UNIVERSIDAD METROPOLITANA DE EDUCACIÓN, CIENCIA Y TECNOLOGÍA

Decreto ejecutivo 575 del 25 de julio 2004, acreditada mediante

Resolución Nro. 15 del 31 de octubre de 2012

Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación

Doctorado en Ciencias de la Educación con Énfasis en Investigación, Evaluación y Formulación de Proyectos Educativos

FACTORES ASOCIADOS A DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS: NÚMERO ENTERO, EN ESTUDIANTES DEL GRADO OCTAVO DE EDUCACIÓN BÁSICA SECUNDARIA

Diego Alejandro Cruz Echeverri

Director de tesis: Dr. Edison Alberto Sucerquia Vega

Panamá, abril 2023

UNIVERSIDAD METROPOLITANA DE EDUCACIÓN, CIENCIA Y TECNOLOGÍA

Decreto ejecutivo 575 del 25 de julio 2004, acreditada mediante

Resolución Nro. 15 del 31 de octubre de 2012

Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación

Doctorado en Ciencias de la Educación con Énfasis en Investigación, Evaluación y Formulación de Proyectos Educativos

FACTORES ASOCIADOS A DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS: NÚMERO ENTERO, EN ESTUDIANTES DEL GRADO OCTAVO DE EDUCACIÓN BÁSICA SECUNDARIA

Trabajo presentado como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias de la Educación, con Énfasis en Investigación, Evaluación y Formulación de Proyectos Educativos.

Autor: Diego Alejandro Cruz Echeverri

Director de tesis: Dr. Edison Alberto Sucerquia Vega

Panamá, abril 2023

Dedicatoria

A Dios y a mi familia.

Agradecimientos

Al Doctor Edison Alberto Sucerquia Vega, por su acompañamiento y orientaciones en este proceso de investigación, disponiendo de sus conocimientos y también de su tiempo.

A mi familia, a los amigos y compañeros que de una u otra forma aportaron al desarrollo de este trabajo.

Resumen

Este estudio considera el término “dificultades de aprendizaje” como unidad compleja de análisis, ya que pueden ser diferentes factores los que inciden en su origen. Con el propósito de comprender dichos factores, se retoman investigaciones como las de Claxton (2001) y Schunk (2012) relacionadas con el aprendizaje y algunas de sus facultades. También se hace un abordaje sobre el conocimiento matemático, dificultades de aprendizaje en matemáticas y evaluación.

Al ser una investigación de corte cualitativo, se emplea la teoría fundamentada (Strauss y Corbin, 2016) para la recolección de datos, el análisis y la construcción de teoría a partir de los mismos, con la mediación de la herramienta Atlas.ti; la investigación se desarrolla en el campo de la educación matemática para realizar aportes en la comprensión de las dificultades que presentan los estudiantes respecto al aprendizaje del número entero.

A partir del tratamiento de datos planteado por la teoría fundamentada, se han diseñado instrumentos que permitieron la interacción de los participantes en situaciones que implican los conocimientos y procesos asociados al número entero. Entre los resultados más significativos de la investigación, se puede mencionar que se establecieron categorías que identifican y relacionan factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero, entre ellas están: consciencia de la dificultad, comprensión, uso de signos y manejo del tiempo, correlacionadas a través de un esquema de red elaborado con Atlas.ti.

Palabras clave: Aprender, Comprensión, Consciencia de la dificultad, Dificultad de aprendizaje, Manejo del tiempo, Número entero, Teoría fundamentada, Uso de signos.

Abstract

This study considers the term "learning difficulties" as a complex unit of analysis since there may be different factors that affect its origin. In order to understand these factors, research such as Claxton (2001) and Schunk (2012) related to learning and some of its faculties are taken up. An approach is also made on mathematical knowledge, learning difficulties in mathematics and evaluation.

Being a qualitative research, grounded theory (Strauss and Corbin, 2016) is used for data collection, analysis and theory construction from them, with the mediation of the Atlas.ti tool; The research is carried out in the field of mathematics education to make contributions to the understanding of the difficulties that students present with respect to learning the whole number. From the treatment of data proposed by the grounded theory, instruments have been designed that allowed the interaction of the participants in situations that involve the knowledge and processes associated with the integer. Among the most significant results of the research, it can be mentioned that categories were established that identify and relate factors associated with difficulties in learning the whole number, among them are: awareness of the difficulty, comprehension, use of signs and time management, correlated through a network scheme
elaborated with Atlas.ti.

Keywords: Learning, Comprehension, Awareness of Difficulty, Learning Difficulty, Time Management, Whole Number, Grounded Theory, Use of Signs.

ÍNDICE GENERAL

Lista de figuras

Lista de tablas

CAPÍTULO I. CONTEXTUALIZACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA

1. Descripción de la problemática

1.1. Ubicación geográfica

El centro de desarrollo del presente estudio corresponde al municipio de Jericó, ubicado en la subregión suroeste del departamento de Antioquia, Colombia. Dista a 114 kilómetros de la ciudad capital, Medellín; el viaje por carretera dura aproximadamente 3 horas. Declarado pueblo patrimonio, sobresale por su arquitectura y con la reciente canonización de la Santa Madre Laura, se reconoce ahora como uno de los principales destinos turísticos y religiosos dado que su casa natal se encuentra ubicada en él.

Figura 1. Municipio de Jericó, Antioquia, Colombia.

Fuente: Autor

Actualmente, soy docente del área de matemáticas en la Institución Educativa Escuela

Normal Superior de Jericó, formadora de maestros y de la cual soy orgullosamente egresado; en ella realicé los estudios de básica secundaria y media, también el Programa de Formación Complementaria, correspondiente a mis estudios iniciales como docente. Soy licenciado en Educación Básica con énfasis en matemáticas y Magíster en Educación Matemática; cuento con experiencia en los diferentes niveles (básica primaria, secundaria y media), inicialmente en el sector privado y posterior a ello en el sector oficial, lo cual ha permitido el reconocimiento de la presencia en diferentes contextos independientes del género, la edad, y otras condiciones, de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

Estas han sido identificadas en algunos casos en la actitud y disposición del estudiante, en otros, en la incapacidad para resolver operaciones de acuerdo a las propiedades que apliquen, derivado en la no comprensión de situaciones problema; también en la dificultad para expresar y verbalizar un proceso matemático, para realizar cálculos mentales, para responder acertadamente a exámenes, entre otras.

1.2. Resultados ICFES

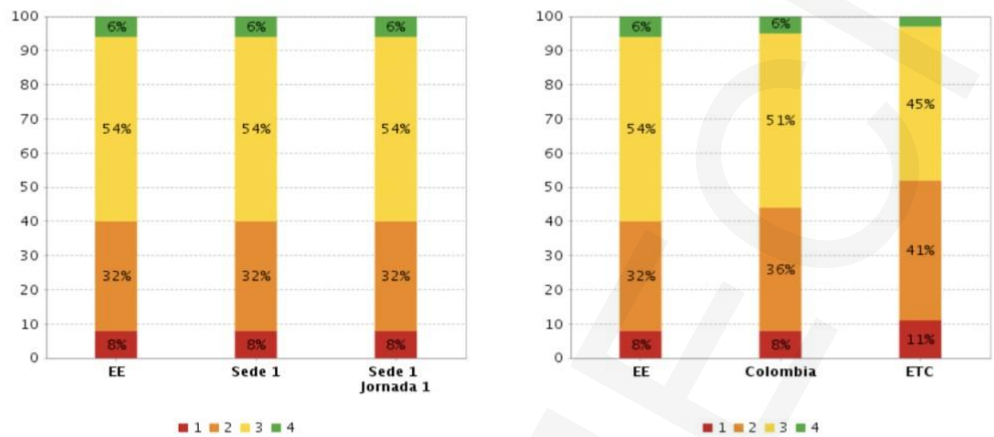
El Instituto Colombiano para la Evaluación de la Calidad de la Educación, en adelante ICFES, es una entidad del Estado Colombiano y entre sus funciones está la de evaluar la calidad de la educación en los diferentes niveles, cuyos resultados ofrecen información a las instituciones y esta a su vez se convierte en un insumo en la búsqueda de mejorar dicha calidad. Con relación elemento evaluación, me permito presentar el consolidado de los resultados correspondientes a las pruebas Saber 11º en el área de matemáticas para el año 2019 de la Institución donde laboro.

Figura 2. Resultados Saber 11 en el área de matemáticas.

Fuente: elaboración propia, Resultados institucionales Saber 11-2019, ICFES.

La figura muestra que el 72% de la población, evaluada en una escala de 0 a 100, obtuvo una puntuación inferior a 60 puntos, mientras que sólo el 28% obtuvo un puntaje igual o superior a 60. A partir de la información anterior, valdría la pena preguntarse e indagar por los estudiantes que pudiesen presentar alguna dificultad en el aprendizaje de las matemáticas, y si verdaderamente los resultados expuestos son prueba de ello. Se muestra también, a continuación, información presentada por el ICFES, sobre los resultados de la misma prueba:

Figura 3. Porcentaje de estudiantes por niveles de desempeño en Matemáticas



Fuente: tomado de Resultados institucionales Saber 11-2019, ICFES.

A partir de lo anterior y teniendo en cuenta que el escenario ideal es aquel en el cual los segmentos de color verde y amarillo ocupen la mayor parte de la barra, según lo señala el ICFES, podría afirmarse que la institución se encuentra bien, puesto que el 60% se distribuye entre los colores amarillo y verde, correspondientes a los niveles 3 y 4 respectivamente, pero ¿qué sucede con el otro 40 %, distribuido entre los colores rojo y naranja?, además, es posible observar que la tendencia es similar a nivel de Colombia.

De otro lado, el informe presenta un comparativo de los aprendizajes con los cuales se evidencian dificultades, de acuerdo con el porcentaje promedio de respuestas incorrectas, con una discriminación por colores, así: si el porcentaje promedio de respuestas incorrectas es menor al 20% se asigna el color verde, si es mayor o igual al 20% y menor al 40% se asigna el color amarillo, si es mayor o igual al 40% y menor al 70% se asigna el color naranja y si es igual o mayor al 70% se asigna el color rojo.

Figura 4. Porcentaje de promedio de respuestas incorrectas en cada aprendizaje evaluado en

Matemáticas

Aprendizaje	EE	Colombia	ETC
Comprende y transforma la información cuantitativa y esquemática presentada en distintos formatos	24%	25%	29%
Valida procedimientos y estrategias matemáticas utilizadas para dar solución a problemas.	53%	51%	54%
Frente a un problema que involucre información cuantitativa, plantea e implementa estrategias que lleven a soluciones adecuadas.	54%	53%	57%
Frente a un problema que involucre información cuantitativa, plantea e implementa estrategias que lleven a soluciones adecuadas.	51%	51%	54%
Comprende y transforma la información cuantitativa y esquemática presentada en distintos formatos	43%	44%	48%
Valida procedimientos y estrategias matemáticas utilizadas para dar solución a problemas.	46%	45%	49%

Fuente: tomado de Resultados institucionales Saber 11-2019, ICFES

Tomando la información anterior, y al realizar el proceso de comparación con los resultados a nivel nacional y el comportamiento de los mismos, es posible afirmar que la tendencia se conserva. Además que se hace necesario analizar los mismos desde el logro de los aprendizajes, o por el contrario, a partir de los desaciertos, identificar la posible presencia de dificultades asociadas al aprendizaje de las matemáticas, sin asegurar o dar por hecho que ellas se vean reflejadas en estos resultados ya que es necesario primero identificar su presencia y en torno a ello reconocer factores asociados a dichas dificultades.

Así mismo, la educación matemática en el contexto colombiano no es un tema nuevo, razón por la cual es importante tener en cuenta los cambios que se han suscitado con el pasar del tiempo, haciendo especial énfasis en lo concerniente al aprendizaje de las matemáticas. Es así como estos resultados motivan al desarrollo de una investigación que dirija sus esfuerzos en la identificación de las dificultades de aprendizaje de las matemáticas, concretamente en relación al número entero, que de alguna manera puedan explicar los porcentajes o resultados que presentan los estudiantes en estas pruebas saber y en los procesos que se desarrollan, especialmente durante las clases, y al mismo tiempo posibilite la identificación de factores asociados ante la presencia de una dificultad en el aprendizaje de las matemáticas, razones que permiten la consideración de los resultados, tanto en pruebas estandarizadas como es el caso del ICFES, así como en pruebas internas, de criterios problematizadores que dan razón a la presente investigación.

1.3. ¿Qué es una dificultad de aprendizaje en matemáticas?

Ahora bien, no es posible desconocer las dificultades que a lo largo de la historia se han presentado en el aprendizaje de las matemáticas, situación que no es ajena a la realidad. Desde la experiencia como estudiante, se tuvo la posibilidad de conocer casos de personas que las presentaban, aun teniendo claro que las matemáticas son necesarias e importantes en varios contextos y situaciones de la sociedad, y las razones de ello podrían ser diversas. Por otro lado, ahora como docente de matemáticas, es frecuente encontrar casos de estudiantes que, por más que se esfuerzan y lo intentan, presentan ciertas dificultades en su aprendizaje.

Con lo anterior, en el campo de una ciencia exacta como lo son las matemáticas, son variadas las posibles dificultades que evidencian los estudiantes durante los procesos de aprendizaje y, en general, en su proceso de formación. En este sentido, llama la atención la relación de éstas con el papel de los docentes en las clases y con las posibles dificultades a las que se pueden ver enfrentados los estudiantes en sus años de escolaridad, reconociendo que ellos pueden ser más competentes en otros campos o áreas de conocimiento.

De esta manera, es de reconocer que dentro de cualquier aula de clase se encuentra una amplia gama de capacidades académicas, así como de personalidades y puntos fuertes y débiles. Esta situación nos lleva a pensar en estudiantes con posibles dificultades de aprendizaje, y que muchas de ellas no son factores que se relacionen con déficit cognitivos o patologías mentales, cuando sabemos por ejemplo que uno de ellos se desenvuelve en otras áreas con mayor facilidad que en matemáticas.

Al respecto, Hudson (2017) sostiene que es común que una dificultad de aprendizaje se repita en una misma familia, pero además se producen en todos los grupos raciales y contextos económicos, sin establecer distinción alguna sobre ellos. Afirma también, que no es posible curar tales dificultades ni mucho menos desaparecerlas, lo que no se convierte en una condena puesto que se debe buscar la manera de contribuir a su superación en la búsqueda de personas competentes, aspecto en el que los maestros jugamos un papel importante. Por tal motivo, se hace necesario establecer procesos que permitan la identificación de dichas dificultades, a razón de poder comprenderlas y establecer una categorización de ellas, de acuerdo con factores asociados a de las mismas.

