué dificultades tuvieron y en qué momentos del proceso tuvieron que replantear su trabajo.	Se debe ceder progresivamente el control de la resolución de los problemas a los estudiantes. Dando una guía inicial y pasando a empoderarlos de sus propios procesos de aprendizaje. Así se puede llegar a generar autonomía en los estudiantes y procesos de reflexión sobre el trabajo que realicen.
Pupo, A. J. I. (2011). Desarrollo de la competencia resolución de problemas desde una didáctica con enfoque metacognitivo.Zona próxima, (15), 2-21.	Colombia	2011	Determinar los aspectos cognitivos y metacognitivos que debe tenerse en cuenta en las estrategias didácticas para la resolución de problemas	El diseño metodológico utilizado fue cuasi-experimental con cuatro grupos; la intervención se realizó en cuatro fases, poniendo en práctica la instrucción directa, el modelado metacognitivo, la	Mixto	Psicoeducativa	En la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos se debe tener en cuenta parámetros tales como: contextualizar el problema planteado, sea desde la matemática o desde la vida cotidiana, dándose entonces un aprendizaje significativo; aplicar métodos de enseñanza en los cuales se haga explícito el o los modelos de resolución de problemas que se aplican, con el fin de que no quede de manera implícita, sino que se explicite el proceso cognitivo y metacognitivo que se desarrolla en el tiempo que se le dedica a resolver el problema; diseñar diferentes tipos de materiales didácticos y construcciones de ambientes de aprendizaje que permitan que el estudiante seleccione, organice y controle diferentes procedimientos a la hora de enfrentarse a la resolución de problemas	El docente que enseña la resolucion de problemas debe asumir el rol de modelo y guía de la actividad cognitiva y metacognitiva del estudiante, llevándolo poco a poco a participar de un nivel creciente de competencia y, al mismo tiempo, retirando paulatinamente el apoyo que proporciona hasta dejar el control del proceso en manos del estudiante, esto es, la aplicación de la propuesta mediante las fases de Instrucción directa, modelado metacognitivo, práctica guiada y aprendizaje cooperativo o

			matemáticos	práctica guiada y el aprendizaje cooperativo. Se realizaron comparaciones intragrupos e intergrupos.			matemáticos contextualizados.	práctica cooperativa.
Valencia, Carabobo, Venezuela. Huaynaso, C., Verónica, G., & Mendoza Paye, M. L. (2018). Procesos metacognitivos para la resolución de problemas en el área de matemática en alumnos de segundo grado del nivel secundario de la Institución Educativa "Coronel Gregorio Albarracín" de Tacna, 2008.	Venezuela	2018	Determinar la influencia de los aspectos cognitivos y metacognitivos en la resolución de problemas matemáticos	El estudio fue experimental, de categoría cuasi-experimental, la muestra estuvo formado por 56 alumnos del segundo grado de secundaria, se conformó un grupo experimental con 28 alumnos y otro grupo control de 28 alumnos, se aplicó el pretest y postest a ambos grupos para evidenciar el nivel de logro de los alumnos al resolver problemas de matemática.	Cualitativa	Educativa	La aplicación del módulo de procesos metacognitivos influyó significativamente en la resolución de problemas de matemática con un nivel de confianza del 95% para el tratamiento estadístico aplicando la prueba de normalidad Shapiro-Wilk. Para ello, el profesor debe facilitar discusiones después de terminada la tarea para permitir que los estudiantes aprendan la eficacia de varias estrategias: los problemas a los que se enfrentaron, cómo resolvieron esos problemas, cómo evitar problemas en el futuro. Además, el profesor puede manifestar una conducta metacognitiva que les sirva a los estudiantes como modelo, por medio de diversas técnicas como pensar en voz alta durante la resolución de un problema, verificar la respuesta final, etc. Algunos de los procesos que se pueden moldear más fácilmente son: el aprendizaje cooperativo y el manejo de grupos pequeños también pueden facilitar este proceso, los estudiantes pueden hacer que los pensamientos sean explícitos y analizables a la vez que propicien discusiones metacognitivas entre sus compañeros.	En el proceso instruccional de enseñanza del esquema ontosemiótico, se debe realizar actividades en grupo que permitan la evidencia de estilos de metacognición que permita el crecimiento mutuo. Además, el investigador docente debe explicitar en voz alta lo que sucede en la mente mientras resuleve el problema, permitira a los estudiantes captar mas alla de lo que se plasma con avance en el proceso resolutivo. Posteriormente, un conversarsatorio general para tomar nota de sus procesos metacognitivos.
Gutiérrez Gutiérrez, J. D., & Vargas Velásquez, J. A. (2020). Metacognición y Aprendizaje de las Matemáticas: El Caso de la Función Lineal. Recuperado de: https://repositorio.unillanos.edu.co/handle/001/1589	Colombia	2020	Explorar la explicitación de conocimiento metacognitivo en el ámbito de la resolución de problemas algebraicos de funcion lineal	Se utilizo el tipo de diseño Investigación Acción, la cual constituye un proceso continuo de búsqueda de explicaciones del oficio docente, integrando la reflexión y el trabajo intelectual en el análisis de las experiencias. Se tomo una muestra de 21	Cualitativa	Educativa	En el proceso metacognitivo de evaluación se solicitó a los estudiantes realizar retrospectiva del ejercicio y expresar las ideas clave que ayudaron a solucionar el problema, sin embargo, las respuestas en su mayoría fueron subjetivas, expresaban sentimientos y agradecimientos. Lo anterior permite evidenciar que los estudiantes no demostraron la competencia matemática de la argumentación. La mayoría de los estudiantes realizaron evaluación, pero desde un aspecto no matemático. por lo que inferimos que los estudiantes no son fuertes para hacer retrospectiva de la planeación (evaluar la planeación), de las ideas y las acciones. Los estudiantes del perfil planeación y control monitorearon principalmente los errores de cálculo, ignorando el control del plan o estrategia.	Se debe tener en cuenta: fraccionar la tarea metacognitiva en diferentes sesiones de clase para mejorar la evidencia de las habilidades metacognitivas, Implementar tareas en situaciones donde el estudiante se enfrente por primera vez a problemas de un tema en específico, lo cual asegura que la metacognición sea visible y no se convierta en procesos mecánicos. Se considera que las tareas con varias opciones de respuestas estimulan la búsqueda de distintas rutas de solución, cuando se tiene un

				estudiantes. Se diseño los instrumentos prueba y diario de campo.				procedimiento determinado es poco lo que la imaginación puede hacer. En la recolección de información, por parte de los estudiantes, se obtiene mejores evidencias si se cuestiona al estudiante verbalmente que por escrito, puesto que se expresan mejor y el investigador tienen más posibilidad para indagar más en caso de que el estudiante no sea claro.
Lara Solís, J. H. (2017). Aprendizaje autorregulado y metacognición para potenciar la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico en escolares de secundaria (Master's thesis, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla).	Mexico	2017	Potenciar en los estudiantes de secundaria su conocimiento metacognitivo y el aprendizaje autorregulado para ayudarlos a ser autónomos en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico en problemas verbales.	Metodología cualitativa cuantitativa, llos participantes de estudio fueron 18 adolescentes, siete mujeres y once hombres, de tercer grado de secundaria de la escuela particular Colegio Internacional Puebla S.C., ubicada en la ciudad de Puebla. El rango de edad de los estudiantes comprende de 14 a 16 años.Se aplico el cuestionario evaluación metacognitiva, MAI; cuestionario de estrategias de motivación y aprendizaje, MSQL; y la prueba de razonamiento lógico y el tercer instrumento fue un test con 20 preguntas el cual se utilizó como	Mixto	Educativa	Con relación al aprendizaje autorregulado, en sus tres fases: planificación, desempeño y, auto-reflexión; el desempeño de la mayoría de los estudiantes fue mejorando significativamente, ya que en esta intervención didáctica se diseñaron actividades que incluían problemas verbales y, con base en ellos, los estudiantes tenían que traducirlos a una expresión algebraica o ecuación de primer grado, enteras y fraccionarias, sistemas de ecuaciones en dos variables y ecuaciones de segundo grado que los explicara. los procesos de autocontrol, como la auto-instrucción, la imaginación, la atención enfocada las estrategias de tarea, ayudaron a los estudiantes a centrarse en la tarea y a optimizar su esfuerzo. la investigación mostró que las verbalizaciones sobre describir cómo se traducía un problema verbal a lenguaje algebraico, como se resolvía un problema de álgebra, lograron mejorar el aprendizaje de los estudiantes. La imaginería o la formación de imágenes mentales fue otra técnica de autocontrol utilizada por los estudiantes, en el momento de compartir la solución en plenaria, para asistir en la codificación de los problemas verbales y mejorar el desempeño.	En la descripcion de las competencias metacognitivas, se debe tener en cuenta los siguientes criterios: conocimiento metacognitivo (conocimiento declarativo, procedimental y condicional, procesos de planificación, monitoreo y evaluación) y su control metacognitivo (planificación, ejecución o desempeño y autorreflexión) para ayudarlos a ser autónomos en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico en problemas verbales.

				pre-test y posttest				
Moreno, A. N., & Daza, B. Y. (2014). Incidencia de estrategias metacognitivas en la resolución de problemas en el área de la matemática (Doctoral dissertation, Pontificia Universidad Javeriana). Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/10689/	Colombia	2014	Determinar el impacto de diferentes estrategias metacognitivas en la resolución de problemas matemáticos en tres estudiantes de 8º grado del Colegio Gimnasio Los Portales de Bogotá.	El estudio llevado a cabo tiene un enfoque de análisis cualitativo, con un alcance correlacional. La recolección de la información se realizó a través de una prueba de entrada y de salida y de una serie estandarizada de problemas que permitieron determinar la influencia de las diferentes estrategias metacognitivas en la habilidad de las estudiantes al resolver problemas de matemáticos durante ocho sesiones de 40 minutos aproximadamente cada una.	Cualitativa	Educativa	Los estudiantes desarrollaron de manera significativa procesos de planeación, los cuales les permitieron la toma de conciencia necesaria para poner en acción diversos mecanismos de solución de los diferentes problemas, entre ellos la supervisión regular del proceso. De igual forma, se destacó la importancia de la mediación (adulto o par) para poder llegar paulatinamente al desarrollo de tareas de manera autónoma. Las estrategias metacognitivas más utilizadas por las estudiantes en la resolución de problemas en el área de matemáticas, es la planeación, ya que esta impacta positivamente en el Control y la evaluación de la tarea abordada, pues al tener la claridad en la meta a obtener el sujeto se hacen más consciente de la situación a resolver, la manera de abordarlo, establece las estrategias adecuadas a la misma teniendo en cuenta los datos, los procesos que requiere. en la medida que “el docente o mediador permite que el estudiante tenga una actuación acertada de sus actuación cognitiva en el área, lo aleja de la repetición de algoritmos y lo acerca a la reflexión sobre los saberes previos que necesita para resolver los que se le plantea, sobre su propia actuación en discutir con sus compañeros los métodos aplicados a las soluciones encontradas”. Se sugiere implementar estudios relacionados con los conocimientos previos de los estudiantes, pues en la presente investigación las estudiantes no lograron ser consientes de sus procesos, de sus pre-saberes y se les dificultó su verbalización, aún cuando se desarrollo la mediación y se les indagó constantemente por los mismos, se presume que es porque se consideran obvios para la resolución de una situación, por eso evitan escribirlos y expresarlos oralmente.	El estudiante debe comprender sus limitaciones que se tiene como aprendiz, la conciencia de las estrategias de que se dispone en el momento oportuno; la identificación del problema a resolver, la planificación del uso de estrategias apropiadas, la supervisión y el autorregulamiento de los planes que se están empleando. Se debe trabajar a partir de un proceso mediacional basado en acciones didácticas como la instrucción explicita, la práctica guiada y cooperativa, donde se promueva la implementación de las estrategias en la resolución de problemas se puede establecer que la acción de mayor incidencia en dicho proceso es la basada en la práctica cooperativa. Se debe establecer explicitamente los concoimientos previos de los estudiantes antes del proceso de formación con los estudiantes en el esquema ontosemiótico producto de esta investigación
Martínez, B. A., Sánchez, J. M., & Pizarro, N. (2020). La representación en la resolución de problemas matemáticos: un análisis de estrategias metacognitivas de estudiantes de secundaria. Uniciencia, 34(1), 263-280.	España	2020	Caracterizar los procesos representativos y de metacognición en la resolución de problemas matemáticos verbales	Metodología de tipo documental,con alcance descriptivo a partir de bases teoricas de los RRS de Duval (2016), Flavell (1999), Rodriguez (2005) y Silva(2004)	Cualitativa	Educativa	En cuanto a las estrategias metacognitivas utilizados por los estudiantes durante la resolución del problema, podemos señalar que se presenta más fortaleza en la estrategia de planeación, al reconocer de manera correcta la pregunta del problema geométrico, que utilizar, en este caso de manera preferente, el registro geométrico. En la estrategia de control siguen de manera general los pasos para la resolución y consideran que no tienen obstáculos durante el proceso.,sin embargo, aunque relacionan la respuesta con la pregunta en su mayoría, no justifican la respuesta; esto contrasta al relacionarla con el	Tras la lectura del enunciado, dado en el lenguaje de la lengua natural, va a ser necesario, para su resolución, enseñarle al alumno a hacer una conversión hacia otro registro ontosemiótico , ya sea numérico, figural, geométrico, etc., incluso trabajar de forma simultánea con más de un registro, lo que pone de manifiesto el tipo de comprensión que ha realizado sobre el propio