De acuerdo con la Real Academia Española, se concibe a la dificultad como la oposición o contrariedad que impide conseguir, ejecutar o entender algo bien y pronto, mientras que Schunk (2012) la asume como el hecho que revela lo que uno puede y no puede hacer. De otro lado, este último afirma que “aprender implica construir y modificar nuestro conocimiento, así como nuestras habilidades, estrategias, creencias, actitudes y conductas” (p. 2), haciendo referencia a lo que es el aprendizaje. En un sentido más concreto, partiendo de los conceptos de dificultad y aprendizaje, Romero y Lavigne (2004) afirman que

> Las Dificultades en el Aprendizaje se refieren a un grupo de trastornos que frecuentemente suelen confundirse entre sí. Las razones fundamentales de tal confusión son: la falta de una definición clara, los solapamientos existentes entre los diferentes trastornos que integran las dificultades en el aprendizaje, sobre todo cuando median aspectos de privación educativa y social, y, en tercer lugar, la heterogeneidad de la población escolar a la que se refieren. (p. 7)

De esta manera, se plantea la posibilidad de que dichas dificultades se asocien a trastornos del aprendizaje que afectan la correcta adquisición y ejecución de las diferentes habilidades matemáticas, tales como la estimación, el cálculo mental, la medición, el análisis de datos, la visualización espacial, entre otras. La estructuración mental que posibilite el aprendizaje está enmarcado a partir de los procesos propuestos desde los Lineamientos Curriculares de matemáticas (1998) y Estándares Básicos de Competencias en matemáticas (2006): formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. (p. 51), los cuales orientan y enmarcan la enseñanza de las matemáticas en el contexto colombiano y pueden identificarse así mismos como posibles generadores de dificultades en su aprendizaje.

En este mismo sentido y aludiendo a la multiplicidad de dificultades que pueden presentar los estudiantes, y que en algunos casos se pudiera llegar a la subjetividad, Romero y Lavigne (2004) sostienen como uno de los principios de partida que

> las Dificultades en el Aprendizaje son un fenómeno verdadero, no una invención, ni una construcción social. A pesar de los condicionantes psicológicos, educativos, políticos, ideológicos y filosóficos implicados en su aparición, y sobre todo, en su extraordinario desarrollo, de los más que aparentes intereses profesionales y familiares; y a pesar de los problemas existentes para definir adecuadamente las Dificultades en el Aprendizaje, es un hecho que existe un importante número de alumnos con problemas para aprender las tareas escolares, que no se deben a causas sensoriales, a privaciones crónicas ni a graves discapacidades intelectuales. (p. 9-10)

De otro lado, Hudson (2017) presenta la siguiente acotación para hacer referencia a dificultades en el aprendizaje, en la medida que se reconoce su presencia

> Las estimaciones sugieren que, en una clase típica de unos 30 alumnos, habrá uno, o probablemente dos, alumnos con una Dificultad Específica de Aprendizaje (DEA). Se encuentran en todo tipo de escuelas y presentan diversos niveles de discapacidad. Desafortunadamente para algunos de estos alumnos, a lo largo de toda su vida escolar, no se identificará cuál es su particular dificultad de aprendizaje y, por tanto, se encontrarán

> desprovistos de apoyo. Puede que hasta su inteligencia y su potencial sean infravalorados.
>
> Existe incluso el peligro de que abandonen la escuela con una baja autoestima y unas calificaciones y aspiraciones de futuro inferiores a las que podrían alcanzar. (p. 9)

De esta manera se encuentra sustento a lo enunciado en líneas anteriores, cuando dichas dificultades son una realidad latente a la que en ocasiones se prefiere hacer caso omiso, por diferentes razones, en el caso propio una de ellas puede corresponder al desconocimiento e incapacidad para identificarlas, sin pensar en las consecuencias a corto, mediano y largo plazo.

Es así como durante los procesos de enseñanza se observan dificultades, en algunos estudiantes para alcanzar los niveles esperados en el área, lo que genera y despierta el interés por identificar y asociar factores que se esconden tras ellas, en los casos que un estudiante no responde de manera acertada o de la forma solicitada. Lo anterior conduce, por lo general, a un juzgamiento a priori sin analizar qué puede suceder tras cada situación, siendo posible que como maestros desconozcamos las razones y causas.

Comprender el fenómeno, explorarlo, desglosarlo, argumentar a partir de él, es entonces una necesidad latente, puesto que como se ha mencionado antes, la presencia de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas es y seguirá siendo una realidad que, si bien se ha atendido, es necesario centrar el interés en el uso de instrumentos, pues hasta el momento no es posible encontrar alguno que permita identificar concretamente factores asociados a dichas dificultades o determinar las diferencias y similitudes entre la manera en que se evidencian para poder establecer categorías de las mismas. De esta manera, se convierte en un objeto investigativo a nivel de tesis doctoral, en cuanto se pretende realizar un aporte que conduzca a favorecer la labor de los maestros de matemáticas, referente al reconocimiento de factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero y en la búsqueda de la atención oportuna a partir de ello.

Un elemento clave durante el proceso educativo, el cual debe considerarse a tener en cuenta durante y después de la presente investigación, es el denominado evaluación, ejercicio a través del cual, se verifica si un estudiante alcanzó o no un aprendizaje, sin que sea prueba fehaciente del logro o adquisición de una competencia de acuerdo al enfoque que se le asigne. La discusión se centra entonces, en el significado que se le atañe y la forma cómo se emplea, siempre y cuando la generalidad sea evaluar conocimientos dentro de la escuela a través de una prueba escrita que finalmente no puede ser la evidencia de ello, tal como sucede también con pruebas externas SABER y PISA utilizadas para medir la calidad de la educación.

Al respecto, Schunk (2012) afirma que los exámenes escritos reflejan aprendizaje, pero existen muchos factores que pueden afectar el desempeño incluso cuando se ha aprendido; postulado que es posible valorar, aún desde la misma práctica y experiencia personal, en el papel de estudiante y ahora como maestro. Es importante pensar en la evaluación y su connotación como evidencia de aprendizaje, en tanto existen factores internos y externos que pueden influir en el proceso, puesto que pueden ser múltiples las razones por las cuales los estudiantes presentan una dificultad. Ahora bien, si el maestro no conoce cuál es la dificultad, es menos posible generar y pensar en ambientes adecuados de aprendizaje, en relación a las necesidades y características de los estudiantes.

Se hace necesario entonces, dentro de esta mirada, pensar en el papel que desempeñamos como maestros, teniendo en cuenta que, aunque el aprendizaje de nuestros estudiantes no dependa 100% de nosotros, si ejercemos una influencia directa sobre el proceso, y más aún pensar en aquellos que de alguna manera evidencian dificultades en su aprendizaje. Las teorías conductuales, por ejemplo y de acuerdo con Schunk (2012), implican que aquellos que tienen el papel de educar deben organizar el ambiente de modo que quienes aprenden puedan responder de manera apropiada a los estímulos, mientras que de acuerdo a las teorías cognoscitivas el enfoque está en lograr un aprendizaje significativo, partiendo de las percepciones que los estudiantes puedan tener de sí mismos y de sus entornos de aprendizaje.

Sin embargo, no son claras las percepciones que los estudiantes tienen sobre las dificultades que ellos mismos puedan tener, se limitan a afirmar que son difíciles, restringiendo así mismo la labor del maestro en organizar el ambiente de aprendizaje y desconociendo las posibles causas de dichas dificultades o simplemente asumiendo aspectos que pueden estar asociados a otros factores.

Highet (1950, citado en Schunk, 2012) afirma que no es posible separar la enseñanza del aprendizaje, sentido en el que sí es posible debatir, puesto que no siempre para aprender algo debe haber un alguien que enseñe, y que los buenos profesores continúan aprendiendo acerca de sus materias, así como formas de fomentar el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, resalta nuevamente una realidad: en la mayoría de casos no estamos en la capacidad de identificar cuándo un estudiante presenta dificultades de aprendizaje, y en ese sentido mucho menos para intervenir y actuar de acuerdo con dicha dificultad puesto que es necesario tener presente que “la ausencia de una conducta apropiada no significa que el individuo no ha aprendido. Aprendizaje no es lo mismo que desempeño, y muchos factores, además del aprendizaje, podrían afectarlo". (Schunk, 2012, pág. 15)

Por otro lado, en la búsqueda de antecedentes se ha tratado de encontrar modelos o instrumentos que permitan y posibiliten la identificación de dificultades referentes al aprendizaje de las matemáticas, y hasta el momento no ha sido posible puesto que sólo se encuentran autores que referencian y enuncian las dificultades. De otro lado, siendo las matemáticas una ciencia exacta y considerablemente amplia, se centra la atención en el conocimiento matemático del número entero y dificultades de aprendizaje asociadas a él, precisamente por las dificultades que llega a generar en estudiantes que transitan por la educación básica secundaria y media.

De esta manera, al reconocer la presencia de dificultades de aprendizaje referidas a las matemáticas en algunos estudiantes, concretamente en relación al número entero, se genera la necesidad de intervenir y actuar frente a ellas, por las siguientes razones: es importante tener en cuenta que los resultados obtenidos para el área tanto en pruebas internas como externas son bajos; con las experiencias vividas día a día en las aulas de clase con estudiantes; dado que no se vislumbra claramente qué se puede asociar a las dificultades; la falta de una postura clara frente a qué es una dificultad y cómo categorizarla; no hay suficiente claridad respecto a cómo identificar una dificultad en el aprendizaje del número entero a partir de factores asociados a ellas, centrados en el estudiante, además, es de interés para la comunidad educativa y en general en la actualidad.

Con lo anterior, es imperante generar estrategias que contribuyan, en primera medida, a su identificación como dificultades y factores asociados a las mismas, centrados en el estudiante, elemento que se considera de gran relevancia en el presente proceso de investigación, situación que se espera permita y favorezca la categorización de las mismas para un posterior tratamiento y a partir de la cual se genera la siguiente pregunta de investigación:

1.4. Formulación de la pregunta de investigación

¿Cómo categorizar dificultades de aprendizaje en relación al número entero, teniendo en cuenta factores asociados a las mismas y centrados en el estudiante?

1.5. Objetivos

1.5.1. General

Determinar un modelo teórico que permita reconocer dificultades en el aprendizaje del número entero teniendo en cuenta factores asociados a las mismas y centrados en el estudiante.

1.5.2. Específicos

Identificar posibles dificultades en el aprendizaje del número entero en estudiantes de octavo grado de educación básica secundaria.

Reconocer similitudes o diferencias en las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de los números enteros.

Identificar factores asociados a dificultades relacionadas con el aprendizaje del número entero.

Establecer posibles relaciones de influencia entre el aprendizaje de los números enteros y las dificultades manifestadas por estudiantes con la mediación del software Atlas.ti.

1.6. Justificación e impacto

El presente estudio se justifica basado en los aportes que el cumplimiento de los objetivos hace a nivel teórico al campo de las matemáticas, específicamente en relación a los procesos de aprendizaje del número entero y la comprensión como fenómeno de las dificultades que se asocian a él.

En primera medida, es necesario trazar rutas que conduzcan a contrarrestar las creencias que en algunos casos se tienen o construyen sobre las matemáticas, incluso por experiencias propias o de otros, teniendo en cuenta la factibilidad de ligar a ellas posibles dificultades en el aprendizaje del número entero, concepto que tuvo inconvenientes para ser aceptado incluso a través de la historia.

Se reconoce además, y en concordancia con Parra (1994), que la matemática como disciplina ha sido de las más complejas de aprender, razón por la que se espera aportar, con la identificación de factores asociados a dichas dificultades, centrados en el estudiante, al reconocimiento de ellas por parte del docente e interesados en la educación e investigación matemática, incluso por los mismos estudiantes, puesto que en esa medida será posible también su atención.

En esta línea, también se justifica bajo los aportes realizados por Aponte y Rivera (2017), en cuanto reconocen la multiplicidad de dificultades que se han generado, a través del tiempo, en los procesos de enseñanza y aprendizaje que refieren este concepto, situación que sigue vigente.

Con lo anterior, se espera aportar al campo de la educación matemática y especialmente en lo concerniente a los procesos de aprendizaje del número entero en estudiantes de básica secundaria y así mismo los procesos de enseñanza orientados por los maestros de matemáticas, siendo esto posible a partir de la identificación y establecimiento de relaciones entre factores asociados a dificultades de aprendizaje presentes en este campo, concentrados en el estudiante. Teniendo presente que autores como Palencia (2019), Inostroza (2018) y Sepúlveda et al. (2016) coinciden al considerar la multiplicidad de situaciones que se pueden esconder tras una aparente dificultad, es necesario precisar sobre ellas, sentido en el que se reconoce el aporte e impacto que podría tener sobre este fenómeno el presente estudio, en cuanto ellos lo contemplan más no profundizan en él.

El impacto de este estudio se da por la adopción del enfoque cualitativo para su planteamiento, puesto que se centra en el abordaje y profundización del fenómeno descrito, con la exploración desde la perspectiva de los participantes en ambientes naturales para ellos como lo es el colegio, de la misma forma que lo proponen Hernández, Fernández y Baptista (2010).

En este orden de ideas, y teniendo presente que la aplicación del concepto de número entero se requiere en todos los grados del colegio, en la universidad y en la vida en general, se requiere la identificación y comprensión de las dificultades en el aprendizaje que se le puedan vincular a partir del reconocimiento de factores asociados a ellas, centrados en los estudiantes, evitando en la medida de lo posible que se profundicen y dificulten en mayor nivel. También se determina que dichas dificultades no son sólo un problema nacional, en el sentido que se precisan investigaciones del orden internacional como el realizado por Vílchez (2014) acerca de las dificultades que genera el aprendizaje del número entero.

CAPÍTULO II. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA DE LA INVESTIGACIÓN

2. Bases teóricas, investigativas, conceptuales y legales

Con este capítulo se realiza un recorrido por la concepción de la educación matemática en el contexto colombiano, a partir de la definición de unos referentes de calidad que orientan el proceso en las instituciones del país, comprendida desde los niveles de educación básica primaria, pasando por la educación básica secundaria y la media. Así mismo, se realiza el rastreo de investigaciones relacionadas con dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, entre las que es posible citar a Sepúlveda, Opazo, Díaz-Levicoy, Jara, Saéz y Guerrero (2016), Duval (2016), Hudson (2017), Inostroza (2018), Palencia (2019) y Romero y Lavigne (2004), también se consolida un rastreo documental y bibliográfico, estado del arte, con el que se identifican algunas regularidades respecto al avance en el estudio del número entero y errores, obstáculos y dificultades asociados a dicho concepto matemático y, de manera similar, se presentan algunos referentes teóricos que abordan este fenómeno. En cuanto al aprendizaje, se consideran los aportes de Claxton (2001) y Schunk (2012) y posterior a ello, se precisan elementos puntuales acerca de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, los referentes de calidad y el concepto de número entero.