			en estudiantes de octavo grado de un colegio concertado del centro de Madrid	principalmente. Se establecieron competencias cognitivas y metacognitivas a evaluar como criterios de evaluacion. Se escogió una muestra no aleatorizada de 99 estudiantes de secundaria, de un colegio concertado del centro de Madrid.			enunciado, que señala una no comprensión del problema, fundamentalmente geométrico. En cuanto a sus sistemas de representación, los alumnos no la evidencian procesos comprensivos al relacionar la representación con el enunciado del problema.	problema. Por esto, la comprensión e interiorización que los alumnos desarrollan acerca de un determinado objeto matemático, se ve fortalecida y consolidada cuantas más conexiones se establezcan entre los múltiples registros de representación que permiten trabajar con dicho objeto. la propia práctica docente debe trascender el enfoque en el trabajo numérico, aritmético y algorítmico, y favorecer los distints registros qye permitan la resolución comprensiva de problemas algebraicos
Txabarri, J. G. (2017). La resolución de problemas aritmético-algebraicos y las estrategias de aprendizaje en matemáticas. Un estudio en educación secundaria obligatoria (ESO). RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 20(2), 1.	España	2017	Determinar la influencia de las estrategias de aprendizaje de tipo metacognitivo en la resolución de problemas algebraicos	Metodología cuantitativa, con una muestra de 565 sujetos de tres cursos de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) .	Cuantitativa	Educativa	Un entrenamiento en el aula tanto en heurísticos, tales como el ensayo - error, reglas empíricas, diagramas, etc; como en estrategias de aprendizaje resulta efectivo en este sentido. Los resultados logrados en la estrategia de elaboración y las de metacognición en la resolución de problemas algebraicos son mas significativos en la flexibilidad posibilidades de elección y de transformación del problema.	El esquema ontosemiótico debe contemplar heuristicas de resolucion articuladas a la metacognicion como estrategias de aprendizaje de la resolución de problemas algebraicos
Díaz, d. d. d., Vélez, j. a. p., & Guerrero, j. c. Estrategias metacognitivas para el desarrollo de competencias genéricas en la resolución de problemas matemáticos de tipo numérico variacional en estudiantes de grado noveno.	Colombia	2016	Evaluar las implicaciones que tiene un plan de intervención que favorece el uso de estrategias metacognitivas; en el desarrollo de competencias genéricas	Metodología cuasi experimental con diseño de grupo control no equivalente. se tomó una muestra de 127 estudiantes 70 de Aguas Negras y 57 de la IE San José de Majagual Sucre.	Mixta	Educativa	En lo concerniente a la metacognicion, garantizar por parte de quien enseña la intención de aprendizaje y de quien aprende la distinción de la estrategia usada esto es, saber diferenciar entre control, planeación y regulación. Enseñar a pensar a partir de la instrucción directa en metacognición, modelado metacognitivo desde la disciplina, la pregunta metacognitiva y trabajo cooperativo influye de manera positiva en la resolución de problemas matemáticos de razonamiento cuantitativo. El trabajo con estrategia metacognitivas debe ser intencionado y dirigido hacia la disciplina. Por ende el profesor asume el papel de modelo y guía de la actividad cognitiva y metacognitiva del alumno, llevándole a un nivel creciente de competencia y autonomía hasta dejar el total control en manos del alumno	Se debe lograr en la intervencion pedagógica la distincion de los momentos metacognitivos, tales como la planeacion, regulación y control, ademas este proceso debe ser orientado progresivamente hacia la autonomia desde el mismo estudiante.

			de las matemáticas en los estudiantes de grado noveno de la institución educativaAguas Negras de Montería y San José de Majagual Sucre					
Barría Bobadilla, A. E., & Chavarría Lara, M. I. (2010). Dificultades que presentan los estudiantes de primer año de enseñanza media en la resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado.	Chile	2010	Evidenciar el tipo de dificultades que presentan los estudiantes de Primero Medio en la resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado	La investigación se adscribe a un paradigma mixto cuantitativo-cualitativo de carácter descriptivo. Los sujetos de estudio corresponden a 95 estudiantes de primer año de enseñanza media de establecimientos educacionales de la ciudad de Chillán. Se aplicó 2 pruebas, una al inicio y otra al final d ela investigación	Mixta	Educativa	Los alumnos no establecen las relaciones que existen dentro de un mismo enunciado con la variable, por ejemplo, cuando se les pregunta ejercicios en donde deben considerar las edades actuales de ciertas personas pero a su vez deben considerar el paso del tiempo por ejemplo para poder plantearse la ecuación correcta, los estudiantes no asimilan que con el paso del tiempo, las edades ya no son las mismas, y por ende las variables se deben modificar. En definitiva los alumnos tienen dificultades para interpretar los enunciados más complejos, que involucran un pensamiento cognitivo más avanzado. Además, si los estudiantes no han aprendido a resolver ecuaciones de primer grado, ya sea con fracciones o con números, difícilmente podrán plantear una ecuación representativa ante un enunciado en particular. No saben interpretar cuando una cantidad dentro de un enunciado es negativa o positiva; por ejemplo, si el enunciando dice hace 10 años, o dentro de 10 años, los alumnos se confunden y no hacen la diferencia al momento de plantearse alguna ecuación por lo que muchas veces incluso, los lleva a encontrar cantidades o específicamente edades negativas, es decir, no se tiene en cuenta la pertinencia de la solución.	La resolucion de problemas algebraicos implica incluir en e esquema una técnica para que el estudiante identifique las variables existentes, las formas en que se manifiestan, y los cambios algebraicos que sufren en el desarrollo del enunciado para realizar correctamente el cambio de registro de representación del que habla Duval(2016) y Godino (2012). Además, se debe trabajar aspectos de la metacognicion tales como la regulación y control de los pasos intermedios en la resolucion de problemas.
Di Barbaro, E. M., del Valle Olmedo, N., Galíndez, M. A., & Peralta, R. J. (2015, March). Errores y concepciones de los alumnos en álgebra. In XIV Conferencia Interamericana de	Argentina	2015	Visualizar las debilidades o aspectos a superar de los estudiantes, estudiar los	La metodología utilizada es cualitativa y la recolección de datos se obtuvo de los cuadernos de seguimiento del proceso de	Cualitativa	Educativa	Los errores que cometen los alumnos se deben en su mayoría a que los conceptos previos son insuficientes entonces realizan asociaciones o inferencias incorrectas. Como desconocen o “desatienden” las propiedades de las operaciones, tanto con números reales como con polinomios, los alumnos “inventan” sus propias reglas y las trasfieren a nuevas situaciones. Por ejemplo: confunden los significados del signo	En las categorias de analisis que integran el esquema didactico, debe incluirse tecnicas para articular la interpretación del lenguaje natural y algebraico con la operacionalizacion para reslver problemas algebraicos. Se debe lograr que los alumnos alcancen

Educación Matemática.			errores que cometen, dificultades que poseen, las causas y motivos que los provocan y las posibles concepciones que subyacen bajo esas dificultades	enseñanza y aprendizaje de los docentes y de entrevistas a alumnos y un profesor			menos (como signo o símbolo de la resta), el uso de los paréntesis (para jerarquizar operaciones o para denominar un par ordenado), la simplificación con la cancelación. Otros errores provienen de la utilización del signo igual como operador cuando resuelven ecuaciones, sin tener en cuenta el significado de equivalencia, y en consecuencia descuida la relación de simetría entre los miembros de la igualdad. Se podría expresar que consideran a los objetos matemáticos, como lo son las operaciones, ecuaciones y las letras, de manera aritmetizada.	una concepción del álgebra como estructura y como lenguaje, donde cada objeto algebraico es parte de una estructura, más que la repetición de ejercicios, la aplicación de reglas algorítmicas y definiciones, la utilización de ejemplos y contraejemplos
Castro Araujo, E. A. (2017). Abordaje didáctico de la comprensión de los problemas algebraicos en el nivel secundario de la República Dominicana. Transformación, 13(3), 314-326.	República dominicana	2017	Desarrollar una estrategia metodológica a partir de la caracterización de la situación actual que presentan los estudiantes del nivel secundario de las escuelas de la República Dominicana en la representación de los problemas, el pensamiento relacional, el análisis reflexivo y la comprensión de los problemas	La investigación se realizó con el empleo de métodos del nivel teórico, en particular el análisis-síntesis y la revisión documental, así como métodos empíricos. se utilizaron los informes de los supervisores de los distritos de la capital del país, los resultados de tres estudios regionales comparativos explicativos de la calidad en la Educación en América Latina y el Caribe (Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación, 2013). Se aplicó una prueba pedagógica de entrada y de salida	Cualitativa	Educativa	Los ejercicios propuestos fueron los siguientes: 1.- Represente algebraicamente: a) Dos números naturales consecutivos cualesquiera. b) Tres números naturales impares consecutivos. 2.- En el siguiente problema, proponga la representación algebraica de la cantidad de naranjas de cada cesto: "Tres cestos contienen 575 naranjas. El primer cesto tiene 10 naranjas más que el segundo y 15 menos que el tercero. ¿Cuántas naranjas hay en cada cesto? 3-. Represente gráficamente el siguiente problema: El mayor de dos números es 6 veces el menor y ambos suman 147" En los resultados, solo nueve estudiantes introdujeron variables para responder correctamente a las exigencias de las preguntas. Resultó muy común la respuesta errónea de seleccionar, en la pregunta 1, a números particulares con la condición exigida; por ejemplo, 15 y 16 para números naturales consecutivos y 3, 5, 7 para el caso del inciso b. En la pregunta 2 se manifestó igualmente dificultades en la comprensión del enunciado, el trabajo con las variables y los significados prácticos de las operaciones. La pregunta 3 fue la de mayor dificultad al no ser respondida por ningún estudiante. Se pretendía conocer el nivel de comprensión gráfica del enunciado del problema. La estrategia metodológica consistió en fortalecer la unidad de lo instructivo con lo afectivo-motivacional al ir superando gradualmente los obstáculos de los estudiantes en cuanto a su imposibilidad para aprender a resolver problemas por sí solo, sin la ayuda directa del docente y también, por el contexto dialógico cooperativo en que se realiza la actividad de comprensión en la solución de los	Debe hacerse una caracteriacion de los aspectos ontosemióticos a utlizar en la familia de problemas algebraicos a abordar, desde el registro en lenguaje natural, hasta su conversion al algebraico, de forma que los estudiantes puedan aprenderlo significativamente y utilizarlo eficazmente la conversion de registros distintos

			matemáticos.	y se entrevistó a una muestra aleatoria de 80 estudiantes de cuatro escuelas públicas de Santo Domingo, Higüey y Hato Mayor			problemas algebraicos.	
Molina, J. (2014). Aprendizaje significativo y resolución de problemas de ecuaciones de primer grado.	Peru	2014	Mostrar que el aprendizaje significativo o basado en los conocimientos previos de los estudiantes facilita los procedimientos y la resolución de problemas de ecuaciones de primer grado	Metodologia cualitativa cuantitativa, diseño cuasi-experimental, se efectuó con 38 estudiantes de primero básico del Instituto Experimental Fray Francisco Jiménez, de Santa Cruz del Quiché. Se aplico un pretest y un post test.	Mixta	Educativa	Se pudo comprobar que después de obtener notas de 30 % del valor de la prueba pre-test se logró conseguir notas en el post-test de 80 % , 90 % y 100 % del valor asignado a la prueba, deduciendo de esta manera que los conocimientos previos interactúan con los nuevos conocimientos y ayuda a construir el propio aprendizaje como el de los demás en relacion con los problemas algebraicos modelados por ecuaciones de primer grado	El esquema ontosemiótico debe contemplar en su estructura la movilización y gestión de conocimientos previos del estudiante en el proceso de resolución de problemas algebraicos.
Lopez Recachea, A. (2009). La importancia de los conocimientos previos para el aprendizaje de nuevos contenidos. Innovación y Experiencias Educativas. Revista Digital, (16).	España	2009	Destacar que para aprender nuevos contenidos matematicos es necesario tener en cuenta los conocimientos previos del estudiante en la planeacion y ejecucion de la praxis	Metodología de tipo documental,con alcance descriptivo a partir de bases teoricas de Ausubel (1983), Coll(1990), Pozo et al.(1991)	Cualitativa	Educativa	Para enseñar conceptos es necesario partir de los conocimientos previos de los alumnos diseñando situaciones en las que estos saberes se activen. Es preciso enfrentar a los alumnos con sus propias ideas –explícitas o implícitas– para reflexionar sobre ellas y confrontarlas con las de los demás. Las ideas de los alumnos, aunque “erróneas”, no constituyen obstáculos sino vehículos a partir de los cuales se edificarán los nuevos conceptos. El aprendizaje de conceptos es un proceso gradual que requiere de un cambio paulatino de unas estructuras por otras, de concepciones implícitas por otras explícitas más avanzadas.	El esquema ontosemiótico debe contemplar en su estructura la movilización y gestión de conocimientos previos del estudiante en el proceso de resolución de problemas algebraicos. Así antes y durante la intervención se debe considerar valioso las preconcepciones de los estudiantes, pues el esquema se diseña a partir de estos saberes, para un aprendizaje significativo

			pedagógica					
López, l. l., & López, l. P. (2014) problemas de comprensión sobre el planteamiento y solución de problemas en algebra.	México	2014	Caracterizar las dificultades conceptuales y procedimentales asociados a los conocimientos previos en la resolucion de problemas algebraicos	Investigacion cualitativa, se realizó una revision documental de Diaz barriga(2006), Gagne(1991), Newell y Simon(1958) aticulada con un analisis empírico de un grupo de estudiantes, a los que se les aplico una prueba distinta, (que consistía en dos partes) a dos grupos distintos. Una llamada de procedimiento clásico (PC) y otra de planteamiento de problemas independiente (PPI). Posteriormente se realizó una entrevista a dichos estudiantes.	Cualitativa	Educativa	Los problemas de comprensión del algebra para plantear problemas, principalmente se traducen en el predominio de la tradición pedagógica que produce, entre otras cosas, una incapacidad en el estudiante para plantear problemas, no sólo por la dependencia intelectual hacia las indicaciones del profesor, sino también por los problemas propios del algebra como son los de contenido, procedimiento y conocimientos previos no consolidados. Espcificamente los estudiantes tiene dificultades en: comprensión sobre lo que indican algunos símbolos o lenguajes algebraicos son ignorados, en conocimiento de operaciones básicas poco consolidadas, en la utilización incorrecta y poco dominio de las leyes de los exponentes, de comprensión del concepto de reducción de términos semejantes, en problemas en el proceso de la multiplicación y en operaciones básica, así como en la resta términos con diferentes literales.	Es necesario garantizar la totalidad de los conocimientos previos necesarios antes de vlver objeto de aprendizaje la estructura ontoemiótica de las estrategias cognitivas y metacognitivas de los saberes previos en la resolución de problemas matemáticos, específicamente con cada fase del proceso de resolución que implica la comprension del problema, la modelacion, la ejecucion de algoritmos y la evaluacion del proceso.
Ricaldi, M. (2013). Análisis del tratamiento del álgebra en el primer año de secundaria: su correspondencia con los procesos de algebrización y modelización.	Peru	2013	Mostrar la relación entre los procesos de justificacion y nociones previas en la resolucion de problemas algebraicos	La investigación es de tipo cualitativo y utiliza como marco teórico fundamental la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), además de algunos aportes del Enfoque Ontosemiótico para el análisis de la idoneidad	Cualitativa	Educativa	Una de las principales observaciones, es que en el aula tradicionalmente no se proponen actividades que refuercen el desarrollo de la capacidad de argumentación o justificación de procedimientos. Para las interpretaciones de las letras y, en general, de las expresiones algebraicas, el estudiante trae como sistema de referencia el aritmético y desde este contextualiza el uso de la letra como una generalización del número; es decir, las técnicas algebraicas usadas por los estudiantes y la habilidad para asignarle significado al álgebra escolar son influenciadas por la experiencia previa que el estudiante ha tenido con el manejo de expresiones numéricas en la escuela.	En el estudio del álgebra lo principal es que reconozcan y usen las relaciones que se plantean, las cuáles van más allá de la búsqueda de soluciones aritméticas. Esto se puede trabajar proponiendo a los estudiantes que construyan o creen situaciones sobre la base de modelos previamente formulados. Explicitar los distintos usos de las letras que, en general, constituyen la manifestación simbólica de las variables, éstas deben ser reconocidas por los estudiantes

				didáctica del proceso de estudio. El estudio fue realizado con 63 estudiantes del primer año de secundaria de un colegio privado en la ciudad de Lima				para “dotar de significado” el trabajo algebraico.
Gil Osorio, J. E., & Mercado Arrieta, M. E. (2019). Interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita a partir del trabajo cooperativo.	Colombia	2019	Posibilitar la interpretación de problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita, a partir del trabajo cooperativo, a través de una secuencia didáctica para estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Luis Eduardo Arias Reinel del Municipio de Barbosa	Se planteó una metodología a partir de un paradigma de investigación cualitativo, mediante un método de investigación acción pedagógica y una secuencia didáctica como estrategia, como técnica principal de recolección de datos se utilizó la observación participante. Se realizaron registros fotográficos, videos y cuestionarios como instrumentos para obtener la suficiente información que fue organizada por medio de unidades de análisis	Cualitativa	Educativa	Se evidenciaron algunos errores relacionados con el tratamiento algebraico, despeje de incógnitas y operaciones algebraicas, procesos que requieren de un tratamiento especial como el que se realizó con la interpretación de problemas, a traves de la actividad relacional, de transformación e interpretación inherentes al algebra	Es necesario trabajar con los estudiantes la conversion entre los registros de representacion y la transformacion, generalizacion y relacion de variables, como actividad inherente a la actividad algebraica según el EOS.
Ospina Muñoz, G., & Reyes Mosquera, D. (2018). Nociones conceptuales de función en los estudiantes de noveno grado.	Colombia	2018	Describir las nociones conceptuales de función	Esta investigación se enmarca en una metodología de tipo cualitativa. Desde una perspectiva	Cuaitativa	Educativa	Una respuesta inferida del análisis apunta a la poca claridad que los estudiantes tienen frente al concepto de función, así como limitaciones de los usos de dicho concepto para identificar relaciones funciones. De tal forma que dichas dificultades se extienden a la confusa asociación de representaciones con el objeto,	Ademas del tratamiento de la situación problema con reglas algorítmicas, es sumamente importante explicar de antemano a los estudiantes los significados alrededor de las expresiones

			poseen los estudiantes del noveno grado de la Institución Educativa Monseñor Alfonso Uribe Jaramillo y del Colegio Colombo Británico	holística donde buscamos una interpretación detallada sobre la realidad de los estudiantes frente al estudio del concepto de función. Se realiza por medio de un estudio descriptivo y exploratorio con el propósito de establecer elemento de valoración sobre los posibles logros y dificultades de los estudiantes. El instrumento a utilizar fue diseñado por los investigadores de acuerdo a su experiencia en el aula y los aspectos de interés a observar en su investigación.			desencadenando así, una ausencia de articulación entre distintos registros de representación del mismo objeto. Ademas, poseen a una noción reducida de función, a la ausencia de asociación en las diferentes representaciones del objeto, a la desconexión entre lenguaje natural y algebraico y a un tratamiento de las funciones predominantemente aritmético.	algebraicas y sus diferentes formas en que pueden ser representadas, verificando su habilidad de conversión
Erazo, L., & Muñoz, J. (2014). La conversión en la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Diseño y validación de una metodología de análisis para libros de texto.	Colombia	2014	Describir las dificultades que presentan los estudiantes en torno a la conversion en registros de representación ontosemiótica, en problemas	Estudio cualitativo, cuantitativo, exploratorio, descriptivo e interpretativo. Se tomron problemas del algebra de Baldor y se aplicaron a un grupo de 10 estudiantes previas nociones de conceptos algebraicos	Cualitativo	Educativa	los problemas asociados con la iniciación al álgebra escolar, están relacionados con: el cambio de convenciones respecto del referente aritmético, la interpretación de las letras y el reconocimiento y uso de estructuras. El primer inconveniente por parte de los estudiantes es reconocer la información que va a ser designada por una letra que representa la cantidad desconocida del problema, esto debido a que el usuario del libro de texto cuando lee la información presentada por el enunciado, designa como incógnita al primer dato que aparece en la información. razón por la cual es necesario leer detenidamente el problema, con el fin de identificar que dato es el desconocido y cuales depende de él, para obtener correctamente la designación de la variable como incógnita. en algunas ocasiones, es necesario parafrasear el registro inicial con el fin de esclarecer la información que este presenta y por otro	Se debe trabajar el parafraseo y la interpretación dentro del lenguaje natural como paso intermedio a la transformacion algebraica o a otro registro. Es importante fragmentar en pasos el proceso de conversion del lenguaje natural a otros registros.

			planteados en libros de texto				se hace necesario recurrir a conceptos o propiedades matemáticas externas al enunciado que permitan obtener la ecuación del problema.	
Ordóñez, L. N. (2017). Representaciones Semióticas del Concepto de Ecuación Lineal con una Variable a partir de la implementación de un juego didáctico. Amazonia Investiga, 6(11), 38-52.	Colombia	2017	identificar qué tipos de representación utilizan los estudiantes, las conversiones y tratamientos que hacen de ellas	La investigación presentada en este documento es de tipo cualitativo interpretativo que obedece a la descripción y análisis de la información recolectada a través de cuestionarios, fotografías, vídeos, observaciones, participación en clase, referenciado en los RRS de Duval(1999) y Godino(2014) con diez estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Técnica Miguel Zapata, ubicada en el corregimiento de El Plateado, municipio de Argelia Cauca	Cualitativa	Educativa	A partir de la elaboración del juego de parqués de ecuaciones se pudo observar que todos los estudiantes representaron algebraicamente en los dados los elementos que hacen parte del objeto de estudio, tales como la variable; el coeficiente; los operadores (suma, resta, multiplicación o división); y las constantes, es decir las "unidades significantes" Duval (1999, p.74), las cuales se ven reflejadas en las preguntas consignadas dentro del tablero de cada parqués. Ademas, la elaboración de los parqués dan cuenta del uso de más de un registro, del algebraico al gráfico,lo cual indica la coordinación rápida y espontánea que realizaron los estudiantes en sus conversiones cada vez que pasan de un registro a otro, relacionando el objeto con sus propiedades o características.	Se debe promover más el uso de registros distintos al algebraico para que el estudiante avance en sus procesos de aprendizaje, teniendo como opción los registros gráficos que posiblemente ayudan a entender o relacionar el objeto matemático y su función en el estudio de las ecuaciones y de otros objetos matemáticos. Se debe permitir que el estudiante explore, analice, relacione, escriba y represente sus ideas sirve para observar el proceso que realiza, detectar los obstáculos y aciertos en sus razonamientos.
Ospina García, D. (2012). Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto funcional lineal.	Colombia	2017	Comprender las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas que realizan los	Metodología con enfoque cualitativo interpretativo , el cual se hace comprensible a partir del diálogo con la teoría, dando sentido a lo que cada estudiante desea expresar. La muestra se conformó con un	Cualitativa	Educativa	No se hace explícito el registro de llegada para reconocer las representaciones que exteriorizan espontáneamente los estudiantes en sus respuestas, las características de estas conversiones, así como las articulaciones que establecen entre diferentes registros de representación. Para efectos del análisis de las situaciones desde la congruencia entre registros, se tendrán en cuenta los tres criterios de congruencia mencionados en el marco teórico, de la siguiente forma: CS: Correspondencia semántica entre las unidades significantes propias de cada registro.	Se puede trabajar la primera conversión al registro gráfico y a partir de este se realizan las conversiones en los otros registros, pues esto puede facilitar el tránsito a otros registros de representación, ya que es un registro que permite una mayor visualización de la función lineal, mostrando elementos que en otros registros no son visibles.

			estudiantes cuando se enfrentan a la solución de situaciones propias del concepto de función lineal.	grupo de estudiantes, con edades que oscilan entre 13 y 15 años que cursan grado octavo de la Institución Educativa Eugenio Pacelli del municipio de Manizales departamento de Caldas. Los instrumentos utilizados fueron: cuestionario escrito y grabacion de video			US: Univocidad semántica terminal. CO: Conservación del orden de organización de las unidades significantes en las representaciones.	
Klimenko, O. (2009). La enseñanza de las estrategias cognitivas y metacognitivas como una vía de apoyo para el aprendizaje autónomo en los niños con déficit de atención sostenida. Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 1(27).	Colombia	2009	Describir las estrategais cognitivas y metacogniti vas en la resoluciond e problemas matemático s en estudiantes con deficit de atencion sostenida	Se realizo un analisis crítico a partir de la interacción de investigadores con los desarrollos teóricos de la didáctica de la Matematica, y los aportes de Johnson Laird(1992) sobre estrategias cognitivas y metacognitivas	Cualitativa	Educativa	para llevar a cabo la enseñanza de estrategias de aprendizaje, tanto cognitivas como metacognitivas, es importante contar con algunos principios metodológicos: la enseñanza de estrategias debe estar vinculada directamente con el currículo. Las estrategias deben ser ampliamente explicadas e ilustradas con base en el material de estudio. Además, las estrategias deben ser ejercitadas permanentemente. Por último, el perfeccionamiento, afinamiento e interiorización de las estrategias enseñadas se logra por la práctica continuada y consciente.	Las estrategias cognitivas y metacognitivas deben desarrollarse asi: la estrategia metodológica de modelamiento metacognitivo (Johnson & Johnson, 1992) es especialmente eficiente si se aplica a los contenidos diarios de clase y de las tareas escolares. En esta parte el docente explica detalladamente a los estudiantes cómo se procede en los tres pasos principales de realización de una tarea: planeación, control de la ejecución y evaluación. Por ejemplo, el docente puede ejemplificar la planeación de la realización de una tarea, la priorización de actividades por hacer, organización del lugar y elementos de trabajo. Muestra cómo se puede ir verificando si la tarea se está haciendo bien mediante preguntas, revisión de resultados parciales, identificación de dificultades y de estrategias que pueden emplearse, así como instrucciones de

								autorreforzamiento. El docente puede utilizar la estrategia metodológica de la discusión metacognitiva (Johnson & Johnson, 1992). La estrategia de discusión metacognitiva permite ir construyendo una cultura estratégica en el salón de clase. .Ademas, es necesario utilizar la estrategia metodológica de autointerrogación metacognitiva (Johnson & Johnson, 1992). Esta estrategia consiste en llevar al estudiante a formular una serie de interrogantes antes, durante y después de la realización de una tarea. Esta autointerrogación realizada con frecuencia y durante un tiempo suficientemente prolongado, permite establecer un hábito de autorregulación del proceso de aprendizaje.
Zambrano, G. (2008). Preguntas cognitivas y metacognitivas en el aprendizaje y la generación de estrategias de resolución de problemas matemáticos. INVENTUM, 3(4), 25-50.	Colombia	2008	Establecer la incidencia de las preguntas cognitivas y metacogniti vas en el aprendizaje de la Función Cuadrática entre dos Grupos, uno que activa preguntas cognitivas y el otro que activa preguntas metacogniti	La metodología es de corte cuantitativo: un diseño experimental con un grupo experimental y otro de control	Cualitativa	Educativa	Al comparar los resultados obtenidos por los estudiantes que dispararon los dos tipos de preguntas frente al grupo que no las utilizo, se puede determinar que ésta mejora con el tiempo y es mas representati-va cuando el activador es metacognitivo, los resultados obtenidos en la prueba de comprensión conceptual, mostraron que la utilización de activadores cognitivos determinan un mayor grado de comprensión concep-tual en el primer momento de aplicación de la prueba, sin embargo aunque la entrada es cognitiva, el proceso llevado a cabo antes de dar respuesta a la pregunta es metacognitiva. Las preguntas metacognitivas ejercen en el estudiante mayor incidencia en la determinación de estrategias que lo que hacen las preguntas cogniti-vas. se pudo establecer que el uso de estas eran indispensables para lograr mejorar la comprensión conceptual y la capacidad para re-solver problemas.	El uso del monitoreo y control en las preguntas cogni-tivas, mejoran la comprensión conceptual, la pero el control metacognitivo debe girar en torno a actividades cognitvas concretas, mas que la simple reflexión sobre sus procesos de aprendizaje.