2.1. Bases teóricas

Aprender implica la construcción y modificación del conocimiento, igualmente de habilidades, estrategias, creencias, actitudes y conductas (Schunk, 2012), lo que indica que cuando una persona aprende no puede ser la misma que era antes, y en efecto, así debe ser, pero ¿cómo medir o hacer evidentes dichos cambios? ¿Sería posible, entonces, afirmar que una persona que no aprende sigue siendo la misma en cuanto a la definición anteriormente dada? Ya que, si tenemos presente la posibilidad de aprender habilidades cognoscitivas, lingüísticas, motoras y sociales, de acuerdo con él mismo, también es posible que dichas habilidades tomen muchas formas, razón por la cual no sería posible estandarizar tal medida.

En cuanto a teorías del aprendizaje, tema en cuestión, se tiene que filósofos como Platón, Emmanuel Kant y René Descartes, precursores del racionalismo, son quienes propusieron el uso de la razón en lo que al conocimiento concierne. Este segundo, por su parte, reafirmó el papel de la misma como la fuente del conocimiento, que a su vez opera dentro del campo de la experiencia, en el sentido que el conocimiento absoluto no existe sin la influencia del mundo externo.

Se sostiene que la información se toma del mundo, pero es la mente la encargada de interpretarla (Schunk, 2012), elementos que coinciden, en cierta medida, con lo planteado en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), en lo referido al conocimiento formal e informal, y las relaciones y conexiones que se pueden establecer entre ambos. La razón (mente) desempeña un papel fundamental en el ejercicio de aprender, no es posible desconocerlo, más aún cuando desde la neurociencia se investigan los diferentes procesos que se llevan a cabo al interior del cerebro, de los cuales se hace referencia en el siguiente apartado.

2.1.1. Estructura del pensamiento (cognitivo)

Para Claxton (2001), “el cerebro está construido para llevar a cabo ciertos tipos de aprendizaje con una brillantez que puede verse perturbada fácilmente si se piensa demasiado y si se intenta con demasiada intensidad” (p. 19). De otro lado, argumenta que el intelecto nos proporciona diversas herramientas perfeccionadas que desempeñan un papel importante para el aprendizaje. Por ejemplo, el conocimiento, en relación a la acumulación de datos e información; las destrezas, como lo es el aprender a utilizar las TIC; así mismo como las diferenciaciones, las preferencias, las disposiciones y el carácter. Es así, como lo afirma, que el aprendizaje no sólo logra cambiar nuestro conocimiento y nuestro hacer, sino que también lo hace con nuestro ser, y por esa razón es que el aprendizaje es continuo.

De acuerdo con el mismo autor, la capacidad natural para aprender que posee el cerebro puede aumentar, transformar y administrarse de diversas formas. De un lado, se tiene el desarrollo y evolución biológica, y de otro, el desarrollo de la cultura, a través de los cuales se genera una serie de capacidades para aprender, bien llamadas cajas de herramientas al hacer referencia al conjunto de recursos internos y externos dispuestos para la función del aprendizaje.

Retomando la idea del cerebro humano, tras investigaciones se ha determinado que la corteza parietal está implicada en las manipulaciones espaciales al igual que en la comprensión numérica y aritmética (Blakemore y Frith, 2008), permitiendo el conocimiento del número y sus relaciones además de la representación espacial. Así, se ha logrado establecer que el hemisferio derecho se ocupa de realizar estimaciones mientras el izquierdo se encarga del cálculo, señalando además su relación y dependencia del lenguaje.

En esa línea, manifiestan que, por lo general, “las lesiones en la corteza visual del lado izquierdo del cerebro originan dificultades en la lectura de palabras, mientras que las lesiones en la corteza visual del lado derecho ocasionan problemas en la lectura de dígitos” (p. 102), con lo que se permiten concluir que el cerebro posee sistemas que se encargan de los distintos aspectos del número y la cantidad, los cuales comúnmente funcionan en conjunto al integrar toda esa información para que tenga sentido como un todo.

Lo anterior puede conducir a la identificación de factores asociados a dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, como factor interno, pero así mismo existe la necesidad de aclarar la influencia de factores externos ante dichas dificultades, haciendo referencia a la propuesta de Claxton (2001) sobre los recursos internos y externos.

Un elemento a considerar es el de la memoria, en la medida que es un tema discutido y debatido a lo largo de la historia en relación a su uso y el papel que desempeña durante y después del aprendizaje, sentido en el que se destacan las teorías cognoscitivas que comparan el aprendizaje con el almacenar en la memoria conocimiento organizado y significativo, es decir, con la codificación (Schunk, 2012). En relación a ella, el autor plantea que

> La información se recupera de la memoria en respuesta a claves relevantes que activan las estructuras apropiadas de la memoria. El olvido es la incapacidad de recuperar la información de la memoria debido a la interferencia, la pérdida de la memoria o a claves inadecuadas para acceder a ella. La memoria es fundamental para aprender, y la forma en que se aprende la información determina cómo se almacena y se recupera. (p. 23)

Partiendo de lo anterior, se ponen en consideración elementos relacionados con la memoria para la presente investigación, con el ánimo de determinar la relación e influencia que puede ejercer esta en asociación a dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, dados los aprietos que conlleva para algunas personas, en su papel de estudiantes, el recuperar información necesaria.

2.1.2. El aprendizaje concebido como inferencial

El aprendizaje es para Schunk (2012) "un cambio perdurable en la conducta o en la capacidad de comportarse de cierta manera, el cual es resultado de la práctica o de otras formas de experiencia" (p. 3), coincidiendo en parte con los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), en cuanto al conocimiento informal y formal. Además, plantea que el aprender implica un cambio, como ya se ha mencionado antes, perdura a lo largo del tiempo y ocurre por medio de la experiencia, elemento último que considero de gran importancia, más aún en el aprendizaje de las matemáticas, cuando se supone partimos de lo concreto para llegar a la abstracción, pero en la medida de lo posible, permitiendo la experimentación, ya que podría decirse que no es igual aprender viendo, que aprender haciendo.

Aclara, también, que el aprendizaje es algo inferencial, ya que no es posible observarlo directamente, sólo a través de productos o resultados que se puedan obtener de los estudiantes, de ahí la necesidad de utilizar diversos métodos e instrumentos de evaluación, y no limitarse únicamente a una prueba escrita para determinar si en un estudiante hubo aprendizaje o, por el contrario, se encuentra ante la posible presencia de alguna dificultad de aprendizaje. De acuerdo con lo anterior, podría mencionarse ¿cuáles son las habilidades del pensamiento que están involucradas en el aprendizaje de las matemáticas?

De otro lado, y en concordancia con lo ya expuesto, se afirma que el aprendizaje perdura en el tiempo, pero es común escuchar que algunas personas manifiesten haber aprendido algo, pero que luego olvidan, entonces… ¿aprendieron en realidad?, ante lo cual es posible cuestionarse frente a la existencia de diversos tipos de aprendizaje. Situación similar y constante se vive en las aulas de clase, cuando se encuentran estudiantes expresando lo mismo, y lleva a quienes participan del acto educativo a pensar si están cumpliendo su objetivo, si hay facilidades para lograrlo o, por el contrario, hay barreras, obstáculos o dificultades.

Otro elemento a tener en cuenta sería la facilidad o facultad que se tiene para recuperar la información que se supone se ha aprendido, dependiendo de lo significativo que haya sido, por decirlo así. Por ejemplo, Schunk (2012) hace referencia a algunos temas que han llamado la atención de investigadores en relación al aprendizaje, como lo son la motivación, la tecnología y la autorregulación, siendo posible, en este punto, establecer una correlación con la propuesta de Claxton (2001) en cuanto a los recursos internos y externos para el aprendizaje, haciendo parte de estos últimos la tecnología, en la medida que hace que el aprendizaje esté supeditado a los medios que se utilizan, por ejemplo, no será lo mismo aprender a realizar algunas construcciones geométricas con regla y compás que haciéndolo con Geogebra; a nivel de los recursos internos, pensaría en la autorregulación como un elemento clave para la consolidación del aprendizaje mismo y que pudiera convertirse en una categoría importante dentro de la presente investigación, en referencia a las habilidades cognitivas.

2.1.3. Facultades para el aprendizaje y caja de herramientas

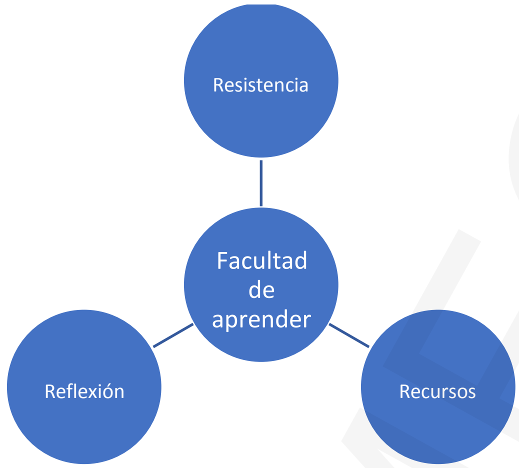
De acuerdo con Claxton (2001), aprender forma parte de nuestra naturaleza como seres humanos, dado que durante el aprendizaje se logra moldear la mente y los hábitos para adaptarse al mundo. Contrario a algunas creencias, el aprendizaje no es esencialmente intelectual, afirma, y al respecto menciona que lo que sucede en escuelas y universidades con las orientaciones de los profesores es sólo una clase de aprendizaje.

De la misma forma, se reconoce que el aprendizaje no es una actividad homogénea, razón por la que, desde la experiencia, se observa que las personas poseen diferentes formas para aprender, igualmente sucede en diferentes tiempos y en diversos niveles, algunas aprenden con mayor facilidad que otras y empleando más, o menos, recursos. Respecto a lo anterior, sostiene que "hay muchas personas que, al encontrar algo difícil, piensan que eso significa que carecen de inteligencia, y no que, simplemente, no han desarrollado aún, o recuperado, la herramienta de aprendizaje adecuada." (Claxton, 2001, pág. 18), del mismo modo que se encuentra la posibilidad de que para una persona el aprendizaje sea bloqueado por falta de confianza en sí misma, por miedo al fracaso o la humillación, condiciones que hacen referencia a la resistencia, una condición para el aprendizaje, como podría suceder en algunos casos.

En concordancia con la ya planteado, el autor se cuestiona frente hasta qué punto las creencias que las personas puedan tener sobre sí mismas, con frecuencia inconscientes, incluso sobre el aprendizaje, les limitan la facultad para el aprendizaje, conduciendo a pensar en la posible existencia de una dificultad para aprender. Se convierte entonces en una alternativa al momento de tratar de identificar factores asociados a una dificultad, cuando estamos frente a un estudiante que da indicios de ello.

Desde tal perspectiva, Claxton (2001) afirma que en general, "las personas […] difieren enormemente en cómo aprenden y en lo bien que lo hacen" (p. 13), tanto en estilo como en eficacia, y esto empieza a suceder muy pronto; con un ejemplo de dos niños hace referencia a la resistencia, en cuanto a la disposición para intentar conseguir algo, además de la capacidad para leer correctamente situaciones de aprendizaje. Sostiene también que dichas diferencias son susceptibles a modificarse a lo largo de la vida, y un elemento importante en su discurso, que bien vale la pena tener presente, es el siguiente: "El desarrollo de la resistencia frente a la incertidumbre y la dificultad […]" (p. 14) es uno de los ejes principales para fomentar el buen aprendizaje, oportuno y apropiado al hacer referencia a dificultades en el aprendizaje. Plantea entonces lo que ha denominado las tres R del aprendizaje:

Figura 5. Facultades para el aprendizaje definidas por Claxton



Fuente: elaboración propia. Aprender - El reto del aprendizaje continuo. Claxton (2001)

Considera que el aprendizaje se produce en estratos, de tal manera que en un inicio se adquiere un conocimiento consciente y específico; luego, viene el desarrollo de destrezas intuitivas para el hacer y para saber en qué momentos utilizar diversas habilidades y, posteriormente, la práctica de habilidades del aprendizaje y desarrollo de la facultad de aprender. Se menciona, respecto a lo anterior, el desarrollo de las facultades de la memoria, frente a la posibilidad de tener mayor claridad y certeza frente a las situaciones diarias.

Desde luego, Claxton (2001) alude a que esa facultad de aprender no logra desarrollarse de manera automática, de tal forma que "parece que no todos ampliamos al máximo nuestra capacidad de aprender cerebral básica" (p. 21), de ahí que se hagan evidentes ciertas diferencias en relación al aprendizaje, específicamente de las matemáticas para nuestro caso, situación que puede convertirse o hacer parte de factores asociados a dificultades en el aprendizaje de las mismas, puesto que existe la posibilidad de que el desarrollo del aprendizaje se descuide o debilite, de acuerdo con el autor, y a partir de ello puede investigarse.

Es importante tener presente que la facultad para aprender se desarrolla, así como también es posible evitar los bloqueos, en la presencia de condiciones adecuadas, sostiene Claxton (2001). Esto quiere decir que, frente a una posible dificultad de aprendizaje, con claridad frente a factores asociados a ella, es posible planear intervenciones en cuanto se diseñen los ambientes, estrategias y recursos adecuados. De ahí la importancia y necesidad de la presente investigación.