			vas					
Ruiz Moreno, M.(2016). Diseño de una propuesta metodológica que contribuya al lenguaje algebraico, su precisión e importancia para la enseñanza-aprendizaje del álgebra.	Colombia	2016	Mejorar la comprensión del lenguaje algebraico mediante el diseño e implementación de una propuesta metodológica con miras a favorecer la interiorización de los conceptos propios del grado octavo de la I.E. Barrio Paris.	El presente trabajo se inscribe en la metodología cualitativa, de tipo investigación acción. Se realizo caracterización y diagnóstico, en esta fase se evidenciaron las principales dificultades a las que se enfrentan algunos estudiantes con respecto a la comprensión del lenguaje algebraico. para la recolección y análisis de la información se seleccionaron 10 estudiantes de cada uno de los grupos (cuatro octavos), para un total de 40 estudiantes.	Cualitativa	Educativa	A partir del análisis de los resultados, se evidenció una dificultad reiterativa, cuando dentro de los instrumentos se involucraban situaciones geométricas, logrando identificar vacíos conceptuales respecto a las expresiones que permiten calcular perímetros, áreas y volúmenes. Por lo cual se recomienda que dentro del proceso de aprendizaje se incluya una explicación clara de los conceptos previos que serán requeridos para la aplicación de la propuesta y a partir de ellos estructurar el programa formativo principal.	Se debe garantizar antes de la implementacion del esquema, es decir, de forma previa, los estudiantes tengan un dominio algoritmico de las reglas de operación en conjuntos numericos, asi como del los significados de los conceptos y procedimientos implicados en los procesos de transformación numerica implicados.
Paniza, Q., & David, H. (2018). Práctica Pedagógica Innovadora Apoyada por TIC Fundamentada en la EPC para trabajar Ecuaciones de Primer Grado con Estudiantes de Noveno Grado en la IED Bosanova (Master's thesis, Universidad de La Sabana).	Colombia	2018	Analizar el grado de comprensión obtenida por parte de los estudiantes de noveno grado del colegio Bosanova acerca de las ecuaciones de primer grado con una	El presente proyecto investigativo tiene un enfoque cualitativo, es un estudio de caso. La muestra de estudiantes se realizó por conveniencia quienes fueron seleccionados para representar al colegio en una de le la pruebas externas aplicadas por el MEN y por	Cualitativa	Educativa	Se tuvo en cuenta los presaberes de los alumnos, recabados con los instrumentos iniciales. Con la información obtenida el docente pudo estructurar e implementar su práctica innovadora, lo cual facilitó y motivó a los estudiantes permitiéndoles la apropiación de conceptos y procesos algorítmicos y variacionales relacionados con el lenguaje algebraico, asi como la conversion entre registros en el proceso de resolución de problemas. Ademas, en el proceso de comprensión, al emplear el modelo concreto o simuador balanza de ecuaciones, fue necesario analizar, aprender y refelxionar sobre los pasos ejecutados al interactuar con ella y descubrir los elementos de sintaxis simbólica inherentes; lo que concuerda con lo expuesto por (Filloy, 1996), ya que esto condujó al alumno a abstraer operaciones, liberar procesos de comprensión de las mismas a un nivel sintáctico, es decir, pensando,	En el tratamiento pedagógico de la enseñanza de la resolucion de problemas deben ser objeto didactico de formacion, en el que los estudiantes previamente realizan procedimientos algoritmicos, de comprension textual de los enunciados, asi como los conceptos que estan implicados en un objeto matemático, mientras se resuelve un problema algebraico.

			incógnita con números enteros de acuerdo a los estándares básicos de competencias matemáticas del MEN	la singular problemática que se presentó detalladamente en el planteamiento del problema, además por ser un grupo heterogéneo en cuanto a los niveles de comprensión de las matemáticas			actuando flexiblemente, desarrollando competencias de lo comprendido y resolviendo problemas con ecuaciones de primer grado con una variable en otros contextos.	
Popayán, Y. (2016). Situaciones didácticas en el aprendizaje de las expresiones algebraicas para la conversión del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico (Doctoral dissertation, Universidad ICESI).	Colombia	2016	Promover el aprendizaje de las expresiones algebraicas para la conversión del lenguajecotidiano al lenguaje algebraico en estudiantes de grado noveno de la institución educativa Isaías Gamboa de laciudad de Cali.	Elmétodo de investigación es cualitativo con un diseño de tipo cualitativo-cuasiexperimental conenfoque de intervención en el aula. La observación de la investigación se hizo a través deldiseño de las situaciones didácticas tal como se planteó en el marco teórico con las situaciones(acción , formulación y validación). Se realizó la evaluación diagnostica para evaluar los saber del objetomatemático con relación a los saberes previos.	Cualitativa	Educativa	Los estudiantes debían tener como saberes previos las operaciones básicas de la aritmética, procesos relacionales, transformacionales y de generalizacion algebraica, fundamentalmente, deben haber desarrollado la interpretación lectora. La competencia matemática de planteamiento y resolución de problemas implica que lassituaciones didácticas propuestas por el profesor a los estudiantes movilicen procesosmatemáticos de complejidad creciente.	Antes de empezar la intervencion didactica con los estudiantes, se debe poner en evidencia los saberes previos adquiridos fuera y dentrodel ámbito escolar de estos. En el diseño del esquema ontosemiótico debe tomarse como referencia los saberes previos de los estudiantes.
Núñez, R. P., Hernández-Suárez, C. A., & Contreras, L. A. J. (2017). Representación semiótica de la noción de función: concepciones de los	Colombia	2017	Evaluar la habilidad de los estudiantes para articular	La investigación toma como marco de referencia la articulación de los trabajos de diversos	Cuantitativa	Educativa	En lo que concierne a los registros semióticos, se evidencia el predominio de las representaciones algebraicas. Los estudiantes, en efecto, realizan básicamente el mismo procedimiento: parten de una expresión algebraica, la contraen en una tabla de valores con un máximo de cuatro valores para la	Al abordar conceptos algebraicos como funcion, debe hacerse en sus distintos registros de representacion para una comprension mas completa y profunda. Esto de partir desde

estudiantes que transitan del colegio a la universidad-Semiotic Representation of the notion of function: Conceptions of Students who pass from High School to College. Revista Panorama, 11(20), 33-44.			diversos registros de representación semiótica con relación a la noción de función	investigadores, especialmente los de Duval y Hitt. La metodología utilizada es de tipo cuantitativo y es de naturaleza descriptiva. Los datos fueron recolectados mediante un test de ocho ítems, en los que se utilizan diversos registros de representación en torno al concepto de función.			variable independiente, ubican las parejas ordenadas en el plano cartesiano y luego unen los puntos mediante una línea, que puede ser recta o curva dependiendo de la distribución de los puntos. En la mayoría de los casos, sin embargo, estos mismos estudiantes presentan muchas difcultades al intentar transferir la función desde la forma verbal, tabla y/o gráfca, a la algebraica, e igualmente se les difculta establecer la relación entre los diferentes sistemas de representación.	procesos iniciales como la traduccion de un problema desde el lenguaje natural al lenguaje algebraico
Núñez Rojas, E. F. (2017). Representación semiótica como estrategia didáctica y competencias matemáticas en estudiantes del segundo grado de secundaria de la Institución Educativa Privada Educare de Chosica, Lima 2017.	Peru	2017	Determinar la influencia de las representaciones semióticas en las competencias matemáticas en estudiantes del segundo grado de secundaria del I.E.P. Educare, Chosica2017.	El presente trabajo es una investigación con metodología cuantitativa. El tipo de investigación es el experimental. La muestra consta 56 estudiantes del segundo grado de secundaria del Colegio Educare, seleccionados en dos grupos, un grupo experimental y un grupo control.	Cuantitativa	Educativa	A partir de los resultados obtenidos, se concluye al 95% de nivel de confianza que influye significativamente la aplicación de representaciones semióticas en la mejora de las competencias matemáticas en los estudiantes del segundo grado de I.E.P. Educare, Chosica- 2017	Se debe poner énfasis en la conversión del registro geométrico en algebraico y del geométrico en algebraico. Podría diseñarse una secuencia didáctica que estimule eficientemente la realización de estas conversiones. En las investigaciones que se hagan, complementar el análisis de la solución de problemas planteando primero un registro algebraico o geométrico para que el estudiante determinecuáles son los supuestos problemas que se plantean, es decir lo convierta al lenguaje natural
Guzmán, I. (2010). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,	Mexico	2010	Determinar el sentido que cobran las nociones relativas a funciones lineales respecto a	Se aplicó una metodología cualitativa. Se considerarán los siguientes registros: gráfico, algebraico (o formal) y lengua natural.	Cualitativa	Educativa	Un análisis de las respuestas de los estudiantes revela que son, en general, monorregistros. Es decir, están dadas en un solo registro, sin coordinar explícitamente dos o más. Las respuestas se quedan en el registro en el cual está planteada la pregunta, o recurren al registro algebraico, con frecuencia privilegiado en las clases. La ingenuidad de la redacción de las respuestas, cuando en forma espontánea recurren al registro gráfico, queda de manifiesto por la descripción en lenguaje natural de	Para favorecer los aprendizajes y favorecer el desarrollo del pensamiento conceptual es fundamental que los alumnos lleguen a articular diferentes representaciones semióticas; para lo cual es necesario enfrentarlos a suficientes problemas de traslados entre las distintas

RELIME, 1(1), 5-21.			la conversion de registros registros gráfico, algebraico (o formal) en los estudiantes de secundaria preuniversitario	Constataremos su presencia en las respuestas de estudiantes de secundaria respecto a nociones relativas a funciones lineales y el sentido que estas nociones cobran para ellos. Para ello, fue aplicado un cuestionario de 16 ítems a 75 estudiantes.			visualizaciones a veces implícitas y otras veces de una lectura explícita de un gráfico.	representaciones semióticas que admite la noción matemática objeto del aprendizaje focalizado. Plantear estos problemas es una tarea creativa para los profesores, pues este tipo de problemas, hasta ahora, son poco frecuentes en los textos escolares y en las clases de matemáticas. Aunque estos problemas parezcan fáciles a juicio de algunos profesores, la evidencia empírica demuestra otra cosa desde el punto de vista de los alumnos, como lo muestra nuestro estudio y algunos otros.
Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, Á., & Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. Avances de Investigación en Educación Matemática, (10).	España	2016	Analizar una tarea que requiere la formulación de una conjetura y su demostración haciendo uso de representaciones figurales y algebraicas, aplicando dos herramientas teóricas diferentes: las nociones de registro de representación semiótica y de configuración ontosemióti	Metodología cualitativa de tipo documental, a partir del análisis de las bases teóricas RRS de Duval (1994, 2016) y EOS de Godino	Cualitativa	Educativa	Hay deficienciasen el conocimiento del sujeto puesto que no realiza la conversión –pasaje o tratamiento–". Se detectan las contradicciones en la actividad cognitivadel sujeto y se determina si la tarea se resolvió o no con éxito. Con las herramientas del EOS es posible proporcionar una explicación, desde el punto de vista epistémico, sobre cuáles son las carencias del conocimiento del sujeto a propósito de un problema determinado, al identificar y describir de manera pormenorizada los objetos matemáticos y procesos involucrados en las prácticas matemáticas operativas, discursivas y normativas.	Se deben brindar herramientas formativas que permitan la realización de conversiones de registros de representación que formen parte del significado global del alumno, de manera que contribuyan a solucionar el problema algebraico y no a generar conflictos semióticos

			ca.					
Retana, J. Á. G. (2015). El lenguaje ordinario: la clave para el aprendizaje de las matemáticas basado en problemas/Ordinary language: a key to problem-based math learning.	Costa Rica	2015	Describir la importancia del conocimiento semántico de conceptos en el lenguaje natural de un problema, para interpretarlo en lenguaje matemático	Metodología de tipo documental, realizándose una descripcion y analisis a partir de la recopilacion con base a los investigaciones de otros autores	Cualitativa	Educativa	El crecimiento del lenguaje ordinario y el consecuente enriquecimiento de su campo semántico actúan como facilitadores para la comprensión y uso hablado de los objetos, ya sean propios del lenguaje ordinario o del matemático.Muchos de los posibles errores que cometen los estudiantes en el manejo del lenguaje ordinario son generadores potenciales de errores en la construcción, interpretación y valoración del significado de los objetos propios del lenguaje matemático, lo que podría llevar a hipotetizar que muchos de los problema del aprendizaje de las matemáticas estarían relacionados con un manejo débil o incorrecto del lenguaje ordinario	Se debe partir del uso y significado desde el lenguaje ordinario que los estudiantes poseen en tornoa conceptos y procedimientos algebraicos, teniendo en cuenta la similaridad de su semántica. Este puede ser el punto de partida para privilegiar el manejo de un lenguaje preciso y claro que contribuya, metacognitivamente, a adquirir consciencia sobre cómo se dan los procesos de aprendizaje para mejorar la comrpension y resolucion de problemas algebraicos
Rojas Vilca, E. Y., & Salazar Guillen, Y. D. (2018). La Interpretación semiótica en el aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una incógnita en el primer grado de secundaria de la IE N° 20575 José Antonio Encinas UGEL Nº 15-Huarochirí 2016.	Perú	2018	Analizar el tema de ecuaciones de primer grado en el texto escolar del primer grado de secundaria del Ministerio de educación del Perú	La metodología de investigación es cualitativa, donde se recogió la información necesaria mediante observaciones, análisis de cuadernos y textos escolares, grabación de clases dictadas, entrevistas con los estudiantes de la muestra; para así obtener interpretaciones y darles respuestas a las interrogantes planteadas en nuestra investigación.	Cualitativa	Educativa	En el libro del Ministerio de Educacion Nacional de Perú se observa que presenta para el estudiante un obstáculo epistemológico, por los siguientes puntos: a) No presenta una tecnología (es decir la explicación de cómo desarrollar una tarea) para el tipo de tarea 2, en donde se le pide al estudiante realizar una conversión del lenguaje matemático al lenguaje verbal. b) No presenta variedad de ejercicios desarrollados que puedan servir de apoyo para que el estudiante pueda desarrollar con éxito los tipos de tareas. c) No brinda una teoría o explicación acerca del planteo de una ecuación, tampoco hace la observación del uso del paréntesis en una ecuación cuando se haga la conversión del lenguaje verbal al matemático (cuando la expresión verbal no tenga una coma, la ecuación deberá llevar paréntesis y cuando la expresión verbal tenga la coma, la ecuación no deberá llevar el paréntesis)	Se deben construir ejercicios de apoyo y ayuda para el aprendizaje de los cambios de registros (verbal- algebraico). Es preciso que los textos o material pedagógico se complementen con conceptos o términos que permitan un mejor entendimiento de expresiones técnicas como “termino independiente y variable”.
Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de	España	2006	Analizar la actividad matemática como un	Metodología de tipo documental, derivada de un analisis de la	Cualitativa	Educativa	Lo que importa en las representaciones semioticas no es su relación con algo m´as, el objeto implícito, sino su capacidad intr´ınseca para ser transformadas en otras representaciones semióticas. Esa es la parte b´asica que	La resolución de problemas algebraicos, como parte fundamental de la actividad matemática, requiere un amplio y

representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.			proceso que exige procesos de razonamiento específicos, propios del área	literartura especializada y experiencias del campo, respecto a las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas			juegan en los procesos de aprendizaje. Cada sistema semi´otico provee una capacidad espec´ıfica de transformaci´on. En segundo lugar, hay dos clases de transformaciones de cualquier representación semiótica: la conversión y el tratamiento. Son cognitivamente bastante independientes la una de la otra aunque matemáticamente la primera depende de la segunda. Es la raz´on por la cual la conversi´on de representaci´on es el primer umbral de la comprensi´on en el aprendizaje de las matemáticas. En tercer lugar, y este es el punto más sensible, la conversion y el tratamiento debe ser separado para analizar lo que hacen los estudiantes cuando se enfrentan con el problema; esta separacion metodologica y teorica va en contra de la práctica actual de considerar estos dos tipos de transformaciones como una unidad para la resoluci´on de los problemas.	complejo juego de transformación de representaciones para pensar. De hecho la comprension conceptual surge de la coordinacion de los diversos sistemas semioticos usados, y darse cuenta de la forma especıfica de representar para cada sistema semiotico es condicion cognitiva para la comprension. Así, se podrá contribuir el aprendizaje de las matem´aticas a la educaci´on general para formar la mente o para el desarrollo de las capacidades m´as globales de visualizaci´on, razonamiento, organizaci´on de informaci´on, y no solamente la obtenci´on de algunos procedimientos t´ecnicos de c´alculo
Davalos Rayme, A. N. (2015). Implementación de los registros semióticos de duval para mejorar la resolución de problemas en la competencia de regularidad, equivalencia y cambio con las estudiantes del 2"" A" de educación secundaria de la IE "Santa Rosa" de Abancay–Apurímac, 2013-2015.	Peru	2015	Implementar los Registros Semióticos de Duval para la mejora de la práctica pedagógica en la Resolución de Problemas en el Área de Matemática con las estudiantes del 2do "A" de educación secundaria de la I.E. "Santa Rosa" – Abancay.	Metodologia cualitativa con tipo de diseño investigación acción. La investigación se realizó en dos fases la deconstrucción que es el aprendizaje de la práctica a través de la reflexión crítica e identificación de debilidades las cuales fueron clasificadas en dos categorías Estrategias metodológicas y aprendizaje con sus respectivas subcategorías; y la reconstrucción donde se afirmó lo	Cualitativa	Educativo	La implementación de los Registros semióticos de Duval porque permite que los estudiantes resuelvan problemas a partir de situaciones problemáticas contextualizadas, realizando diversos tratamientos monofuncionales (algoritmos algebraicos) y multifuncionales (representaciones graficas) en el registro simbólico para poder hallar la solución al problema planteado. Todo esto se da por el apoyo constante, el crear un ambiente democrático y reflexivo, ya sea, aclarando dudas, realizando preguntas y repreguntas y guía en el uso de software educativo permitiendo así un mejor desenvolvimiento e interacción con las estudiantes.	Los docentes deben hacer énfasis en las multiles representaciones y en los mecanismos heurísticos para dichas transformaciones. Pueden valerse de diferentes materiales concretos como el algeplano para demostrar la relación del álgebra con la geometría, recursos como papelotes y hojas arco iris (de colores) y el Cmaptools; para elaborar los registros semióticos que permite resolver los problemas de una manera más atractiva.

				bueno				
Sánchez, Nicolás Andrés (2014). *Análisis de errores asociados a la resolución de ecuaciones de primer grado. una aproximación desde la zona de desarrollo próximo*. En Montero, Patricio; Silva , Hector; Soto , Daniela (Eds.), Actas Jornadas Nacionales Educación Matemática (pp. 196-203). Santiago: Usach.	Colombia	2014	Describir los errores sobre conocimientos previos que se cometen al aplicar estrategias de resolución de ecuaciones de primer grado	Metodología de tipo cualitativa, se realizo un analisis de investigaciones en la literatura especializada, asi como un trabajo de campo, ambos con las mismas evidencias de errores de estudiantes en la resolución de ecuaciones.	Cualitativa	Educativo	Las dificultades, según Palarea y Socas (1998) asociadas a la complejidad de los objetos en algebra (nuestro caso ecuaciones de primer grado) operan en dos niveles, (i) semántico, el cual indica que los signos son dados con significados claros y precisos y (ii) sintáctico, en el cual los signos pueden ser operados por medio de reglas sin significado. En De Moreno y De Castellano (1997) se evidencian las siguie tes: Un número que multiplica a la incógnita en uno de los lados de la ecuación se pasa a restar al lado opuesto, Cambian el signo en un miembro de la ecuación sin hacer la misma modificación en el otro, no realizan la transposición de términos (sumandos o factores) en el orden correcto, Al resolver una ecuación realizan sólo las operaciones en un miembro de la igualdad sin hacer las debidas modificaciones en el otro, para resolver la ecuación comienzan por desarrollar la expresión, aplicando la propiedad distributiva, pero lo hacen deficientemente y al realizar las operaciones de suma o resta implicadas en alguno de los miembros de la ecuación, presentan deficiencias.	La categoría de saberes previos implica en la investigación que se debe establecer con precisión todos conceptos y procedimientos para la resolución de una ecuación de primer grado, en la resolución de un problema algebraico y asegurar que los estudiantes los comprendan y apliquen.
Voisin, Y. S. (2011). Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza. *Sapiens. Revista Universitaria de Investigación*, *12*(1), 122-142.	Venezuela	2011	Analizar los conocimientos previos para resolver problemas algebraicos.	Metodología de tipo cualitativa, se realizo un analisis de investigaciones en la literatura especializada, sobre los aspectos previos a la resolución de problemas algebraicos.	Cualitativa	Educativo	Los conocimientos previos abarcan la observación analítica y crítica de generalidades y su verbalización durante el tiempo que sea necesario para luego promover la simbolización de las observaciones.	Como conocimientos previos en el proceso de resolución de problemas algebraicos, se debe (a) identificar y promover el uso de estrategias de generalización como actividad central del álgebra escolar, para cuando sea el momento propicio adquirir la simbología propia de la matemática; (b) diseñar actividades para trabajar las variables desde sus diferentes usos; (c) trabajar la resolución de problemas aritméticos como una forma de identificar la necesidad del uso de variables y (d) promover el uso de las calculadoras para desarrollar el pensamiento algebraico a través de la comunicación de las ideas matemáticas.
Arroyo, G. C. (2014). Dificultades en el aprendizaje de problemas	Costa Rica	2014	Analizar las dificultades de	La investigación se desarrolló desde el	Cualitativa	Educativo	Los educandos participantes no dominan algunos temas previos, que debieron ser aprendidos en la escuela; por tanto, cometían errores al plantear y resolver los	Se debe enseñar a los estudiantes técnicas para analizar los problemas propuestos y no solo

que se modelan con ecuaciones lineales: El caso de estudiantes de octavo nivel de un colegio de Heredia. *Uniciencia*, *28*(2), 15-44.			estudiantes de octavo año, al aprender el tema de resolución de problemas algebraicos modelados mediante ecuaciones lineales con una incógnita.	paradigma naturalista y se utilizó el estudio de caso como método, mediante un enfoque cualitativo. Se aplicaron técnicas como observaciones de clase, cuestionario a estudiantes, entrevistas no estructuradas a la docente y entrevista clínica a los educandos.			ejercicios propuestos. En concordancia con lo indicado por Socas (1997), los estudiantes participantes presentaron dificultades con ciertos términos algebraicos, con lo cual se les hacía más complicado plantear la ecuación del problema. Entre estos vocablos están: disminuido, aumentado, veces, números pares y números consecutivos. A pesar de que alguna de esta terminología fue desarrollada en clase, igualmente no fue recordada en las entrevistas clínicas, pues no son términos de uso cotidiano. Las deficiencias por trasladar el lenguaje cotidiano al algebraico son las causales más reiteradas por las cuales los estudiantes no logran plantear un problema.	prepararlos para que puedan resolverlos mediante procesos mecánicos. Esto puede lograrse evitando el abuso problemas tradicionales, donde los estudiantes siguen un patrón básico para llegar a la respuesta, sin que medie un verdadero análisis. Es muy importante definir aquellos contenidos previos necesarios para desarrollar el tema de resolución de problemas. Además, se debe utilizar el error que los estudiantes cometen al resolver problemas como una herramienta didáctica para que este fomente la metacognición. Por último, debe fomentarse conexiones entre la aritmética y el álgebra a través de actividades aritméticas que incluyan ideas como la generalización, la representación y la variabilidad desde la primaria, tal como lo indica Esquinas (2009).
Vega C. (2016). Enseñanza del álgebra a través de la formalización progresiva. Puebla, México.	México	2016	Establecer aproximaciones a los saberes previos para resolver problemas algebraicos desde diferentes investigaciones.	Metodología de tipo cualitativa, se realizo un analisis de investigaciones en la literatura especializada, sobre los aspectos previos a la resolución de problemas algebraicos.	Cualitativa	Educativo	El enfoque más acertado es partir de los conocimientos previos de los niños, no de lo que deberían de saber sino lo que hacen al resolver el problema. Por eso rescatamos y valoramos las soluciones aritméticas tanto de los niños como la de los jóvenes ya que con esto manifiestan el entendimiento del problema. Se debe adelantar la introducción del álgebra o dedicarle más tiempo, como una generalización de la aritmética, poniendo énfasis en actividades que provoquen el desarrollo de interpretaciones procedimentales; así evitaremos saltos, rupturas o cortes didácticos entre el álgebra y la aritmética.	En los saberes previos para la resolución de problemas algebraicos, se debe prestar atención especial al tránsito entre la aritmética y el algebra, con criterios previamente establecidos y bien definidos.
Benavides Romero, Y. (2018). Transformación del lenguaje natural al algebraico a través de estrategias metacognitivas con estudiantes de grado octavo.	Colombia	2018	Describir la incidencia que tienen las estrategias metacognitivas frente a la	Se empleó un enfoque de análisis cualitativo de tipo descriptivo, donde se hizo un estudio de campo a través de la observación	Cualitativa	Educativo	Tras aplicar el instrumento de ideas previas se identificó que la totalidad de los estudiantes se encontraba en un nivel cero de algebrización, ya que al plantear los ejercicios dieron solución a través de operaciones matemáticas sin llegar a plantear ecuaciones, lo que no implico ningún nivel de razonamiento algebraico. El proceso de planeación es el más frecuente en los estudiantes analizados, dado	Se debe precisar con que conocimientos previos cuentan los estudiantes, pues, tienden a ser menos de los esperados para su grado académico. A partir de estos, se debe hacer énfasis en los tareas intermedias para el proceso de control o regulación y

			transformación del lenguaje natural al algebraico.	participativa y el desarrollo de cuestionarios.La investigación fue realizada en la institución educativa distrital José María Vargas Vila de la ciudad de Bogotá que atiende una población de estrato socio-económico bajo.			que este requiere de mayor detenimiento para identificar el problema a solucionar y es el que les da la orientación de cómo abordar el ejercicio, esto hace que los estudiantes le brindan una mayor importancia. Con respecto a las acciones de monitoreo o control 4 de los 5 estudiantes analizados las llevo a cabo; desarrollando la estrategia planteada, identificando sus dificultades tales como el no entender los enunciados, el no identificar las variables entre otras, lo cual les permitió buscar alternativas de solución. La evaluación es el componente de la regulación metacognitiva que tiene menor apropiación por parte de los estudiantes, esto debido a que la forma como se evalúa tradicionalmente da mayor importancia al resultado que al proceso que se realiza para llegar a la respuesta y no a un juicio sobre la calidad de los procesos y los resultados obtenidos.	evaluación, pues son los que no se evidencian contundentemente en el proceso de resolución de problemas algebraicos.
Cervantes, G., Mendoza, A., Peñaloza, L., Ramírez, M., & Viñas, M. M. (2011). Descripción y análisis de procesos de pensamiento de estudiantes al resolver problemas matemáticos. *Revista Científica Ingeniería y Desarrollo*, (1).	Colombia	2011	Comprender el complejo de manifestaciones cognitivas y afectivas que se desencadenan en el proceso de resolución de problemas matemáticos. Se ubica en los principios teóricos de la psicología cognitiva, y en particular en el marco conceptual propuesto por Alan Schoenfeld, que	Se utilizó una metodología cualitativa, Se desarrolló un estudio de casos multiples, y los resultados muestran que éstos se movieron dentro de un continuo, desde aquellos cuyas reacciones ante la resolución de problemas mostraron hábitos de ensayo y error relativos al manejo de símbolos sin el ejercicio de ninguna estrategia de control, hasta aquellos cuyas manifestaciones son comparables a la de los «expertos»	Cualitativa	Educativo	En el ámbito metacognitivo, las siguientes competencias favorecen la resolución de problemas: A pensar en nuevas maneras de solución, o bien plantear estrategias de búsqueda, pero con base a un conocimiento de ámbito específico regulado y controlado, evitando de esta manera el ensayo mecánico de fórmulas. • A adquirir habilidad sobre algunos procedimientos generales para la resolución de problemas. • A ampliar y a reestructurar la base de conocimientos. 11- A una interacción dinámica entre los conceptos matemáticos y los procesos. 11- A «sentir» el problema a través de la representación gráfica que ayude al surgimiento de ideas o posibles caminos de solución. • A crear problemas a partir de los ya conocidos. • A transferir la estructura de un problema y su solución a diferentes contextos. A volver sobre el problema. El hábito metacognitivo determina favorablemente un control adecuado y una evaluación formativa o por etapas en la medida en que se avance en el proceso, y garantiza resultados favorables. Además, conduce a analizar detalladamente lo que se hace antes de aceptado.	Se debn realizar talleres en los cuales el profesor modela la conducta de ver y representar un problema, explica las dificultades, ven el problema sólo a través de su enunciado verbal y aclara cómo usar la estrategia directiva general elegida y los heurísticos pertinentes. Los estudiantes se organizan en grupos de trabajo, designando un protocolante que escriba las soluciones a los problemas planteados. Después se hace una puesta en común en la que cada grupo presenta y explica su proceso de solución. A su vez, el profesor debe realzar las diferentes representaciones, con el fin de establecer comparaciones entre los diferentes procesos realizados. Finalmente, realiza un proceso de retroalimentación y asigna problemas adicionales.