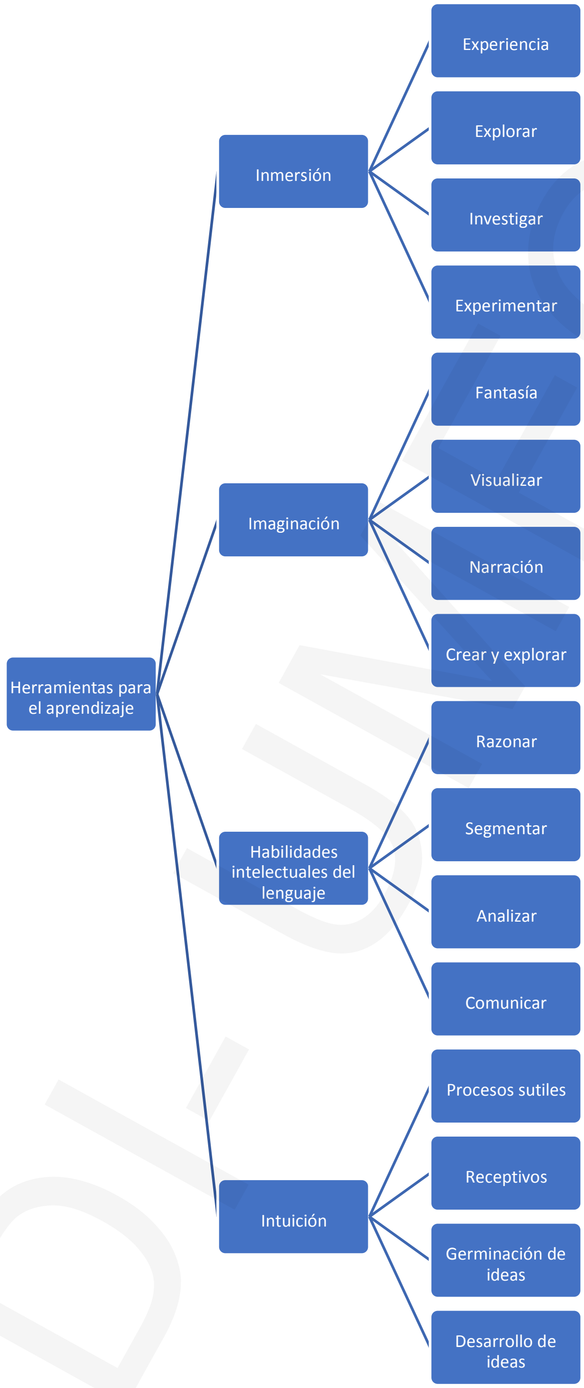
La teoría sobre el aprendizaje propuesta por Claxon (2001) es amplia, y en el siguiente párrafo da muestra de lo diverso que llega a ser el aprendizaje:

> El aprendizaje se produce de muchas formas diferentes. Algunas cosas que aprendemos parece que las absorbemos por los poros; requieren poca planificación o deliberación consciente. Otras clases de aprendizaje están muy organizadas y estructuradas. Algunas nos exigen pensar mucho; otras, nada en absoluto. Algunas parecen producirse en un instante, otras necesitan años para madurar. Algunas se producen sin esfuerzo, otras, con mucho trabajo. Algunas son relativamente suaves y serenas, otras, muy emotivas. Algunas parecen necesitar libros y profesores, otras necesitan soledad y ausencia de estimulación externa. Aprender a hacer divisiones largas no es lo mismo que aprender a nadar. Aprender a oír un ritmo cardíaco irregular con el nuevo estetoscopio no se apoya en los mismos procesos y habilidades que aprender a estructurar el día cuando uno se jubila. (p. 22)

Señala, además, cuatro elementos importantes de la caja de herramientas del aprendizaje:

el primero de ellos corresponde a la inmersión, siendo un tipo de aprendizaje centrado en el mundo físico, mayoritariamente de carácter social y debido a ello implica elementos como la interacción y la imitación, que a su vez permiten la comunicación de habilidades prácticas. Los otros tres elementos corresponden a la imaginación, las habilidades intelectuales y la intuición, como sigue:

Figura 6. Caja de herramientas para el aprendizaje



Fuente: elaboración propia. Aprender - El reto del aprendizaje continuo. Claxton (2001)

Basado en estos cuatro elementos, Claxton (2001) plantea una relación entre ellas a manera de metáfora, toda en función del aprendizaje:

> "Primero viene el tronco principal del «aprendizaje cerebral», captar patrones por medio de la inmersión en la experiencia. De él salen los retoños de la imaginación, el intelecto y la intuición, y cada retoño se desarrolla en una rama importante del árbol del aprendizaje, cultivando su propia colección de ramas tácticas concretas." (p. 23)

A partir de dicha metáfora, que ubica a la facultad de aprender en el lugar de un árbol que crece y produce cada vez más ramas, unidas unas a otras y estas a su vez al tronco, deja de manifiesto la relación que se puede establecer entre un aprendizaje y otro, de la misma forma que sucede con las neuronas, en cuanto no concebiría la existencia u origen de un aprendizaje que no se relacione, conecte o dependa de algún otro. Al mismo tiempo, permite pensar y reflexionar en cuanto a dificultades en el aprendizaje, siempre y cuando existe la posibilidad de identificar posibles relaciones y un origen, o tronco, para las mismas, a lo cual denominamos factores asociados, con el propósito de establecer categorías entre ellas.

En el mismo campo del aprendizaje, tenemos a Ausubel (1983) con su teoría del aprendizaje significativo, el cual es posible relacionar y vincular desde los postulados de Claxton (2001). Para Ausubel (1983), el aprendizaje depende de la estructura cognitiva que posee quien aprende y que se relaciona con la nueva información, entendiendo por estructura cognitiva todo el conjunto de ideas y conceptos que se tienen sobre determinada área. De acuerdo con ello, no es posible concebir el aprendizaje sin tener en cuenta lo que el estudiante ya sabe, o cree saber, aunque esté errado, ya que como lo afirma él mismo, el aprendizaje de los estudiantes no inicia en cero ni tampoco se desarrolla con mentes en blanco. Es importante entonces considerar lo que ya sabe quien aprende, para así establecer relaciones con lo que debe aprender, y así ir formando las ramificaciones correspondientes.

Sostiene que para que el aprendizaje sea significativo, la nueva información se debe conectar con un concepto relevante, a los que denomina subsunsores, preexistentes en la estructura cognitiva de quien aprende, en el sentido que logran convertirse en un punto de anclaje, y para lo cual se requiere que las ideas, conceptos o proposiciones estén claras y disponibles, de la misma manera que las ramas del árbol necesitan del tronco, no pueden crecer de la nada. Es posible retomar estos elementos, apropiándolos específicamente al aprendizaje de las matemáticas y posibles dificultades relacionadas con ello, en cuanto a la necesidad de identificar los subsunsores que se requieren para el nuevo aprendizaje, en la medida que el no poseerlos lo suficientemente claros, o que ni siquiera estén, pueden conducir a dichas dificultades.

2.1.4. Aprendizaje en matemáticas

Al hacer referencia al aprendizaje, “se habla con frecuencia de que el fin principal es que los estudiantes comprendan las matemáticas o que logren competencia o capacidad matemática” (Godino, Batanero y Font, 2003, pág. 56), en el sentido que se asume la competencia como un rasgo cognitivo, de acuerdo a los mismos autores y hace referencia a un saber específico. Ser competente en matemáticas se traduce en tener conocimientos prácticos sobre ellas, “en el caso de las matemáticas se podrá hablar de competencias generales, como competencia aritmética, algebraica, geométrica; o más específicas como, competencia para resolver ecuaciones, cálculo con fracciones, etc." (pág. 57), haciendo referencia en este caso puntual al poseer conocimientos prácticos en relación al concepto de número entero.

Respecto a lo anterior, se establece una relación entre competencia y comprensión, puesto que se requiere de la segunda para llegar a ser competente. De acuerdo con Godino, et al. (2003), ambos factores se complementan mutuamente, "la competencia atiende al componente práctico, mientras que la comprensión al componente teórico del conocimiento" (pág. 58), es decir, la competencia es al conocimiento procedimental como la comprensión es al conocimiento conceptual, en correspondencia también con lo planteado en los EBC en matemáticas (MEN 2006) sobre los dos tipos de conocimiento.

Otro factor importante a tener en cuenta es la concepción que se tiene sobre el conocimiento matemático, dado que "los términos y expresiones matemáticas denotan entidades abstractas cuya naturaleza y origen tenemos que explicitar para poder elaborar un modelo útil y efectivo sobre qué entendemos por comprender tales objetos" (Godino, et al, 2003, pág. 59-60), aspectos que sugieren niveles de complejidad, inicialmente del conocimiento matemático, pero también en el alcance de la competencia y la comprensión.

De esta forma, aprender matemáticas trasciende el repetir definiciones o identificar propiedades de diversos objetos matemáticos, según lo expuesto por los autores antes citados. De acuerdo con ellos mismos, quien sabe matemáticas "ha de ser capaz de usar el lenguaje y conceptos matemáticos para resolver problemas. No es posible dar sentido pleno a los objetos matemáticos si no los relacionamos con los problemas de los que han surgido" (pág. 62), encontrando cabida en este punto a uno de los procesos que hacen parte de la enseñanza de las matemáticas,formular y resolver problemas, descrito tanto en los lineamientos curriculares (MEN, 1998) como en los EBC (2006), aunque no se limita únicamente a ello.

Como docentes, estamos en el deber de tener presente que enseñar, y aprender matemáticas, difiere de procesos similares en otras disciplinas dado que

> La ciencia, y en particular las matemáticas, no se construyen en el vacío, sino sobre los pilares de los conocimientos construidos por nuestros predecesores. El fin de la enseñanza de las matemáticas no es sólo capacitar a los alumnos a resolver los problemas cuya solución ya conocemos, sino prepararlos para resolver problemas que aún no hemos sido capaces de solucionar. Para ello, hemos de acostumbrarles a un trabajo matemático auténtico, que no sólo incluye la solución de problemas, sino la utilización de los conocimientos previos en la solución de los mismos. (pág. 64)

Por su parte, Flores (2003) sugiere que hay diferencias en lo que significa aprender matemáticas y como se produce dicho aprendizaje, entre quienes se han dedicado a su estudio, encontrando principalmente dos enfoques: conductual y cognitivo. Mientras que los primeros conciben el aprender como cambios de conducta, insistiendo en habilidades de cálculo, los enfoques cognitivos asumen al aprendizaje como alteraciones de las estructuras mentales utilizando, entre otras estrategias, la resolución de problemas, enfatizando en el aprendizaje de conceptos.

Flores (2003) también plantea que una de las formas de concebir al aprendizaje de las matemáticas en la actualidad es como estructuralista, dado que las alteraciones de estructuras no se dan a través de procesos simples, sino de manera global. En relación a lo anterior, enfatiza en las siguientes cualidades:

- El aprendizaje matemático se realiza a través de experiencias concretas: de lo concreto a lo abstracto; "los números son una abstracción, pero llegado un momento del aprendizaje matemático, estas abstracciones pueden considerarse objetos concretos con los que realizar tareas matemáticas" (pág. 6)
- El aprendizaje tiene que arrancar de una situación significativa para los alumnos
- La forma en que los aprendices puedan llegar a incorporar el concepto a su estructura mental es mediante un proceso de abstracción que requiere modelos: los conceptos matemáticos corresponden a abstracciones complejas, es necesario buscar formas de representarlos.
- Una de las formas de conseguir que el aprendizaje sea significativo para los alumnos es mediante el aprendizaje por descubrimiento: sustento en Ausubel.
- No hay un único estilo de aprendizaje matemático para todos los alumnos: las estructuras mentales son subjetivas, por lo que se reconocen diversos estilos de aprendizaje.

2.2. Bases investigativas

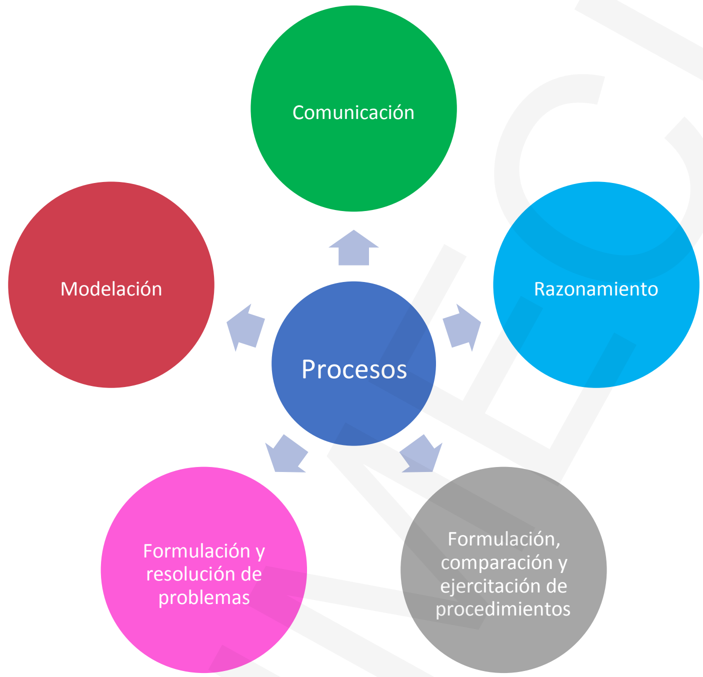
2.2.1. Antecedentes históricos

En la actualidad, el proceso educativo en los niveles de educación básica primaria, secundaria y media en las instituciones que los ofrecen, está orientado por varios textos propuestos desde el Ministerio de Educación Nacional denominados referentes de calidad, entre los que se encuentran: los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, elaborados en 1998, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (EBC), publicados en el año 2006, y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), cuya segunda versión fue publicada en el año 2016, junto a la Matriz de Referencia. En ellos se detallan orientaciones, por ciclos, referidas a las competencias que se deben trabajar y desarrollar en los estudiantes en relación con los cinco pensamientos matemáticos y a su vez los cinco procesos generales a cada uno de ellos (MEN, 1998), los cuales se relacionan a continuación y se ampliarán en el capítulo 2:

Figura 7. Tipos de pensamiento matemático

Fuente: elaboración propia. Lineamientos Curriculares Matemáticas (MEN, 1998)

Figura 8. Procesos matemáticos



Fuente: elaboración propia. Lineamientos Curriculares Matemáticas (MEN, 1998)

Además, en correspondencia con lo anterior, se hace necesario explicitar los tres contextos planteados en el aprendizaje de las matemáticas (MEN, 1998): contexto inmediato o de aula, contexto escolar o institucional y contexto extraescolar o sociocultural. Es preciso aclarar que el hablar de un contexto no necesariamente hace referencia a un lugar físico, sino más bien en un sentido sociocultural y amplio, tal como lo explicita el MEN, en el cual se construye sentido y significado de lo que se enseña/aprende.

En concordancia con estos documentos orientadores, es necesario detallar que se refieren dos tipos de conocimiento matemático básicos: el conceptual y el procedimental. Es importante hacerlo, puesto que, al momento de evidenciar un aprendizaje, o dificultad en aprender, se puede partir de ellos para identificar la posible posibles factores asociados a ellas. Por un lado, el conocimiento conceptual que parte de la teoría, y por el otro, el conocimiento procedimental que es más cercano a la acción (MEN, 2006).

También, en dichos textos es posible encontrar orientaciones para maestros y estudiantes frente a cada uno de los pensamientos y procesos matemáticos señalados, desde su definición hasta sugerencias para abordarlos en el aula, pero es importante señalar que a pesar de ello aún se identifican estudiantes que evidencian dificultades en el aprendizaje de conceptos matemáticos.

Con lo anterior, los desafíos relacionados con el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes se convierten en un reto y llamado a comprender e intervenir los casos que lo requieren, frente a lo que se trasciende en el aula y la escuela en sí.

En el ejercicio de reconocer la presencia de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, se hace evidente la necesidad de identificarlas y categorizarlas teniendo en cuenta sus características y factores asociados desde diferentes miradas, situación que generalmente conduce, desde la práctica, al pensar en "cómo enseñar" (maestro) más que en "cómo aprender" (estudiantes), especialmente aquellos que son sujetos a una o varias dificultades. El presente capítulo busca explorar algunas investigaciones relacionadas con la identificación de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

Las matemáticas, como ciencia, se han convertido en un campo de investigación propio de quienes se dedican a su enseñanza, siendo posible remontar su origen a las universidades

(Kilpatrick, Gómez y Rico, 1998), ya que como disciplina es considerada una de las más duras y difíciles para aprender (Parra, 1994), en cuanto es una situación que conlleva constantemente a la búsqueda de métodos y estrategias de enseñanza acordes con las características, necesidades y dificultades de los estudiantes, y con la realidad que siguen encontrándose casos de estudiantes que, de una u otra forma, muestran dificultades en su aprendizaje; sin embargo, "no hay nadie, absolutamente nadie, que pueda declararse específicamente negado para las matemáticas. Existen, sí, diferencias de ritmos en el aprendizaje de ellas, lo mismo que en cualquier otro aprendizaje…" (p. 24). Es entonces el llamado para continuar investigando sobre dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, centrando el interés, en este caso, en factores asociados a las mismas, teniendo en cuenta la constante queja tanto de estudiantes como maestros, e incluso de padres de familia alrededor de aspectos relacionados con el área, y en la experiencia propia como maestro al evidenciar en algunos estudiantes la posible presencia de dificultades en su aprendizaje, sin tener certeza sobre cuál es la razón de ellas.

De acuerdo con Kilpatrick, Gómez y Rico (1998), el interés de los investigadores en el área de las matemáticas se ha centrado, por un lado, en los profesores y sus métodos de enseñanza, y por el otro en los estudiantes y cómo ellos aprenden y comprenden, ambos elementos mencionados al inicio. Siendo los dos, profesores y estudiantes, agentes claves en el acto formativo, debe prestarse mayor atención a estos últimos, dado que al tener mayor claridad en cómo ellos aprenden, es posible fortalecer los procesos de enseñanza.

En este sentido, el mismo autor hace hincapié en el rol del profesor, ya que en su labor de guiar necesita partir, entre otras cosas, de los errores y concepciones deficientes para consolidar conocimiento, el cual debe ser validado matemáticamente. Situación similar puede suceder en el caso de estudiantes con posibles dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, en atención a reconocerlas desde sus posibles factores asociados a ellas.

Para Godino, et al. (2003), el actuar de los profesores de matemáticas está condicionado por las creencias que poseen sobre la naturaleza de las mismas, prudente sería preguntarse entonces si se tiene claridad frente a lo que se enseña. Estos autores concuerdan con los primeros, al enunciar que es natural que los alumnos tengan dificultades y se equivoquen durante su proceso de aprendizaje, además que es posible aprender de los errores, es decir, aprovechar la situación, que es común en las aulas, no para avergonzar o reprimir, sino por el contrario para fortalecer capacidades y habilidades, no sólo en quien se equivoca sino en el grupo al que pertenece.

Sugieren, igualmente, que los ejemplos y situaciones que se propongan en la clase, posibiliten ver el amplio campo de fenómenos que las matemáticas permiten organizar y resolver, buscando que quienes aprenden y están en contacto con ellas valoren su papel, dada su fuerte presencia en la cotidianidad.

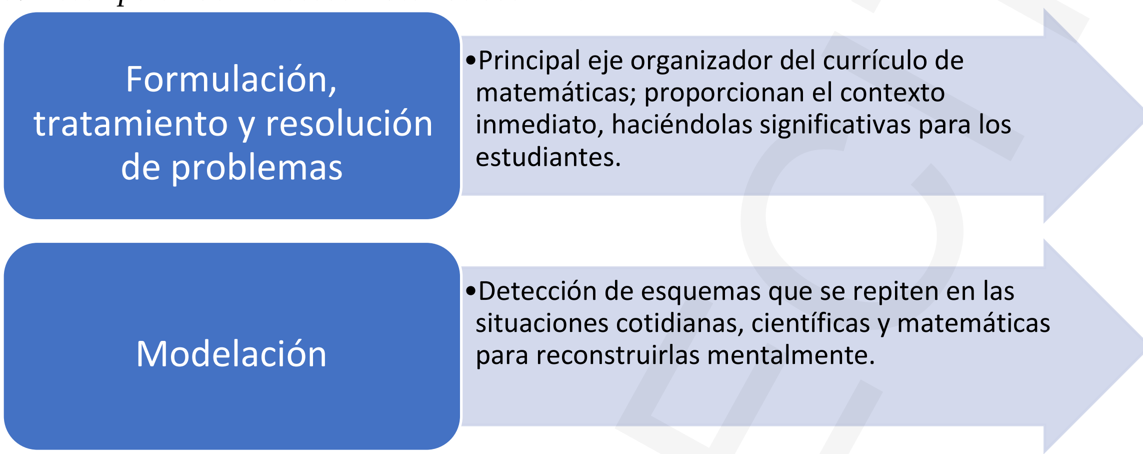
Al respecto, Godino, et al. (2003) plantean que no es necesario preparar a los estudiantes en procesos complejos, y a veces tediosos, de cálculos y otras habilidades, puesto que la tecnología ha logrado proporcionarnos las herramientas necesarias para este tipo de procesos; por el contrario, asumen que la tarea es proporcionar una cultura que permita y favorezca:

a) Capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información matemática y los argumentos apoyados en datos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, o en su trabajo profesional.

b) Capacidad para discutir o comunicar información matemática, cuando sea relevante, y competencia para resolver los problemas matemáticos que encuentre en la vida diaria o en el trabajo profesional. (p. 20)

Lo anterior es posible relacionarlo desde los referentes de calidad de Matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional para el caso de Colombia, en cuanto exponen y formulan cinco procesos que se relacionan entre sí, y al mismo tiempo con los cinco pensamientos matemáticos estructurados para su enseñanza:

Figura 9. Descripción de Procesos matemáticos EBC



Fuente: elaboración propia. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006)

Se plantea que estos procesos deben articularse durante la enseñanza, en la medida que se relacionan directamente con la idea de ser matemáticamente competente, tal como lo indican los documentos de referencia mencionados antes, Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006). En atención a que no hay un orden establecido para estos procesos, se hace claridad en que tienen peculiaridades específicas que los diferencian de procesos en otras áreas curriculares, que para el caso dependen de la naturaleza propia de las matemáticas, y es precisamente desde la actividad matemática que se explicitan haciendo mención a la enseñanza – aprendizaje de las mismas. Sin embargo, se reconoce que el proceso de formular y resolver problemas involucra a los otros cuatro con distintos niveles de intensidad y en diferentes momentos.

En el caso propio, y en lo que corresponde a investigaciones relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas y dificultades asociadas a dicho proceso, Kilpatrick, Gómez y Rico (1998) aseveran que la atención se centra cada vez menos en las respuestas, correctas o incorrectas, proporcionadas por los estudiantes, y cada vez más en los procesos y estrategias utilizadas para obtener dichas respuestas, encontrando exactamente en esta situación un punto clave para analizar y tratar de identificar en qué radica la dificultad para el aprendizaje de las matemáticas o de qué manera se puede afirmar que existe una dificultad, en cuanto lo más importante no termina siendo las respuestas de un estudiante con alguna evidencia o muestra de una dificultad, sino el proceso que se esconde tras ella. Textualmente afirman:

> Las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas, junto con sus creencias y concepciones acerca del tema, continúan atrayendo la atención de los investigadores. Sin embargo, buena parte de la investigación resultante ha carecido de una base teórica fuerte y ha sido relativamente impotente. (p. 10)

La afirmación anterior, brinda fuerza a la necesidad de identificar lo que hay tras dificultades asociadas al aprendizaje de las matemáticas, para este caso sobre el número entero, puesto que, aunque se ha investigado antes acerca del tema, no es posible encontrar una base teórica que describa la manera de cómo identificar las dificultades, caracterizarlas y poder reconocer cómo se afecta el aprendizaje, que además favorezca su atención desde las aulas, al ofrecerle a los maestros conocimientos y herramientas que a la vez puedan permear sus prácticas pedagógicas en atención a ellas.

2.2.2. Antecedentes investigativos

Son diversos los estudios e investigaciones que se han realizado con relación a dificultades asociadas al aprendizaje de las matemáticas, siendo posible citar, entre algunos otros, a Sepúlveda, et al. (2016), Duval (2016), Hudson (2017), Inostroza (2018), Palencia (2019) y Romero y Lavigne (2004); de tal manera que se hace necesario pensar en su identificación y clasificación, situaciones que conducen a considerar el sentido e implicaciones que tienen desde la posibilidad de identificar y comprender la presencia e influencia de factores asociados a ellas, en la búsqueda de establecer una categorización de las mismas.

Por ejemplo, Sepúlveda, et al. (2016) en su estudio denominado ¿A qué atribuyen los estudiantes de educación básica la dificultad de aprender matemáticas?, trabajaron con 768 estudiantes y así constataron tres ámbitos específicos para explicar la dificultad de aprender matemática: de un lado, las provocadas por la propia naturaleza de las matemáticas; por otro lado, las generadas por el profesor y finalmente aquellas originadas por dificultades propias del estudiante. Textualmente, afirman que “la dificultad de aprender matemática no es el resultado de un único factor sino, más bien, es una combinación y acumulación de varias razones siendo las principales, según los alumnos, aquellas originadas por el propio estudiante" (p. 105).

De esa manera, es un estudio que se fundamenta principalmente en las opiniones y apreciaciones de los estudiantes realizando una aproximación, pero no dejan ver una caracterización de las dificultades, tampoco vislumbran una manera que permita su identificación, o establecer similitudes o diferencias entre ellas a partir de posibles regularidades.

De otra parte, Inostroza (2018) realizó un estudio con cuatro docentes de educación especial con el propósito de describir las creencias pedagógicas sobre dificultades específicas del aprendizaje en matemáticas. Coincide con la investigación anterior, en cuanto que en sus hallazgos sostiene que dichas dificultades corresponden a una condición intrínseca del estudiante, y que su origen está asociado tanto a problemas de salud como a metodologías inadecuadas de enseñanza de las matemáticas, reconociendo así que las causas pueden ser múltiples y diversas, más no se profundiza en ese sentido de tal manera que permita esclarecer si se pueden clasificar dichas dificultades por aspectos comunes entre ellas.

Es así como se sustenta, una vez más, la necesidad del desarrollo de este estudio, en tanto se pretende establecer categorías en dificultades de aprendizaje del número entero, con la identificación de factores asociados a ellas, en el reconocimiento de su multiplicidad.

Fonseca, López y Massagué (2019) refieren el cálculo como una de las habilidades más importantes en el trabajo con las matemáticas, reconociéndola además entre las de mayor incidencia en los problemas de aprendizaje de los estudiantes. Con lo anterior, abordan la discalculia en su concepción como dificultad de aprendizaje de las matemáticas. Así, concluyen su estudio resaltando la importancia de analizar dicha dificultad y sus síntomas, en cuanto permite a los maestros estar preparados para su atención desde la prevención, corrección y/o compensación.

Los anteriores elementos conducen a reafirmar la necesidad de categorizar dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, concretamente las relacionadas con el número entero, a partir de factores asociados a las mismas.

Desde la investigación realizada a nivel de maestría, titulada "Estudio sobre referentes conceptuales en prácticas evaluativas que posicionan a estudiantes con dificultades de aprendizaje en matemática", Palencia (2019) realiza una aproximación relacionada con los diferentes elementos que se despliegan en la cultura escolar y que de cierta manera fortalecen creencias, expectativas y consideraciones por parte de los docentes sobre estudiantes que presentan dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Invita a los maestros a no naturalizar el referirse a dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, pues no pueden interpretarse de la misma forma, igualmente a reflexionar sobre las prácticas evaluativas. El autor utiliza el término "naturaleza", en el contexto de las Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas (DAM), para referirse a lo siguiente:

> Las DAM como tema de investigación se debe abordar en la actualidad no desde la unicidad que plantean las teorías del déficit provenientes de los campos de las ciencias psicológicas sino desde la complejidad de los contextos escolares abordados, esto implica

que su naturaleza tal como son tratadas en las teorías clásicas del déficit que reside en la exclusividad de la mente individual sin la afectación del medio cultural queda entendidas como incompletas, porque la existencia de un espacio escolar, un contexto cultural construye un modo interpretativo de estas. […] (p. 144)

Con la anterior conclusión de su trabajo, Palencia (2019) esboza la necesidad de clarificar qué antecede a dichas dificultades y no asumirlas de manera general desde otras teorías, por ejemplo, las clásicas del déficit como él mismo lo señala. Sin embargo, no se hace ningún tipo de claridad sobre tal elemento ni se proporcionan indicios que permitan su identificación o reconocimiento, o de qué manera se podrían agrupar dichas dificultades.

Nuevamente utiliza el término "naturaleza" para indicar que "las dificultades de aprendizaje en matemáticas adquieren dentro del espacio escolar una naturaleza más compleja en tanto el profesor interpreta a partir de unos referentes conceptuales como descripciones que identifican el mal funcionamiento cognitivo […]" (Palencia, 2019, p. 147), de tal manera que hace referencia al tema una vez más, pero no se profundiza en él. Estos planteamientos conllevan a pensar sobre la necesidad profundizar en el análisis en relación a factores asociados a posibles dificultades y por tal motivo, el presente estudio retoma estas investigaciones para fundamentar su propósito y alcance.

Duval (2016), por su parte, inicia su artículo con varios interrogantes, uno de los cuales y por razones explícitas llama la atención: "¿Cuál es la naturaleza de estas dificultades?" (p. 61).

Plantea, entre otras cosas, que tenemos un desafío educativo y a la vez teórico para investigar sobre el desarrollo y el aprendizaje de las matemáticas. Sostiene que “la raíz de los problemas que muchos estudiantes tienen con el pensamiento matemático reside en la especificidad matemática y la complejidad cognitiva de la conversión y del cambio de representación” (p. 90), con lo cual abre posibles respuestas a la pregunta citada al inicio de este párrafo, pero en sí no presenta algo concreto o que permita llegar a una categorización de las dificultades a partir del reconocimiento de factores asociados a ellas.

En esta línea, se da fuerza al propósito de la presente investigación en el sentido de profundizar en el estudio de las dificultades asociadas al aprendizaje del número entero desde el reconocimiento de factores asociados para la posterior categorización de las mismas.