			conjuga las siguientes categorías: conocimiento de ámbito específico,estrategias hcurísticas, estrategias metacognitivas y componente afectivo					
Iriondo-Otxotorena, J. (2016). *Mejora didáctica en la transición de la aritmética al álgebra en el primer ciclo de la ESO basada en la ludificación* (Master's thesis).	España	2016	Plantear una propuesta para la mejora de los procesos de aprendizaje del algebra, a partir de los conocimientos aritméticos previos	Metodología cualitativa, aplicada con estudiantes del primer grado de ESO de España, con actividades didacticas tales como la balanza y balanza con globos, para la representación significativa de los procesos implicados en la resolución de ecuaciones de primer grado.	Cualitativa	Educativo	Los retos que enfrenta un estudiante en la resolución de problemas algebraicos, esta ligado a capacidades que ha desarrollado en etapas anteriores, tales como el cálculo mental, algoritmos de suma, resta, multiplicación y división, propiedades y priorización de operaciones El método de la balanza puede ayudar a ver la igualdad como signo relacional. Aunque el objetivo es que los alumnos deduzcan los procedimientos para resolver ecuaciones de primer grado, la manipulación de la balanza poniendo un globo o bloque a cada lado, puede ayudarlos a comprender la nocion de igualdad y su invarianza con transformaciones idénticas entre ambos miembros.	En los saberes previos que los estudiantes necesitan para resolver problemas y ecuaciones algebraicas, es necesario tener en cuenta las operaciones básicas, o algoritmos tales como la suma, resta multiplicación división, propiedades subyacentes en dichas operaciones, así como técnicas didactgicas que permitan otorgarle mayor grado de significatividad, con el fin de aumentar la probabilidad que puedan estructurarse y ser aprehendidos en el esquema cognoscitivo del estudiante.
Arteaga Martínez & Macías Sánchez (2016). La representación en la resolución de problemas matemáticos como diagnóstico de estrategias metacognitivas.	España	S.F.	Determinar aspectos asociados a la representación en la resolución de problemas matemáticos como diagnóstico de estrategias metacogniti	Metodología mixta, se realizo un estudio basada en el marco teórico previo sobre la representación semiótica en la resolución de problemas, y se desarrolla con una muestra de estudiantes de Secundaria, de primer curso.	Mixto	Educativo	La mayoría de los estudiantes reconocen la pregunta, siendo ligeramente superior el porcentaje para A (A. 78,05%; B. 77,56%). A la hora de reconocer el planteamiento de la pregunta, mientras que en A la mayoría la expresan tal cual está en el enunciado 65,86%; en B, la expresan utilizando sus propias palabras, pero no parte de la estrategia, 53,66%. Respecto al registro de representación, cambia de un problema a otro, en el tipo A, la mayoría es figural icónico (58,53%), que podemos entender como "dibujo infantil", mientras en B es geométrico (51,21%), "utilizan alguna figura geométrica". Coincide en los dos tipos de problemas que la mayoría de estudiantes, al relacionar la representación con el enunciado no evidencian comprensión, presentándolo sin ningún tipo	En cuanto a la transformación semiótica, el estudio de la comprensión de enunciados, de la relación que se establece entre los datos que constituyen el problema y la cuestión a resolver, así como de los procesos de razonamiento que el estudiante debe articular a modo de engranaje con capacidades y habilidades como son la síntesis, el análisis, la visualización, la argumentación, la fluidez, la audacia, la autonomía, etc., fundamentales en la resolución de este tipo de

			vas en estudiantes de primer grado de E.S.O.				de conocimiento matemático asociado o estrategia vinculada. En ambos problemas, los estudiantes no utilizan un plan de resolución previsto (A. 90,24%; B. 82,93%), relacionan la respuesta con la pregunta (A. 87,80%; B. 75,61%), no justifican la respuesta (A. 90,24%; B. 82,93%) y no consideran que tenga dificultad; llama la atención como la percepción de la dificultad es superior en el problema de carácter geométrico (A. 7,3%; B. 29,26%). En cuanto a la resolución, se tiene en cuenta, la resolución equivocada por utilizar un procedimiento erróneo (A. 33,33%; B. 18,92%), o por equivocarse en algún paso habiendo elegido el procedimiento acertado (A. 12,82%; B. 35,14%). Lo resuelven de forma correcta, un 53,84% del problema A, y 45,95% el B.	tareas; nos aporta una visión bastante completa sobre aquellos aspectos en los que es necesario incidir para subsanar aquellas carencias o necesidades que manifiesten los alumnos en este quehacer que tan útil es en la vida, pues facilita una comprensión más general, detallada y efectiva de todo lo que nos rodea para así poder afrontar situaciones complejas de nuestro día a día con mayor garantías de éxito. Además, toda actividad y proceso matemático, y la resolución de problemas en particular, lleva consigo la necesidad de cambiar y coordinar distintos registros de representación. La importancia que guardan tales procesos de conversión y coordinación con la comprensión significativa de las nociones matemáticas que subyacen en los problemas planteados, convierte a estos procesos en una pieza clave del proceso de enseñanza en nuestro área de conocimiento a la par que evita el establecimiento y creación de obstáculos en el proceso de aprendizaje de los objetos matemáticos. De aquí su pertinencia dentro de este estudio.
Paiz Linares, M. G. (2017). Estrategia metodológica basada en los procesos metacognitivos y su influencia en la capacidad de resolución de problemas del área de matemática en los estudiantes del segundo grado de educación secundaria de la IEP Antonio Raimondi Chimbote, 2016.	Perú	2016	Determinar cómo influye la aplicación de la estrategia metodológica basada en los procesos metacognitivos en el desarrollo de la	Metodología cuantitativa, se utilizó el Método Experimental, y el Diseño Pre – Experimental con un único grupo; cuya población y muestra estuvo conformada por un total de 30 estudiantes del segundo grado de Educación	Cuantitativa	Educativo	La aplicación de la estrategia metodológica basada en los Procesos Metacognitivos mejora significativamente el nivel de logro de la capacidad de Resolución de Problemas del área de matemática, lo cual se pudo demostrar estadísticamente. (Cuadro N°07) No obstante, se evidencia que al momento de reflexión del estudiante, metacognición, en las prácticas docentes muchas veces no es considerado como parte importante del proceso de aprendizaje, y ello también puede ser una de las consecuencias de porqué nuestros estudiantes tienen un bajo nivel de logro de capacidad de resolver problemas.	Dar un mayor realce al proceso metacognitivo del metalenguaje y de la metacomprensión en sí, ya que una buena comprensión de los problemas o de lo que se lee es la base para el desarrollo de la capacidad de resolución de problemas en todas las áreas.

			capacidad de resolución de problemas del área de matemática	Secundaria. Los instrumentos utilizados fueron el Pre – Test y Post – Test; Cuestionario, con el fin de recoger información acerca del desarrollo de la metacognición en los estudiantes, y Ficha de Observación para evaluar el proceso de los estudiantes. Los resultados más importantes fueron los alcanzados en el Post – Test, ya que con ellos fue posible demostrar y comprobar la hipótesis de investigación, es decir, que la aplicación de la Estrategia Metodológica basada en los procesos metacognitivos influye significativamente en la capacidad de resolución de problemas del área de matemática				
Palacios, Ana Maria; Solarte, Sandra Liceth (2013). *Estudio de la resolución de problemas matemáticos no rutinarios de docentes de matemáticas en formación: una aproximación a las*	Colombia	2013	Analizar los alcances, posibilidades y limitaciones de una formación	Metodología de tipo cualitativo de corte descriptivo interpretativo de cada una de las estrategias que despliegan y usan en la resolución	Cualitativa	Educativo	Dentro de la exploración metacognitiva, entre los logros de este trabajo de grado están a nuestro juicio, el haber verificado que en algunos de los hallazgos de las investigación sobre la utilización de las estrategias heurística en la resolución de problemas se acierta cuando, las estrategias heurísticas ayuda a los resoluctores a cambiar sus estructuras de una situación problema o su manera de verlas. Así pues, ellas ayudan	En necesario analizar en profundidad las heurísticas como una herramienta de analisis metacognitivo, en la medida en que aumenta el poder explorativo y recursivo de los conocimientos que se tienen, para resolver problemas algebraicos. Se debe

*estrategias heurísticas.*Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle.			en el enfoque de resolución de problemas matemáticos, en la emergencia y apropiación de estrategias heurísticas por parte de los profesores de matemáticas en formación.	de un problema matemático no rutinario. Para este propósito se plantea un análisis de las estrategias heurísticas involucradas en la resolución problemas no rutinarios, que permita formular descripciones interesantes de tipo instantáneo y estáticas sobre las realizaciones observables de los estudiantes, en un momento determinado de su desarrollo, o en diferentes niveles del desarrollo, al resolver tareas específicas propias de los temas del curso de resolución de problemas			a los resolutores a explorar la situación problema y entenderla más profundamente, sobre todo cuando los resolutores están atascados. Análogamente las estrategias heurísticas facilitan la exploración de los resoluctores, ellas no garantizan que los resolutores alcanzaran las soluciones finales. No puede decirse que el solo uso de las estrategias por un resoluctor sea un fracaso porque apenas puede mostrarle la solución per se. Si al utilizar las estrategias heurísticas el resoluctor tiene nueva información sobre la situación problema y empieza una nueva exploración, puede decirse que estas estrategias juegan un rol importante en este proceso de resolución de problemas. Lo que resulta relevante aquí, es si los resolutores pueden obtener nueva información usando la información que ya conocen y las estrategias heurísticas, y si estas pueden facilitar las actividades de construcción del sentido del resoluctor. En esta medida los resolutores intentan cambiar su propio conocimiento matemático con las situaciones problemas confrontados. Si ellos tienen el conocimiento apropiado para dar sentido completo de las situaciones, ellos pueden encontrar esta combinación a través de la correspondencia de los elementos del conocimiento apropiado y aquellos de las situaciones aun cuando algunas situaciones intermedias puedan necesitarse. Finalmente, el proceso de resolución terminara cuando el resoluctor tenga sentido completamente de la situación con su conocimiento matemático basado en estructuras construidas recientemente y hallazgos que le permitan tomar una decisión sobre la pregunta formulada en el problema.	promover la interacción y reflexión entre los estudiantes, a través de resolución de problemas accesibles a estos, sobre la base de sus conocimientos previos, lo que garantiza que tales problemas no requerirán del uso de métodos de resolución complejos y mecánicos. • Crear por parte de los estudiantes un interés en la construcción de ideas matemáticas, que le permitan generalizarlas a otros contextos donde se muestren exploraciones y hallazgos.
Morales, A., Amat, M., Donis, Y., & Urquhart, R. (1997). Resolución de problemas de procesamiento de la información durante la lectura. *Lectura y vida*, *18*(3), 13-22.	Venezuela	1997	Determinar qué tipos de problemas de comprensión semiótica confrontan los lectores expertos y los novatos y cuáles son las estrategias que utilizan para resolverlos	Esta investigación constituyó un estudio de casos para tratar de determinar qué tipos de problemas de comprensión confrontan los lectores expertos y los novatos y cuáles son las estrategias que utilizan para resolverlos. En la misma se utilizó la estrategia	Cualitativa	Educativo	El problema reportado con más frecuencia por los novatos fue no encontrar conexión semiótica entre oraciones (16 veces), mientras que los expertos reportaron ese problema una sola vez. Pareciera ser, entonces, que no poder integrar la información es una característica de los lectores novatos al leer un problema matemático. Aunque el problema reportado con mayor frecuencia entre los expertos fue el de encontrar una palabra desconocida (8 veces), este mismo problema fue reportado con una frecuencia mayor por los novatos (13 veces), casi el doble que los expertos. Los demás problemas reportados por los sujetos fueron: encontrar una palabra sin sentido en el texto, el cual fue reportado sólo por los novatos (1 vez) y encontrar incongruencias entre las interpretaciones de dos oraciones, el cual fue reportado sólo por los	En primer lugar, los lectores novatos encuentran con mayor frecuencia problemas relacionados con la integración de la información y con el desconocimiento del vocabulario, lo cual apoya lo planteado por Cromer (citado en María y MacGinitie, 1982). Los novatos, además, no saben resolver los problemas que confrontan. En contraste, los lectores expertos confrontan pocos problemas de integración de la información y, aunque a veces desconocen el significado de algunas palabras, son capaces de resolver este

				metodológica conocida como Análisis de protocolos orales (Salter, 1984). Sujetos: La muestra constó de 14 sujetos: 7 expertos y 7 novatos.			expertos (2 veces). Frente al problema de encontrar una palabra desconocida, los novatos emplearon con mayor frecuencia las estrategias de releer (4 veces), y tratar de recordar su significado (4 veces). Sin embargo, las emplearon sin éxito. Es de hacer notar que estas estrategias no fueron empleadas por los expertos, lo que parece indicar que no son efectivas para resolver este problema. Seguir leyendo, asignarle el significado de una categoría supraordinada presente en el texto y encontrar el significado mediante la estructura de la palabra, resultó efectivas cada vez que fueron usadas, tanto por los expertos como por los novatos. Además, estas estrategias fueron empleadas con mayor frecuencia por los expertos, lo que parece indicar que son las más útiles para resolver este tipo de problema. Llama la atención que los novatos reportaron dos veces no haber empleado estrategia alguna para solucionar el problema de desconocimiento de vocabulario, mientras que los expertos siempre emplearon alguna estrategia. Al no encontrar interpretación para una oración (Tabla 3), la estrategia empleada con mayor frecuencia fue releer la oración. De seis (6) veces que fue usada por los novatos, sólo dos (2) veces resultó efectiva, mientras que para los expertos resultó efectiva, dos (2) de las tres (3) veces que la usaron. Esto pareciera indicar que los expertos emplean la estrategia releer de manera diferente a la de los novatos. Generar una imagen mental fue otra de las estrategias más usadas por los expertos para resolver este problema. Dos (2) de las tres (3) veces que la usaron fue efectiva. Estrategias como tratar de relacionar la oración con interpretaciones anteriores (1 vez); continuar leyendo (1 vez); formular una hipótesis (1 vez) y parafrasear la oración (1 vez) fueron empleadas únicamente por los novatos, siendo efectiva solamente la última mencionada. En contraste, las estrategias releer y parafrasear todo el texto anterior (1 vez) y descartar la oración como irrelevante para la comprensión global del texto (2 veces) fueron empleadas únicamente y, además, con éxito por los expertos. El problema encontrar incongruencias entre las interpretaciones de dos oraciones (sin tabla) que fue reportado 2 veces por los expertos, fue abordado con las estrategias releer el texto y evaluar interpretaciones anteriores, y fue resuelto con éxito al usar estas dos estrategias conjuntamente. El hecho de que los novatos no	problema y logran comprender la lectura. En general, los expertos logran resolver la gran mayoría de los problemas que confrontan, mientras que los novatos sólo logran resolver algunos pocos; aun más, parecen estar menos conscientes que los expertos de sus fallas de vocabulario y, en general, de su nivel de comprensión (casi todos consideraban que habían comprendido globalmente el texto cuando, de hecho, el no haberlo comprendido fue un criterio para seleccionarlos como sujetos para este estudio). Esta característica de los novatos apoya lo planteado en los estudios de metacognición hechos por autores tales como Brown y Palincsar (1982) y Baker y Brown (1984). Además, respecto a las estrategias empleadas para resolver problemas de comprensión, parece ser que los novatos tienen preferencia por la relectura la cual, según Collins y Smith (1980), es una estrategia disruptiva de la fluidez y la continuidad en el procesamiento. Vale la pena destacar que cuando los novatos logran resolver los problemas lo hacen usando estrategias que también son empleadas por los expertos. Sin embargo, generalmente emplean estrategias diferentes a las de los expertos, lo cual contradice lo hallado por Morles et al. (1989). En contraste, los expertos parecen no tener preferencia por una estrategia en particular. Ellos se caracterizan por usar mayor cantidad de estrategias al confrontar un problema, y, cuando releen, generalmente lo hacen conjuntamente con otra estrategia. Por último, respecto a