En contraposición a la propuesta de Sepúlveda, et al. (2016), Duval (2016) señala que pareciera obvio que la investigación acerca del aprendizaje de las matemáticas y sus dificultades se deba basar en lo que los estudiantes hagan por sí mismos, en lo que produzcan o digan, indicando con ello que no es tan obvio como parece, pero al mismo tiempo abre el interrogante sobre “¿cómo podemos analizar los procesos de adquisición de conocimiento a partir de las concepciones de los estudiantes y encontrar las fuentes de sus dificultades?” (p. 62), lo que nos conduce a pensar en situaciones o procesos generadores de dichas dificultades, enfatizando en este caso en el aprendizaje.

Es necesario entonces realizar un abordaje profundo y exhaustivo sobre las dificultades en el aprendizaje del número entero, pues si bien, como se ha podido constatar hasta ahora, es común hablar acerca de ellas, pero es notoria la necesidad de reconocerlas a partir de lo que antecede a las mismas. Se han realizado algunos acercamientos al tratar de comprenderlas desde diferentes puntos (estudiantes, maestros, teorías, etc.), pero se debe reconocer que existen elementos o características propias de las matemáticas, que tal vez no sean compartidas con otras áreas, o al menos no en su totalidad, al hablar de la abstracción, por ejemplo. Con lo anterior, Duval (2016), invita a formularse la siguiente pregunta:

> ¿La manera de pensar en matemáticas es la misma que en otras áreas de conocimiento? En otras palabras, ¿la actividad matemática requiere solamente los procesos cognitivos comunes o, de hecho, requiere ciertas estructuras cognitivas muy específicas cuyo desarrollo se debe tener en cuenta en la enseñanza? (p. 62)

De cierta manera, está indicando y reconociendo que las matemáticas en sí poseen su propia naturaleza, lo que permite pensar que las dificultades asociadas o relacionadas con su aprendizaje también poseen cierta correspondencia, aspecto del cual se ha mencionado en párrafos anteriores y que precisamente se convierte en el objeto de estudio de esta investigación. Sin embargo, al considerar que pueden ser múltiples los factores que se esconden tras una posible dificultad en el aprendizaje del número entero, el presente estudio busca identificarlos y establecer categorías a partir de ellos, siendo posible que a una misma dificultad se le puedan asociar uno o varios de ellos.

Resalta el papel de las representaciones semióticas como primordial dentro de la actividad matemática, y hace referencia a las dificultades que se pueden presentar al momento de hacer la transición desde lo concreto hasta lo abstracto, o simplemente al cambiar la forma de representación de un objeto. Alude además que las estrategias matemáticas implican la transformación de representaciones semióticas, y plantea al respecto dos problemas cruciales, uno de los cuales enuncia de la siguiente manera: "Existen muchas situaciones en las que se da solamente una representación sin ningún otro acceso al objeto estudiado […] ¿las representaciones pueden funcionar como sustitutos del objeto para quienes no hayan adquirido ya una experiencia más o menos directa?" (Duval, 2016, págs. 65-66), situación que sugiere, en lo posible, permitir el contacto directo con el objeto estudiado.

Por otro lado, sostiene que, en educación matemática, las investigaciones casi siempre se centran en la enseñanza de contenidos y procedimientos, pero lo concerniente a la actividad matemática en sí se relega a un segundo plano, más aún si no se centra la atención en las diversas formas de aprender y las dificultades que ello puede conllevar.

En el proceso de rastreo también se identifican investigaciones que abordan el número entero, dentro del campo de la educación matemática, enfocados hacia procesos y estrategias para su enseñanza, como es el caso de Silva (2022), quien con su trabajo de maestría plantea el uso de la modelación como innovación para el abordaje de dicho concepto con estudiantes de octavo grado, concluyendo que hay presencia de dificultades por parte de ellos para su tratamiento pero no se profundiza ni se establecen relaciones entre ellas, es decir, con el desconocimiento de factores asociados a ellas se propone favorecer el aprendizaje del número entero.

En este sentido, con la presente investigación no se busca generar estrategias para su enseñanza, sin embargo, sí se espera dejar abierto el camino, en cuanto se considera necesario el conocimiento de lo que antecede a posibles dificultades en relación al aprendizaje del número entero para la comprensión de las mismas, y en ese orden de ideas favorecer la pertinencia y correspondencia de las estrategias que se puedan emplear.

Se asocia en este sentido el trabajo realizado por Vílchez (2014), en la Universidad de Granada, en el que asume como problema el hecho de que los números negativos presenten dificultades durante los procesos de enseñanza a estudiantes, para hacer referencia al número entero, reconociendo su presencia a partir de las limitaciones que genera la magnitud negativa.

En su monografía sobre dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del número entero, Aponte y Rivera (2017) reconocen la multiplicidad de dificultades que se han generado, a lo largo de la historia en los procesos de enseñanza y aprendizaje que refieren este concepto, incluso para que lograra ser aceptado y legitimado por los matemáticos. Logran recoger aportes de otros autores para establecer diferencias entre estos tres conceptos: dificultades, obstáculos y errores; considerando, por ejemplo que la transición entre las operaciones básicas con el conjunto de los números enteros lleva a la presencia de dificultades, según lo manifiestan profesores del área, pero no se profundiza en su estudio ni mucho menos se establecen relaciones con otros posibles factores, del mismo modo que no se logra llegar hasta la fuente primaria, que para este caso corresponde a los estudiantes mismos. Aunque afirman partiendo de la teoría. Como ya se indicó antes, no se ahonda en el estudio de dichas dificultades, razón que da peso al presente estudio.

2.2.3. Otras investigaciones referentes al número entero: obstáculos, errores, dificultades en su aprendizaje. Estado del arte

Partiendo de lo expuesto en el apartado enterior, se realiza un rastreo documental para hacer referencia a lo que otros autores han encontrado y propuesto respecto a dificultades en el aprendizaje del número entero, sentido en el que se hace posible reconocer la presencia de obstáculos y errores también durante los procesos de enseñanza y aprendizaje de dicho concepto.

Durante los últimos años, se identifican autores y trabajos de investigación que hacen referencia a dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, y algunos de ellos específicamente en relación al número entero, reconociendo que pueden ser diversos sus orígenes y que es un tema vigente en la actualidad, además de poder identificar los inconvenientes que a lo largo de la historia se han generado para su aceptación. Por ejemplo, González, y otros (1990), reconocen en su obra el difícil camino que han tenido que recorrer los números enteros a través del tiempo, por ejemplo al nombrar el capítulo 2 como "los números negativos y su larga y azarosa historia" (pág. 21), relacionando su aparición con las manipulaciones algebraicas.

En la investigación desarrollada, Iriarte Bustos, Jimeno Pérez, y Vargas-Machuca de Alva (1991), relacionan algunas ideas que generan errores, los cuales obstaculizan el aprendizaje de los números enteros, agrupadas desde real como obstáculo y la imposición de lo formal como obstáculo. El primer grupo alude al "apego a la evidencia inmediata, a la intuición primaria del número como cantidad" (pág. 13), mientras que el segundo hace referencia a que "la construcción del conocimiento formal es un logro que requiere la ruptura de concepciones previas" (pág. 13).

Esbozan que la enseñanza del número entero no se ubica plenamente en el plano de lo concreto, característica común a la enseñanza de la matemática elemental, reconociendo que tampoco es correcto situarla en el plano del formalismo, ya que lleva al olvido y genera errores y confusiones. De esta manera, se entiende la necesidad de no limitar la enseñanza del número entero al campo formal o al abstracto, en base a lo expresado por los autores, más bien partir de la complementariedad de ambos.

Partiendo de lo real como obstáculo, se tiene que una de las principales razones por las que se dificultan los procesos de enseñanza y aprendizaje del número entero, según los autores, es la relación que se establece inicialmente del número como cantidad, partiendo de lo concreto. Este hecho llevó a que se requiriera de mucho tiempo, más de 10 siglos, para que se lograra la ruptura de tal concepción y se llegara al planteamiento del número entero en el plano de lo formal. En este mismo sentido, plantean que el conocimiento del número entero requiere la separación con algunas ideas que están muy ligadas al conocimiento sobre la aritmética práctica, a saber:

- El número como expresión de cantidad: “la identificación de número con cantidad también va a obstaculizar la generalización de las operaciones aritméticas y de orden” (pág. 14)
- La suma como aumento: “concepción ingenua de suma como acción de añadir una cantidad a otra” (pág. 14)
- La multiplicación como multiplicación natural: no concepción de un múltiplo menor que el número dado; confusión de múltiplo y divisor. “La concepción de multiplicación natural como número de veces una determinada cantidad se mantiene vigente” (pág. 14)
- La sustracción como disminución: “La sustracción también permanece ligada al plano de la acción y la identifican con quitar y, por tanto, con disminución” (pág. 14)

- La división como división natural: “La división con números naturales se hace por defecto y admite ser interpretada como reparto o agrupamiento de datos” (pág. 14)
- El orden entre los negativos es el mismo que el orden natural: “En la serie natural los números van aumentando a medida que van estando más alejados del origen” (pág. 14), al trasladar esta secuencia a los números negativos se generan algunas dificultades.
- Ignorar el signo: “Este error consiste en ignorar sistemáticamente el signo que precede a las temperaturas negativas, identificando así los números negativos con los naturales” (pág. 15), también se tienen casos en los que se hiperutiliza el signo menos.
- Identificación de los símbolos literales con números positivos.

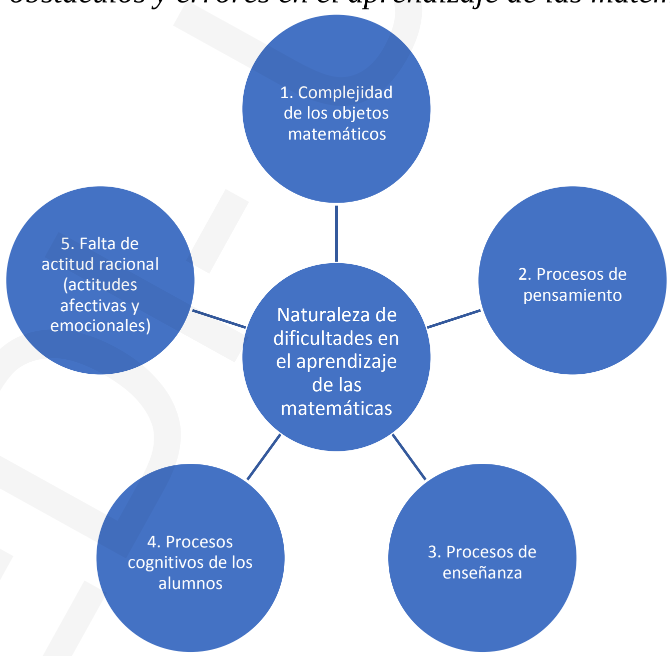
En segundo lugar, se hace referencia a la imposición de lo formal como obstáculo, reconociendo que cada avance en el conocimiento del número entero supone la ruptura con concepciones previas relacionadas con el número, aunque según los autores, y basados en libros de texto, su enseñanza queda reducida a un formalismo vacío, que se constituye en obstáculo para originar errores; entre los que se señalan:

- El manejo del orden lineal
- Las reglas del cálculo como formalismo vacío: “Si estas reglas se encuentran vacías de contenido y significación son fáciles de olvidar y confundir. La regla de los signos es la que parece más asumida” (pág. 16)
- Los enteros estudiados y olvidados

Finalmente, presentan las siguientes conclusiones, en relación a obstáculos en el aprendizaje de los números enteros: 1. Separación entre pensamiento académico y natural; 2. Necesidad de tratamiento matemático de las situaciones de comparación en el curriculum; 3. Paralelismo entre los obstáculos históricos y los obstáculos en el aprendizaje; 4. Ausencia de representación de los procesos de pensamiento; 5. Ausencia de un modelo unificador para el tema de los números enteros y, 6. Necesidad de provocar el conflicto que entraña el número entero.

De acuerdo con Socas Robayna (1997), tales dificultades en el aprendizaje de las matemáticas pueden abordarse a partir del desarrollo cognitivo de los alumnos, el currículo de matemáticas y los métodos de enseñanza; de acuerdo con el mismo autor, dichas dificultades se concretizan en la práctica como obstáculos y se manifiestan como errores, siendo posible organizarlas de la siguiente manera:

Figura 10. Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria



Fuente: elaboración propia. Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria Socas Robayna (1997)

Respecto a la complejidad de los objetos matemáticos, se le reconoce como los conflictos asociados a la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos, el lenguaje de las matemáticas es más preciso y sometido a reglas exactas, de la misma forma que se reconoce la naturaleza abstracta de los conceptos matemáticos. Socas Robayna (1997) sostiene que "el lenguaje de las matemáticas opera en dos niveles, el nivel semántico –los signos son dados con un significado claro y preciso-, y el nivel sintáctico -los signos pueden ser operados mediante reglas sin referencia directa a ningún significado-" (pág. 130), elementos que apuntan a los estados operacional y conceptual de los conceptos matemáticas y que configuran su naturaleza abstracta, como ya se había mencionado, y la complejidad de los mismos.

Desde otro punto, se alude al aspecto deductivo formal como una de las principales dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, conducente al abandono de demostraciones formales sumado a la incapacidad para seguir un argumento lógico. En este orden de ideas, se pone de manifiesto la relación lógica escolar vs lógica social, ya que de acuerdo con Socas Robayna (1997) "el pensamiento lógico debe estar presente en todas las actividades matemáticas" (pág. 132), pero pareciera que durante los procesos de enseñanza y aprendizaje se abordan de manera indistinta.