							reportaran este problema podría indicar que ellos no se detienen a evaluar si sus interpretaciones parciales son congruentes entre sí.	si las categorías de problemas reportados en la literatura son suficientes para abarcar todos los problemas de comprensión confrontados por los lectores, pareciera ser que la taxonomía de Collins y Smith (1980) agrupa adecuadamente los problemas de comprensión, tal como son percibidos por los lectores. Sin embargo, en este estudio se evidenció una variedad de problemas subyacentes, algunos de los cuales no tienen cabida dentro de ninguna de las taxonomías revisadas.
Rojas, Pedro J. (2010). *Conflictos semióticos en un contexto algebraico: un análisis de las producciones de los estudiantes.* Revista Digital Matemática, 11(1), pp. 1-9	Bogotá	2010	Evidenciar la presencia de conflictos semióticos de los estudiantes cuando resuleven problemas asociados a la función lineal	Metodología cualitativa, se recogió la información de campo, a partir de los datos corresponden a tres textos escritos, dos individuales y uno como grupo-colaborativo, que contienen las soluciones presentadas frente a un problema	Cualitativa	Educativo	El uso del método propuesto por Duval (1995/1999) para la comprensión de textos, junto con la teoría sobre los diversos procedimientos de designación de los objetos (Duval, 2002), se mostró útil para comprender la actividad cognitiva de los estudiantes en un proceso de resolución de problemas algebraicos. Godino, Batanero & Font (2007) han propuesto el análisis de las prácticas matemáticas personales e institucionales para dar cuenta del aprendizaje de un individuo como la diferencia entre esos dos tipos de prácticas e introduce la noción de conflicto semiótico para analizar los procesos de aprendizaje de los objetos matemáticos, sin tener que recurrir a las nociones de obstáculo epistemológico, error conceptual, con lo cual se sitúa la problemática del aprendizaje de las matemáticas en una actividad de carácter semiótico atravesada por diversos tipos de tensiones como la presente entre lo individual y lo sociocultural. Combinar estas dos perspectivas para analizar las prácticas matemáticas de los estudiantes partícipes en este estudio, permitió identificar y explicar la presencia de un conflicto semiótico de tipo interaccional, entre lo que el registro algebraico institucional le exige a un individuo y aquello que él puede producir.	Se debe trabajar en estrategias de analisis que le permitan al estudiante ser consciente que al resolver problemas algebraicos afronta conflictos semióticos constantemente, puesto que, aun conociendo procesos o procedimientos aprendidos formalmente o institucionales, puede vacilar respecto a su propia apreciación personal sobre el abordaje del problema e inclinarse por una de las dos opciones, sin un criterio reflexivo o crítico sobre el mismo. Es necesario trabajar en esos procesos reflexivos, autocriticos, desde el lenguaje del problema y de los pensamientos propios, para seleccionar o adaptar para cada problema, las técnicas específicas.

Apéndice No. 2. Consentimiento informado a padres para recolección y tratamiento de datos investigativos

Ciudad,

Yo, _____, identificado(a) con la C.C. _____ de _____ como titular de la información manifiesto que he sido invitado(a) a representar a mi hijo(a) _____ para que participe dentro de la investigación _____, adelantada por la Universidad Metropolitana de Ciencia Educación y Tecnología (UMECIT), como encargada y responsable del manejo de la información que entregare y que se regirá por las siguientes condiciones:

PRIMERA – OBJETIVO: La investigación tiene como objetivo analizar los saberes previos, las estrategias metacognitivas y la transformación semiótica en la resolución de problemas algebraicos, desde la perspectiva del EOS, con estudiantes del grado octavo del municipio de Chigorodó Antioquia. **SEGUNDO – USO Y TRASFERENCIA DE LA INFORMACIÓN:** 1. El uso de la información está bajo reserva y custodia de la UMECIT, como encargada y responsable de la información, 2. Que el manejo y transferencia de datos a terceros es responsabilidad en su transmisión y protección por parte de la UMECIT 3. La manifestación de la autorización del manejo de la información está en manos del titular o en sus ausencias sus causahabientes o el representante legal del titular, 4. Y lo que establezca la ley 1581 de 2012. **TERCERO - RIESGOS Y BENEFICIOS:** Las encuestas o entrevistas y la obtención de la información sobre la caracterización e impacto de los egresados no implican riesgo alguno. Es pertinente aclarar que el titular no recibirá ningún tipo de remuneración en dinero, se le realizarán aproximadamente un número de 55 preguntas. **CUARTA- CONFIDENCIALIDAD:** La identidad del titular será resguardada porque utilizaremos pseudónimos en vez de sus nombres. Durante la investigación el titular puede sentirse en libertad de responder o no a las preguntas; así como también puede el titular retirarse del estudio en caso de que no desee continuar en él. El estudio cuenta con la aprobación del Comité de Ética de la UMECIT y no implicará daños previsibles para usted, ni tampoco para la Institución Educativa. **QUINTA - DERECHOS DEL TITULAR DE LA INFORMACIÓN:** El titular de la información tiene como derechos; 1. Acceder, conocer, actualizar y rectificar sus datos personales frente a la UMECIT en su condición de encargada y responsable del tratamiento. 2. Ser informado por la UMECIT, previa solicitud, respecto del uso que le ha dado a sus datos personales. 3. Revocar la autorización y/o solicitar la supresión del dato cuando en el tratamiento no se respeten los principios, derechos y garantías constitucionales y legales. **SEXTO – DEBERES DEL ENCARGADO Y RESPONSABLE DE LA INFORMACIÓN:** 1. Garantizar a la persona titular en todo tiempo, el pleno y efectivo ejercicio del derecho de hábeas data. 2. Solicitar y conservar, copia de la respectiva autorización otorgada por el titular para el tratamiento de datos personales. 3. Informar debidamente al titular sobre la finalidad de la recolección y los derechos que le asisten en virtud de la autorización otorgada. 4. Conservar la información bajo las condiciones de seguridad necesarias para impedir su adulteración, pérdida, consulta, uso o acceso no autorizado o fraudulento. 5. Garantizar que la información sea veraz, completa, exacta, actualizada, comprobable y comprensible.6. Actualizar oportunamente la información, atendiendo de esta forma todas las novedades respecto de los datos del titular. Adicionalmente, se deberán implementar todas las medidas necesarias para que la

información se mantenga actualizada. 7. Rectificar la información cuando sea incorrecta y comunicar lo pertinente. 8. Respetar las condiciones de seguridad y privacidad de la información del titular. 9. Tramitar las consultas y reclamos formulados en los términos señalados por la ley.

Declaro que he leído o me fue leído este documento en su totalidad y que entendí su contenido e igualmente, que pude formular las preguntas que considere necesarias y que estas me fueron respondidas satisfactoriamente. Por lo tanto decido participar DE MANERA LIBRE Y VOLUNTARIA EN esta investigación. Por lo anterior autorizo a Abel Antonio Dìaz Castellar, estudiante del Programa de Doctorado en Ciencias de la Educaciòn, para realizar los anteriores procedimientos.

_____

Firma del informante clave

C.C No.

Fecha:

RED-UMECIT

INSTRUMENTOS CUANTITATIVOS

Apéndice No. 3. Prueba tipo Likert sobre Saberes Previos

Estimado estudiante: lee con atención cada enunciado y escoge la valoración que más se ajuste a tu nivel de acuerdo o desacuerdo con la cuestión planteada en el enunciado. Para ello, utiliza tu conocimiento sobre el tema y realiza los cálculos que consideres necesarios. Ten en cuenta que las posibles valoraciones son las siguientes:

C.A= Completamente de acuerdo

A= De acuerdo

D= En desacuerdo

C.D= Completamente en desacuerdo

Asimismo, debes marcar una X, en la celda ubicada a la derecha del enunciado y exactamente debajo de la valoración que hayas elegido.

Subcategoría: Definiciones y operacionalización en R	VALORACIÓN			
	C.A	A	D	C.D
1. Cierto estudiante coloca en el tablero la siguiente suma: 8+8+8+8+8, e indica que para resolverla en un solo paso, hace falta conocer y aplicar el concepto de multiplicación. Ante el planteamiento de dicho estudiante, usted se encuentra				
2. Luis y Carlos se unen para vender mangos y chocolatinas. Carlos produce cada mes 1231 chocolatinas y Luis 1565 mangos. El primero vende la unidad a 100 pesos y el segundo, a 250 pesos. En Junio, Carlos produjo 351 chocolatinas menos que las habituales y Luis, 338 mangos menos. Ese mismo mes, el ingreso total de las ventas fue repartido equitativamente a sus 12 socios. Entonces, el dinero repartido a cada socio fue aproximadamente 11000 pesos. Sobre esta afirmación usted está				
3. Para ejemplificar la relación existente entre la división y la resta, un estudiante divide 35 entre 7 y su resultado lo compara con el número máximo de veces que puede restar 7 de 35. Ante el procedimiento utilizado por el estudiante, usted está:				
Subcategoría: Axiomas (propiedades de la igualdad, distributividad, inverso a la distributividad(factor), conmutatividad)	VALORACIÓN			
	C.A	A	D	C.D
4. Respecto a la siguiente proposición: 7(5+6) = 7(5) + 6, imagina que el signo igual representa una balanza. Así, la expresión 7(5+6) representa cierto peso en kg que se coloca al lado izquierdo de dicha balanza. Por su parte, la expresión 7(5) + 6 también representa cierto peso en kg que se coloca al lado derecho de la balanza (se asume que la balanza está en				

equilibrio cuando soporta el mismo peso en ambos lados). Entonces, sobre la afirmación: *"la balanza está en equilibrio",* usted se encuentra				
5. Sobre la siguiente expresión numérica 3(6+2), Juan piensa que es equivalente a 3*6 + 3*2. Ante el pensamiento de Juan, usted se encuentra				
6. A Luis le preguntaron por el resultado de la operación 5(4)- 2(4), a lo que contestó inmediatamente: "fácil, 4 es factor común de 5 y 2, entonces: 4(5-2) = 4(3). Sin embargo, Pedro dice: "dado que en ambos paréntesis está la misma cantidad, o sea 4, entonces 5 veces dicha cantidad menos 2 veces la misma cantidad, equivale a 3 veces la misma cantidad", es decir 3(4). Luego, Carlos, un amigo experimentado dice: "solamente Luis tiene la razón". Ante esta afirmación, usted está				
Subcategoría: Noción algebraica (transformacional, generacional, global)	VALORACIÓN			
	C.A	A	D	C.D
7. José razona que, frente a un problema algebraico, para plantear la ecuación algebraica se debe empezar por crear un símbolo que represente la variable de referencia o independiente. Ante ese razonamiento, usted esta				
8. Alberto tiene 7 manzanas y compra el doble de las que Juan. Si el número de manzanas que juan compró se representa con el símbolo □, el número total de manzanas de Alberto, desde esa perspectiva es 2*□ +7. Respecto a lo anterior, usted está				
En la siguiente secuencia, a cada número le corresponde una expresión debajo del mismo. Ejemplo, al número **1** le corresponde la expresión 2(**1**) +5. **1** **2** **3** **…** 2(**1**) + 5 2(**2**) + 5 2(**3**) + 5 … 9. Si la nube representa un número, entonces la respuesta de Juanito debe ser 7 (☁). Ante la respuesta de Juanito, usted está:				
Juanito tiene la siguiente ecuación 2(__) +5 = 11. Para resolverla (es decir, encontrar el valor numérico que debe ir dentro del paréntesis y hace verdadera la igualdad), aplica las siguientes transformaciones (propiedades) de la igualdad 2(__) +5 = 11 2(__) +5 **-5** = 11 **-5** **paso 1** 2(__) = 6 **paso 2** 2(__)/**2** = 6/**2** **paso 3** (__) = 3 **paso 4** 10. Luego, Juanito menciona que el número que debe ir dentro del paréntesis es 3. Respecto a <u>*TODOS*</u> los pasos aplicados por Juanito, usted está				

Niveles de desempeño en Saberes Previos según la valoración total de ítems

Valoración	Nivel
[10-25]	Bajo
[26-35]	Medio
[36-40]	Alto

Apéndice No. 4. Prueba tipo Likert sobre Estrategias Metacognitivas

Estimado estudiante: lee con atención cada afirmación y escoge la valoración que más se ajuste a lo que haces en la mayoría de los casos. Ten en cuenta que las posibles valoraciones son las siguientes:

C.A= Completamente de acuerdo

A= De acuerdo

D= En desacuerdo

C.D= Completamente en desacuerdo

Asimismo, debes marcar una X, en la celda ubicada a la derecha de la afirmación y exactamente debajo de la valoración que hayas elegido.