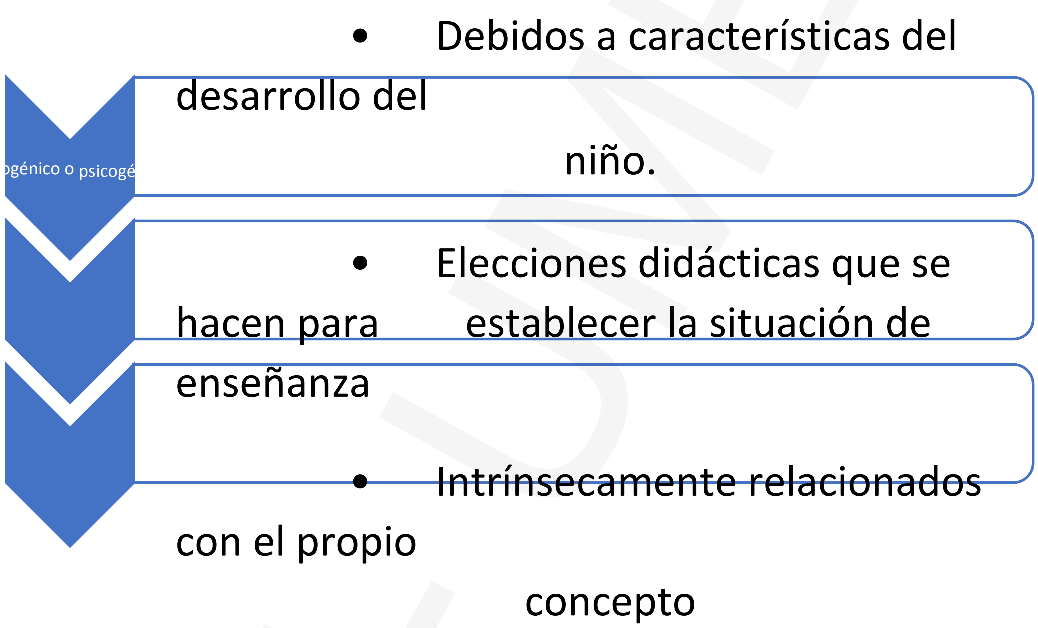
También, respecto a estas dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, se presentan los procesos de enseñanza, asociados a la institución escolar, el currículo y los métodos de enseñanza propiamente, reconociendo por ejemplo que la organización del currículo puede ser generador de dificultades en el aprendizaje de las mismas, como lo manifiesta Socas Robayna (1997). Así, debería prestarse especial atención a los métodos de enseñanza que se utilizan, ya que por medio de ellos se da la conjugación entre la organización institucional y la organización del currículo, proceso en el que desempeña un papel primordial el lenguaje utilizado por el docente.

Se reconoce, simultáneamente, a los procesos cognitivos en asociación a dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, situación en la que es importante, según el autor, el conocimiento de los estadios generales del desarrollo intelectual, los cuales representan un modo particular de razonamiento y tareas propias que los alumnos estarían en capacidad de realizar, en correspondencia con los procesos de enseñanza pues desde allí se desprende la planeación teniendo en cuenta dichos factores, sin embargo, como lo manifiesta Socas Robayna (1997), muy pocas teorías se han ocupado específicamente por las matemáticas.

Por último, pero no menos importante, se reconoce la influencia de las actitudes y emociones que previamente poseen los estudiantes frente a las matemáticas, pues comúnmente se encuentra que a varios de ellos no les gustan (Socas Robayna, 1997), "muchos alumnos tienen sentimientos de tensión y miedo hacia ellas" (pág. 136), en quienes es común identificar actitudes negativas y emocionales asociadas a la ansiedad y el miedo, conducentes a la generación de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

Posteriormente, después de hacer referencia a dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, Socas Robayna (1997) presenta los obstáculos en el aprendizaje de las mismas, como segundo elemento que tiene que ver con la organización de los errores. El término obstáculo se introduce por Bachelard en 1938, en el campo de las ciencias experimentales conocido como obstáculo epistemológico que, según él, surge a partir de "-la tendencia a confiar en engañosas experiencias intuitivas, -la tendencia a generalizar; esto puede ocultar la particularidad de la situación, -el lenguaje natural.” (pág. 138). De manera particular, se traslada este concepto al campo didáctico de las matemáticas con los aportes de Brousseau (1983, citado en Socas Robayna, 1997), quien sostiene que dichos obstáculos pueden ser de origen:

Figura 11. Obstáculos que se presentan en el sistema didáctico. Brousseau (1983)



Fuente: elaboración propia. Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. Socas Robayna (1997)

Consecuentemente, y con los aportes de Brousseau y Bachelard, se precisa la siguiente definición de obstáculo: “aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado” (pág. 139-140) y además se ubica en un proceo difícil de adaptasión cuando el estudiante se enfrenta a nuevos problemas, hecho que puede trasladarse a la transición que se hace entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números enteros.

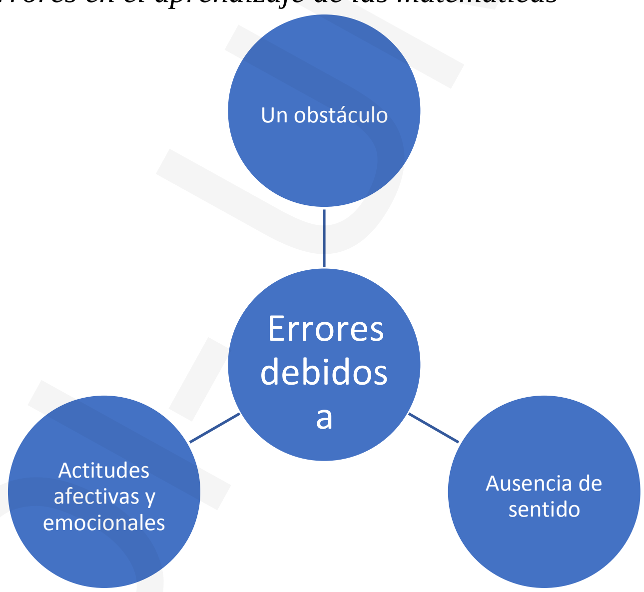
Se hace mención, de otro lado y en referencia a obstáculos didácticos y cognitivos, que en algunos casos aparecen dificultades que pueden considerarse como obstáculos cognitivos más que didácticos, y que los procesos de enseñanza ayudan a reducirlos, pero no a eliminarlos. En relación a los obstáculos epistemológicos, se deriva su existencia a la "aparición y resistencia de ciertos conceptos matemáticos a lo largo de la historia, así como la observación de conceptos análogos en los alumnos, más que a la confirmación de la resistencia de esas concepciones en los alumnos de hoy" (Socas Robayna, 1997, pág. 142).

En tercer lugar, posterior a dificultades y obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas, se abordan los errores por parte de Socas Robayna (1997), asumidos inicialmente como concepciones limitadas, en el caso de autores como Lakatos, encontrando vigencia también en los errores cometidos por estudiantes, ya que muchos de ellos pueden explicarse en base a los métodos que utilizan, los cuales sólo son válidos en algunos casos.

Este autor sostiene que "un conocimiento de los errores básicos es importante para el profesor porque le provee de información sobre la forma en que los alumnos interpretan los problemas y utilizan los diferentes procedimientos" (Socas Robayna, 1997, pág. 148) considerando así la necesidad de diagnosticar y tratar con mayor seriedad los errores de los alumnos. Según él, los errores en el aprendizaje de las matemáticas se pueden caracterizar en dos grupos de acuerdo a sus causas: "errores que tienen su origen en un obstáculo y errores que tienen su origen en una ausencia

de significado” (pág. 149), en el segundo caso, sostiene que podría deberse a dos razones distintas: una relacionada con dificultades referentes a la complejidad de los objetos matemáticos y los procesos de pensamiento matemático, y en segundo lugar, con dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales por parte de los estudiantes hacia las matemáticas. Se hace énfasis en “la complejidad de las dificultades de aprendizaje de las matemáticas, y que estas dificultades se traducen en errores que cometen los alumnos y que éstos se producen por causas muy diversas que muchas veces se refuerzan en redes complejas” ” (pág.
149), permitiéndose su síntesis de la manera que sigue:

Figura 12. Orígenes de errores en el aprendizaje de las matemáticas



Fuente: elaboración propia. Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. Socas Robayna (1997)

Al respecto, se sostiene que “la superación de los errores por parte de los alumnos constituye un tema básico en el aprendizaje que genera dificultades. Las investigaciones actuales señalan que los errores están profundamente interiorizados por los alumnos y que no son de fácil eliminación”

(Socas Robayna, 1997, pág. 159). El autor concluye afirmando que son múltiples las situaciones que generan dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, pero que además se enlazan entre sí, por lo anteriormente expuesto, se hace necesario un estudio que busque cuáles son ese tipo de relaciones.

De manera similar, Aponte Bello y Rivera Martínez (2017) presentan una monografía en la que plantean que "las dificultades, obstáculos y errores que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, suelen ser en muchos casos desconocidas por los docentes…" (pág. 4) Y para atender a dicha situación, parten del diseño de un OVA (objeto virtual de aprendizaje) como un instrumento para promover el aprendizaje, con el que pretendían mostrar a docentes en formación y en ejercicio errores, obstáculos y dificultades en el aprendizaje del número entero.

En un recorrido histórico frente a la aceptación de los números enteros, especialmente en referencia al número negativo, señalan que la resistencia que se genera hacia ellos se debe a que no surgieron a partir de experiencias de conteo y medición, sino a través de la resolución de ecuaciones, de tal forma que carecieron de un referente material o concreto. Señalan, además, que las primeras dificultades se manifiestan con la operación resta, más aún con los múltiples significados que se le asignan al símbolo $-$, "en tanto puede ser considerado como operación, como signo de un número o bien como indicador del opuesto de un número" (Aponte Bello y Rivera Martínez, 2017, pág. 16).

Entre las conclusiones de su trabajo, reconocen que las dificultades, obstáculos y errores también pueden hacer parte de los docentes. Así mismo, refuerzan la definición de error como el resultado de concepciones inadecuadas respecto a las matemáticas, mientras que los obstáculos se manifiestan debido a un error.

En otro punto, por medio de la investigación desarrollada por Maca Díaz y Patiño Giraldo (2016), se considera la necesidad de centrar la atención en el maestro respecto a la apropiación y comprensión que posee sobre lo que enseña dado que, generalmente, al hablar sobre dificultades académicas dentro del aula de clase, se hace referencia al estudiante, por lo tanto, se hace necesario "que los docentes tengan claro qué es lo que están enseñando, cómo lo están enseñando y para qué lo están enseñando" (Pozo, 2002, citado en Maca Díaz, 2016, pág. 196), ya que la falta de conceptualización sobre los números enteros, como lo reconocen las autoras, se refleja también en la universidad, agudizando así aún más el problema.

De esta forma, al reconocer que las matemáticas han contribuido al desarrollo y los grandes avances en el mundo, a lo largo de la historia, también es pertinente reconocer la multiplicidad de dificultades que se generan para aprenderlas, entre las que Rodríguez (2010, citado en Maca Díaz y Patiño Giraldo, 2016) menciona:

> La descontextualización y la abstracción de los contenidos programáticos, la desatención del momento psicoevolutivo en que se sitúan los educandos, la desconsideración de que el punto de partida de todo conocimiento debe ser la praxis cotidiana; también es causante del problema, en cuestión, la metodología deductiva, memorística y repetitiva, que renuncia y castra la creatividad y la originalidad en la mayoría de los casos; e ignora el rechazo que el discente tiene sobre la ciencia" (pág. 197)

Se hace mención igualmente que, a través de los resultados en las pruebas de estado y los altos índices de repitencia en las universidades, se evidencia la poca preparación en relación al número entero. Es así como se da importancia al lenguaje utilizado por el maestro de matemáticas, pues da muestra de la apropiación que posee, dado que influye en la relación maestro – estudiante, como lo señala el autor, promoviendo una mayor comprensión en relación al número entero o, por el contrario, generando mayores dificultades; pero a parte de poseer el conocimiento, hay que saber comunicarlo tal como se ha manifestado antes, porque de lo contrario la comunicación puede convertirse en un obstáculo.

Entre las conclusiones de su trabajo, establecen que el desconocimiento que poseen los docentes, en ese caso universitarios, sobre el concepto científico de número entero, hace que incrementen las dificultades que presentan los estudiantes en el dominio de ellos; de otro lado, reconocen que un alto nivel de formación en los docentes no asegura necesariamente apropiación respecto al número entero. Por lo tanto, recomiendan "replantear la apropiación que tienen los docentes del concepto de número entero y la forma como se está enseñando al interior de las aulas" (pág. 209)

Por su parte, Ruíz Ramírez (2021) aborda la enseñanza de los números enteros a través de los números relativos con su trabajo de maestría de la Universidad Externado de Colombia, que corresponde al diseño e implementación de una propuesta pedagógica de intervención en el aula, con estudiantes de sexto grado, para abordar la enseñanza de los números enteros por medio de una secuencia didáctica. Surge, según la autora, como una necesidad de mejorar y fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje, reconociendo que a su alrededor se generan dificultades que se deben atender.

Entre los hallazgos que logra consolidar, resalta el uso de situaciones concretas para dar lugar a nuevas interpretaciones del número natural, en las que el estudiante logra reconocer "que no siempre el signo menos está asociado a una sustracción o el más a una adición, sino que estos símbolos (+ y -) están también asociados al signo que precede un número, reconociendo así los números relativos" (pág. 10). De otro lado, reconoce que persiste una dificultad en relación a los procesos de enseñanza y aprendizaje del número entero y es la que hace referencia al signo que acompaña la cantidad, ya que en algunas ocasiones es ignorado generando así errores en los estudiantes al realizar operaciones que involucran números negativos.

Paralelamente, Tabares Cano (2021) hace referencia con su trabajo de maestría a la enseñanza de los números enteros a partir de la teoría Acción, Proceso, Objeto y Esquema (APOE), al reconocer la preocupación actual de los docentes frente a la apropiación del concepto de número entero por parte de los estudiantes, en tanto se evidencian dificultades en su comprensión.

Concluye que los deficientes resultados en el aprendizaje de los números enteros se asocian, en buena medida, a prácticas de enseñanza igualmente deficientes, por tanto, hace un llamado a los docentes para revisar sus procesos bajo una modalidad más práctica, de manera tal que los estudiantes puedan realizar sus construcciones mentales.

Además de lo anterior, recomienda tener en cuenta los errores, dificultades y obstáculos que se generan alrededor del concepto de número entero, especialmente en los procesos de enseñanza del mismo.

De acuerdo con Bell (1986), “lo que importa en la introducción de los números enteros es el armazón que ayude a desarrollar los procedimientos correctos” (pág. 199). Una de las principales necesidades, de acuerdo con este autor, “es que los números negativos y sus operaciones tengan los mismos fuertes lazos con la realidad que las que los números positivos y sus operaciones tienen” (pág. 199).

En relación a los procesos de enseñanza del número entero, hace referencia a la necesidad de “extraer los conflictos que provengan de las diferentes respuestas dadas por diferentes alumnos” (pág. 205), en la medida que también se les pueda enfrentar a situaciones en las que logren explorar con cantidades tanto positivas como negativas, y que les permita sensibilizarse respecto a la importancia y significado del signo negativo.

En su artículo, la reflexión sobre la práctica del profesor de matemática: el caso de la enseñanza de las operaciones con números enteros, Ñancupil Poblete, Carneiro y Flores Martínez (2013), plantean que “promover la acción reflexiva en los docentes tiene un carácter de vital importancia en la educación actual ya que nos permite evaluar nuestro comportamiento y orientar nuestras prácticas de manera más eficiente” (pág. 38), de tal manera que debe constituirse en un proceso de aprendizaje continuo y por ende dinámico.