Subcategoría: Planeación	VALORACIÓN			
	C.A	A	D	C.D
1. Dispongo de un conjunto específico de estrategias a utilizar, para problemas difíciles				
2. Comprendo ciertas partes del problema y luego las relaciono con otras, para entender lo que me están pidiendo que resuelva				
3. Pienso en los vacíos de concimiento que debo llenar, antes de empezar a resolver un problema				
4. Establezco objetivos concretos antes de empezar una tarea				
5. Me pregunto yo mismo acerca de qué conocimientos estoy empleando para resolver un problema				
6. Pienso en varias maneras de resolver un problema y escoger la mejor				
7. Leo las instrucciones con cuidado antes de empezar a resolver un problema				
8. Dispongo de un método para recordar y utilizar saberes previos claves, asociados a un problema particular				
Subcategoría: Regulación	VALORACIÓN			
	C.A	A	D	C.D
9. Me pregunto periódicamente si conozco el objetivo de un problema				
10. Considero y valoro varias alternativas a un problema antes de contestar				
11. Reviso periódicamente el enunciado para ayudarme a comprender las relaciones importantes				
12. Me doy cuenta que ciertas estrategias parecen funcionar mejor en unos problemas que en otros				
13. Me detengo al resolver un problema, para verificar regularmente mi comprensión				
14. Me pregunto yo mismo acerca de qué tan bien lo hago mientras aprendo algo nuevo				
15. Solicito ayuda a otros cuando no comprendo algo				
16. Cambio de estrategias cuando fallo al comprender				
17. Me detengo a leer mentalmente mis suposiciones, cuando parece haber				

inconsistencias lógicas que me permiten avanzar				
18. Paro y vuelvo a leer sobre la nueva información que no comprendo bien				
19. Soy crítico de mis propias suposiciones				
Subcategoría: Evaluación	VALORACIÓN			
	C.A	A	D	C.D
20. Sé qué tan eficiente y eficaz me desempeñé, una vez que resuelvo un problema				
21. Me pregunto si había una manera más fácil de hacer las cosas después de haber terminado una tarea				
22. Tengo conciencia de lo que he aprendido cosas nuevas, después de resolver un problema				
23. Me pregunto qué condiciones adicionales, hubieran debilitado las estrategias utilizadas				
24. Me pregunto si he considerado todas las opciones después de resolver un problema				
25. Me pregunto que aspectos impiden o facilitan la transferencia de estrategias entre problemas				

Niveles de desempeño en estrategias metacognitivas según la valoración total de ítems

Valoración	**Nivel**
[25-50]	Bajo
[51-75]	Medio
[76-100]	Alto

Apéndice No. 5. Prueba tipo Likert sobre Transformación Semiótica

Estimado estudiante: lee con atención cada enunciado y escoge la valoración que más se ajuste a tu nivel de acuerdo o desacuerdo con la cuestión planteada en el enunciado. Para ello, utiliza tu conocimiento sobre el tema y realiza los cálculos que consideres necesarios. Ten en cuenta que las posibles valoraciones son las siguientes:

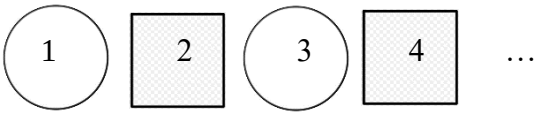
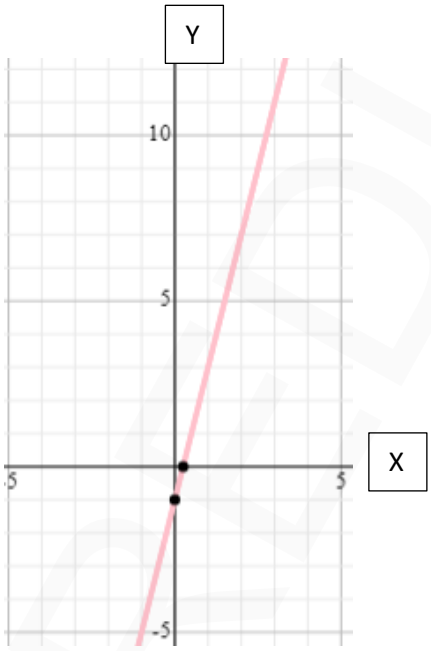
C.A= Completamente de acuerdo

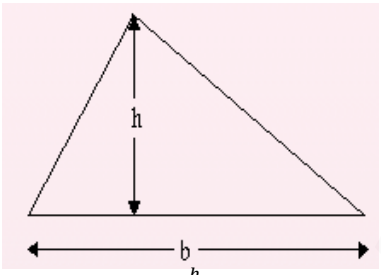
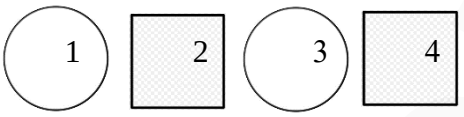
A= De acuerdo

D= En desacuerdo

C.D= Completamente en desacuerdo

Asimismo, debes marcar una X, en la celda ubicada a la derecha del enunciado y exactamente debajo de la valoración que hayas elegido.

Nivel de algebrización I (reconocimiento, operacionalización y generalización con elementos de carácter intensivo: transformaciones de conversión y tratamiento)	VALORACIÓN			
	C.A	A	D	C.D
Analiza la siguiente secuencia de círculos y cuadrados  1. Después de analizar la secuencia anterior, Pedro afirma que los círculos tienen números pares y los cuadrados, impares. Ante la afirmación de Pedro, usted está				
Analiza la siguiente secuencia donde se relaciona la posición y el número de triángulos negros de cada árbol No. de triángulos negros del árbol  Posición ----------> **1** **2** **3** 2. Juan analiza el gráfico y se da cuenta que el árbol de la posición 1 tiene 3 triángulos negros y a partir de ahí, cada posición que avanza, aumenta en 4 el número de triángulos negros. Entonces, razona que la segunda figura tiene 3+4 triángulos negros, la tercera 3+4+4, y así hasta la figura No. 20, que, según los cálculos de Juan, tiene 75 triángulos negros. Sobre los cálculos de Juan, usted está				
Teniendo en cuenta el enunciado anterior, Julián hizo una gráfica de puntos en el plano cartesiano donde relaciona cada posición 1, 2, 3 del árbol (eje x horizontal) con el número de triángulos negros correspondiente a cada una (eje y vertical).  				

3. Sobre la gráfica de Juan, usted está:				
Subcategoría: Nivel de algebrización II (Transformacional, de generalización, conversión y tratamiento, incluso con elementos de carácter extensivo, elección estratégica de variable de referencia, planteamiento de ecuaciones de la forma Ax+B= C)	VALORACIÓN			
	C.A	A	D	C.D
Considere la siguiente información: El área de un triángulo está dada por la fórmula $A = \frac{bh}{2}$ donde b= medida del lado de la base y h= medida del lado de la altura (h es perpendicular a b).  4. Juan plantea una ecuación alternativa: $A = \frac{h}{2}b$ y dice que es equivalente a $A = \frac{bh}{2}$. Sobre la afirmación de Juan, usted está				
5. Jose diseñó un juego algebraico que consiste en "adivinar" el número que otra persona piensa. Para ensayarlo, busca a Laura y le dice que piense un número, luego, que lo multiplique por 3 y al resultado obtenido, le sume 12. En ese momento, Laura debe decirle cual es el resultado acumulado, a lo que ella responde: 36. Para determinar el número que Laura pensó, Jose piensa que debe resolver la siguiente ecuación: 12+3x = 36. Ante el pensamiento de José, usted está:				
6. A Pedro le plantean la siguiente situación: "En cierta fiesta de cumpleaños asisten 64 personas entre mujeres y hombres. Si el número de mujeres es el doble del número de hombres más 7, ¿Cuántas mujeres asistieron?" Luego, le piden que plantee una ecuación algebraica que represente el problema anterior. Con el fin de plantear la ecuación con expresiones enteras (no fraccionarias), Pedro comienza representando el número de mujeres con la letra x. Ante lo efectuado por pedro, usted está				
Analiza la siguiente secuencia de círculos y cuadrados  7. Considere la siguiente afirmación: "las expresiones algebraicas, 2n-1 y 2n, corresponde respectivamente a la generalización de los números que están contenidos círculos y cuadrados". Sobre la afirmación anterior usted está				
Subcategoría: Nivel de algebrización III (uso de expresiones intensivas, transformación de tipo tratamiento y conversión, relaciones funcionales y resolución de problemas que se modelan con ecuaciones de la forma Ax+B= Cx+D)	VALORACIÓN			
	C.A	A	D	C.D
A Pedro le plantean la siguiente situación: "En cierta fiesta de cumpleaños asisten 64 personas entre mujeres y hombres. Si el número de mujeres es el doble del número de hombres más 7, ¿Cuántas mujeres asistieron?" 8. Teniendo en cuenta la situación anterior, Pedro construyó la siguiente ecuación, para representar algebraicamente el problema: x+ 2x+7= 64, de donde se obtuvo que el número de hombres es 18. Ante el resultado de Pedro, usted está				
9. Carlos inventó un enunciado problema partiendo de la ecuación 5(t-1) = 30 + 3t, así: En una carrera en línea recta, le doy a mi amigo una ventaja de 30 metros y un minuto				

de recorrido. Él tiene una velocidad de 3 metros por minuto y yo, de 5 metros por minuto. Entonces, me lo alcanzaré al cabo de 17 minutos y medio. Ante el enunciado y solución propuesta por Carlos, usted está				
Analiza la siguiente secuencia donde se relaciona la posición y el número de triángulos negros de cada árbol Triángulos negros del árbol  Posición ----------> 1 2 3 10. Después de ciertos cálculos, Juan razona que la expresión algebraica que relaciona el número de triángulos negros del árbol (T), en función de la posición (p) es T = 4p -1. Ante el razonamiento de Juan, usted está				

Niveles de desempeño en Transformación Semiótica según la valoración total de ítems

Valoración	Nivel
[10-25]	Nivel I de algebrización
[26-35]	Nivel II de algebrización
[36-40]	Nivel III de algebrización

INSTRUMENTOS CUALITATIVOS

Apéndice No. 6. Guión de Entrevista a grupos focales sobre Saberes Previos

Estimado estudiante: con base en los procedimientos realizados para responder las pruebas de la sesión anterior, da tu opinión a las siguientes preguntas con la mayor sinceridad posible.

Subcategoría: Axiomas
1. Observa las siguientes ecuaciones aritméticas: **1)** 6(5+8+7)= 6(5)+6(8)+6(7) **2) (**9)(3)(5) = (5)(3)(9) **3)** 5+ (7+9) = 9+ (7+5). ¿Te recuerdan a ciertas propiedades? SI___ NO___ ¿Cuáles son las propiedades que justifican la veracidad de esas ecuaciones?

Subcategoría: Definición de operaciones en números reales
2. Observa la siguiente operación aritmética: $\frac{30}{6}$. Imagina que tu mejor amigo, que solo sabe sumar y restar, te pide que le enseñes (con sumas y luego, con restas) a encontrar el resultado. ¿Sabes cómo ayudarle? SI___ NO___ (Describe como lo harías)
Subcategoría 3: Noción algebraica
3. Observa la siguiente igualdad aritmética: 2( ) + 4+3= 9+4. ¿Se te ocurre alguna estrategia para encontrar el número que va entre paréntesis, de forma que la igualdad sea verdadera? SI___ NO___ (Describe lo más específicamente posible cómo lo harías)
4. En las secuencias numéricas propuesta en la prueba ¿Tuviste la sensación de haber encontrado la regla, para saber el número que sigue? SI___ NO___ (Describe cómo lo lograste)

Apéndice No. 7. Guión de Entrevista a grupos focales sobre Estrategias Metacognitivas

Estimado estudiante: con base en los procedimientos realizados para responder las pruebas de la sesión anterior, de su opinión a las siguientes preguntas con la mayor sinceridad posible.

Subcategoría: Planeación
1. Luego de comprender la cuestión a resolver en un problema, ¿piensas primero en los aspectos que conoces, desconoces y una estrategia posible? SI ___ NO ____ (En caso afirmativo, describe con el mayor detalle posible como planeas la resolución de un problema)

Subcategoría: Regulación
2. ¿Te detienes a revisar de vez en cuando si tu estrategia planeada está dando resultado, si debes reorientar o ajustar tu proceso de resolución? SI __NO __ (En caso afirmativo, describe cómo te das cuenta que tu estrategia es o no eficaz)
Subcategoría: Evaluación
3. Cuando terminas de resolver un problema, ¿verificas que tu respuesta cumpla las condiciones del enunciado, para determinar si es correcta? SI __NO ___ (En caso afirmativo, describe cómo te aseguras que tu respuesta es correcta) ¿Hay algo adicional que quieras decir (análisis o autocríticas) luego de resolver un problema?

Apéndice No. 8. Guión de Entrevista a grupos focales sobre Transformación Semiótica

Estimado estudiante: con base en los procedimientos realizados, para responder las pruebas de la sesión anterior, de su opinión a las siguientes preguntas con la mayor sinceridad posible.

Subcategoría: Nivel I de algebrización
1. ¿Sabes como expresar el contenido verbal de un problema en diferentes formas auxiliares (gráfica, dibujo, etc.), para plantear la operación aritmética que permita resolver el problema? SI___NO___ (Describe el proceso mental que utilizas para plantear las operaciones aritméticas en la resolución).
Subcategoría: Subcategoría: Nivel II de algebrización
2. Cuando identificas la cuestión a resolver en un problema algebraico, ¿Piensas en escoger estratégicamente la variable a la que le asignaras la letra X? SI__ NO ___ (Describe verbalmente cómo escoges dicha variable de referencia y porqué crees que ese paso es importante)

Subcategoría: Nivel III de algebrización
3. Observa la siguiente ecuación: 2x+6= 3x-12 ¿Sabes cómo despejar la variable? SI__ NO ___ (Describe verbalmente como lo harías)

Apéndice No. 9. Coeficiente de validez de contenido del instrumento de saberes previos

	Puntuación de Jueces							
No. ítem	J.1	J.2	J.3	Sx_1	Mx	CVC_i	P_{ei}	CVC_{tc}
1	38	31	37	106	2,65	0,883333	0,037037	0,846296
2	38	33	37	108	2,7	0,9	0,037037	0,862963
3	38	33	31	102	2,55	0,85	0,037037	0,812963
4	38	29	37	104	2,6	0,866667	0,037037	0,82963
5	38	30	38	106	2,65	0,883333	0,037037	0,846296
6	38	33	37	108	2,7	0,9	0,037037	0,862963
7	38	32	37	107	2,675	0,891667	0,037037	0,85463
8	38	34	36	108	2,7	0,9	0,037037	0,862963
9	38	30	37	105	2,625	0,875	0,037037	0,837963
10	38	32	37	107	2,675	0,891667	0,037037	0,85463
				Coeficiente de validez de contenido				**0,84713**

Apéndice No. 10. Coeficiente de validez de contenido del instrumento de transformación semiòtica

	Puntuación de Jueces							
No. ítem	J.1	J.2	J.3	Sx_1	Mx	CVC_i	P_{ei}	CVC_{tc}
1	38	30	32	100	2,5	0,833333	0,037037	0,796296
2	38	31	34	103	2,575	0,858333	0,037037	0,821296
3	38	33	35	106	2,65	0,883333	0,037037	0,846296
4	38	33	35	106	2,65	0,883333	0,037037	0,846296
5	38	29	36	103	2,575	0,858333	0,037037	0,821296
6	38	33	29	100	2,5	0,833333	0,037037	0,796296
7	38	33	34	105	2,625	0,875	0,037037	0,837963
8	38	33	35	106	2,65	0,883333	0,037037	0,846296
9	38	33	25	96	2,4	0,8	0,037037	0,762963
10	38	33	35	106	2,65	0,883333	0,037037	0,846296
				Coeficiente de validez de contenido				**0,82213**

RED-UMET