Refieren una dificultad en la práctica, concerniente a la enseñanza de la suma y la resta de números enteros con estudiantes entre los 12 y 13 años de edad, la cual asumen partiendo de la reflexión como herramienta de formación para el maestro, ya que posibilita el pensar sistemáticamente sobre su propia práctica.

Cid Castro (2016), en su tesis doctoral titulada obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos, refiere que la aparición de los números negativos aumenta el nivel de dificultad de la tarea de enseñar, siendo los profesores de matemáticas en la educación secundaria los encargados de constatar las equivocaciones de los alumnos cuando aparecen signos menos. De acuerdo con ella, "la mayor parte de las aportaciones sobre el tema se centran en la búsqueda de un buen modelo concreto introductorio de los números negativos" (pág. 1), sugiriendo modelos que pueden favorecer la solución de dichas dificultades, pero que finalmente carecen de respaldo.

Al respecto, menciona Cid Castro (2016) que también se han realizado estudios estadísticos o clínicos que ponen en evidencia los errores que cometen los estudiantes cuando realizan actividad matemática en la que intervienen números negativos, en menor escala a los anteriormente mencionados. Según la autora, con tales trabajos "se constatan errores y dificultades de todo orden, correspondientes tanto a la estructura aditiva como a la estructura multiplicativa u ordinal de dichos números" (pág. 2). Como principal objetivo, se propone, partiendo de los obstáculos epistemológicos alrededor de los números negativos, transformar el problema de los maestros que se traduce en la enseñanza de dichos números en un problema didáctico, en todo caso, reconociendo la necesidad de tenerlos en cuenta para el diseño de las propuestas didácticas.

Sostiene que, al analizar las respuestas que dan los alumnos a cuestionarios planteados, se evidencia que gran parte de las dificultades se relacionan con la incapacidad para

tener en cuenta la polisemia de los signos: tienden a interpretar los signos − y + como signos que indican una operación binaria (dimensión binaria) antes que como signos que indican que el término es negativo o es el opuesto (dimensión unaria o simétrica),

- gestionar una expresión en la que aparecen dos signos − sucesivos,
- distinguir entre las reglas aditivas y multiplicativas de los signos, (Cid Castro, 2016, pág. 44)

Finalmente, y con el desarrollo de su trabajo, concluye que a pesar del esfuerzo que realizan los profesores, “los alumnos tienen grandes dificultades para dar sentido a las operaciones entre números enteros, cometen frecuentes errores en los cálculos en los que intervienen números negativos y olvidan su existencia en los razonamientos matemáticos” (pág. 329), situación vigente durante mucho tiempo y aún en la actualidad.

Rojas Gómez y Ariza Daza (2013), plantean en su artículo la importancia que tiene la enseñanza de los números enteros, reconociendo la complejidad que como proceso le acompaña. Corresponde al diseño de una estrategia didáctica con estudiantes del grado séptimo de educación básica secundaria, del colegio José Félix Restrepo, sede A, para lo cual partieron de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau. Para tal fin, reconocen igualmente las dificultades que pueden generar los números enteros.

Pérez Serrano, Alcalde Esteban y Lorenzo Valentín (2014), manifiestan que “hay preconceptos de situaciones en la vida real que hacen que los números enteros tengan muchas dificultades a la hora de integrarlos en la cotidianidad” (pág. 24), entre ellos está el que generalmente se considera la suma como una operación que aumenta, situación que no siempre aplica dentro de este conjunto numérico. También identifican al orden como una dificultad con los enteros, ya que se encuentran diferencias en relación al orden en los naturales.

Tras el anterior reastreo bibliográfico y documental, concerniente al desarrollo del número entero, en el que se reconoce la presencia de obstáculos, errores y dificultades que ha generado dicho concepto matemático a lo largo de la historia en el ámbito educativo, es posible identificar algunas generalidades al respecto: el número se asocia inicialmente como cantidad, pero con la aparición del número entero esta asociación genera inconvenientes, el mismo proceso de aceptación y validación del número entero por matemáticos se constituye en un obstáculo que se ve reflejado en las aulas de clase, por las dificultades que genera la comprensión del mismo por parte de estudiantes, incluso por maestros también. Se hace referencia a las estructuras aditiva y multiplicativa, que suelen abordarse como reglas vacías de contenido y significación, y por esa razón es común que los estudiantes utilicen reglas de signos en condiciones semejantes, haciendo especial énfasis en el signo menos, que en ocasiones suele ser ignorado, a pesar de los diferentes significados que se le pueden asignar de acuerdo a la situación en que se le ubique: indicar el signo negativo de un número, el opuesto o la operación resta, hecho que puede conducir, como se expresa al inicio de este párrafo, a la presencia de dificultades en el aprendizaje del número entero.

Lo anterior, permite hacer referencia a la complejidad de los objetos matemáticos, en especial del número entero, por su relevancia en el desarrollo de esta investigación. A pesar de los estudios que se han realizado sobre dicho objeto, siguen presentándose dificultades en los estudiantes, centro de este trabajo, en las que se pone de manifiesto también la relación entre ellos y los maestros, hecho abordado con anterioridad en este mismo apartado. Se requiere del maestro la suficiente claridad y apropiación respecto a este concepto, puesto que de esa forma se favorece la comprensión por parte de los estudiantes e influye en los procesos de comunicación que se desarrollan; igualmente, se reconoce la influencia que pueden ejercer las actitudes y emociones de los estudiantes durante la enseñanza pero más aún en los procesos de aprendizaje y concretamente en las clases de matemáticas, ya que pueden ser generadoras de resistencia por parte de ellos.

2.3. Bases conceptuales

Fernández Carreira (2013) afirma que actualmente no existe una definición universal referente a dificultades del aprendizaje, algunas de ellas ya fueron tratadas tal vez en el capítulo anterior. Ella enfatiza en la importancia de abordar las dificultades de aprendizaje desde sus causas, con la intensión de prevenirlas, de ser posible en los primeros años de escolaridad, al poder identificarlas para su posterior tratamiento.

Desde los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), se insta a iniciar la enseñanza de ellas a partir de la identificación del conocimiento matemático informal que poseen los estudiantes en relación con su entorno, y admitir además que el aprendizaje de ellas no se relaciona únicamente con aspectos cognitivos, puesto que involucra también factores del orden social y afectivo en contextos y situaciones de aprendizaje particulares, encontrando así una relación con las teorías de Ausubel (1983) y Claxton (2001). Lo anterior, de manera implícita, conduce a pensar que cuando se presenta una dificultad de aprendizaje, pueden ser diversas sus causas, no necesariamente cognitivas, a partir de lo cual puede conducirse el camino hacia la identificación de factores que se le asocian, en los casos que suceda y se requiera. Al respecto, Claxton (2001) hace referencia a una función conjunta entre recursos internos y externos para el aprendizaje, en la medida que para ser buen aprendiz se requiere saber reconocer las ventajas y posibilidades que puede traer cualquier situación, pero además debe hacerse un buen uso de ellas. Debe poseerse la habilidad para idear los medios o poseer el ingenio práctico, pero también se requiere de recursos internos bien desarrollados, razones por las que la facultad de aprender no reside únicamente en la mente, dada la convergencia y complementariedad de ambos recursos, internos y externos, situación que puede aplicar también al momento de identificar una dificultad de aprendizaje, en cuanto se hace necesaria la identificación y reconocimiento de factores asociados a ella.

Hudson (2017) señala las siguientes dificultades de aprendizaje: Dislexia, Discalculia, Disgrafía, Dispraxia, Trastorno por Déficit de Atención e Hiperactividad (TDAH), Trastorno del Espectro Autista (TEA) y Síndrome de Asperger, Trastorno Obsesivo Compulsivo (TOC), habilidades organizativas en relación a otras dificultades de aprendizaje. En el apartado 2.4. se hará énfasis en la discalculia, como dificultad de aprendizaje específica de las matemáticas.

2.3.1. Conocimientos matemáticos

Se hace referencia a dos elementos básicos del conocimiento matemático: por un lado, la práctica, en relación con las condiciones sociales y la relación con el entorno, y por el otro lado, la formal, correspondiente a los sistemas matemáticos en si, expresados en el lenguaje propio de las matemáticas (MEN, 2006). El primero de estos corresponde entonces a los conocimientos o aprendizajes informales que obtienen las personas en la interacción con su entorno, y que se esperaría se puedan formalizar o consolidar a través de la educación en las aulas, estableciendo una relación entre ambos, pues como se mencionó antes, lo ideal es partir de ellos para generar nuevos conocimientos.

En el capítulo 1 se hizo referencia igualmente a dos tipos de conocimiento matemático básicos: el conceptual y el procedimental (MEN, 2006). El primero de ellos se caracteriza por ser un conocimiento teórico, según se describe, el cual es producto de la actividad cognitiva y se asocia con el saber qué y el saber por qué; mientras el segundo está relacionado con las técnicas y estrategias que conducen a la representación de conceptos y transformación de los mismos, ayuda a la construcción y refinamiento del conocimiento conceptual, se asocia con el saber cómo, cuándo y por qué hacerlo.

De esta manera, es posible reconocer una estrecha relación entre los elementos básicos y los dos tipos de conocimiento matemático descritos anteriormente, y se convierten también en una posible herramienta para identificar factores asociados a posibles dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, específicamente en relación al número entero, en cuanto es necesario revisar si tales dificultades recaen en la teoría (conocimiento conceptual) o en la manera como se aplican (conocimiento procedimental).

Es entonces, por medio de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), que se distribuyen los contenidos por grados desde la básica primaria hasta la media, en atención a los cinco pensamientos que se describen en el siguiente apartado. Para el caso concreto del grado octavo, población foco de esta investigación, se retoman contenidos matemáticos específicos correspondientes al ciclo anterior, precisando que ellos están propuestos para abordarse en los grados 6º y 7º, es decir, se distribuyen en ambos grados de acuerdo al plan de estudios que formule y estructure cada institución educativa, teniendo en cuenta que el estudiante debería apropiarse de ellos al finalizar séptimo grado.

2.3.2. Lineamientos Curriculares en Matemáticas

El Ministerio de Educación Nacional y la Dirección General de Investigación y Desarrollo Pedagógico en 1998, junto a sus equipos de trabajo y asesores, orientaron, acompañaron y apoyaron los procesos de elaboración, discusión y publicación de los Lineamientos Curriculares en Matemáticas. Este documento se presenta para posibilitar, promover y orientar los procesos curriculares que se vivencian en las instituciones de educación básica y media.

Como una de sus propuestas, plantea que el docente distinga cuidadosamente entre el "sistema simbólico (qué se escribe, se pinta o se habla), el sistema conceptual (qué se piensa, se construye, se elabora mentalmente) y los sistemas concretos (de dónde los niños pueden sacar los conceptos esperados)" (MEN, 1998, p. 6), con lo que se promueve la organización del área en pensamientos y procesos matemáticos, entendiendo la propuesta como el inicio y consolidación de una revolución curricular que

> propuso acercarse a las distintas regiones de las matemáticas, los números, la geometría, las medidas, los datos estadísticos, la misma lógica y los conjuntos desde una perspectiva sistémica que los comprendiera como totalidades estructuradas, con sus elementos, sus operaciones y sus relaciones. (p.6)

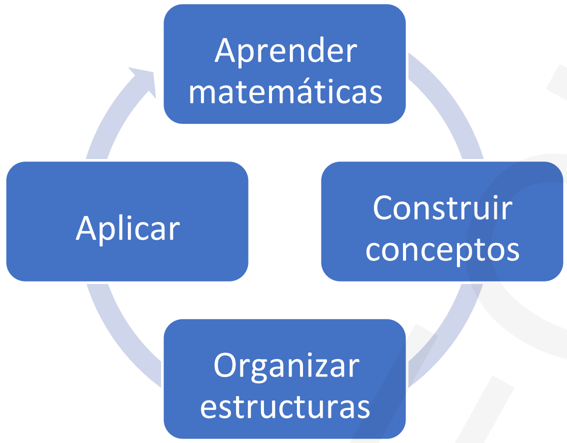
Lo anterior es en un acercamiento hacia la estructuración de los cinco pensamientos matemáticos, vigentes en la actualidad, pero que al mismo tiempo se les entiende como un conjunto que en su interior conserva la esencia de las matemáticas y, en esa medida debería verse reflejado en los aprendizajes de los estudiantes, no de manera desligada como sucede en algunos casos, desde el diseño curricular y estructura del plan de estudios para el área. Es así como, desde las sugerencias pedagógicas, se plantea la de "explorar los sistemas concretos que ya utilizan los niños, para partir de ellos hacia la construcción de los sistemas conceptuales respectivos" (p. 6)

Los lineamientos curriculares hacen referencia a un tema relevante dentro de la presente investigación y es el relacionado con la naturaleza de las matemáticas, del que ya se había hecho mención antes. También se ha hablado acerca de algunos estudios sobre dificultades relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas y que la ubica precisamente como uno de los ámbitos para explicarlas, esto de acuerdo con Sepúlveda, et al. (2016), además de Godino, et al. (2003) quienes señalan la naturaleza en cuanto afirman que el actuar de los profesores de matemáticas está condicionado por las creencias que poseen sobre ella. En ese orden de ideas, se expone que

> La historia da cuenta de siglos y siglos de diversas posiciones y discusiones sobre el origen y la naturaleza de las matemáticas; es decir, sobre si las matemáticas existen fuera de la mente humana o si son una creación suya; si son exactas e infalibles o si son falibles, corregibles, evolutivas y provistas de significado como las demás ciencias.
>
> (MEN, 1998, p. 10)

Partiendo de esa postura, en la consolidación de los lineamientos curriculares se realiza un recorrido histórico por varias corrientes, entre ellas el Platonismo, el Logicismo, el Formalismo, el Intuicionismo y el Constructivismo, permitiéndose establecer una relación entre las dos últimas, por cuanto ambas consideran que las matemáticas son una creación de la mente humana. El constructivismo matemático, resalta el papel que desempeña el estudiante durante su aprendizaje, interesándose “por las condiciones en las cuales la mente realiza la construcción de los conceptos matemáticos, por la forma como los organiza en estructuras y por la aplicación que les da” (MEN, 1998, p. 11), a partir de lo cual se identifican y reconocen tres procesos fundamentales que realiza la mente:

Figura 13. Procesos desarrollados por la mente



Fuente: Elaboración propia. Lineamientos curriculares Matemáticas, MEN (1998)

Ante lo anterior, sería posible hacer cuestionamientos frente a situaciones como: si es clara la construcción de conceptos matemáticos que los estudiantes realizan, la forma como internamente generan las estructuras, tanto mentales como matemáticas, y por ende la manera cómo los aplican en diversas situaciones, y de acuerdo a esto es necesario pensar en estrategias que permitan evidenciarlo, ya que, de no ser correcto, darían paso a la posible presencia de dificultades asociadas a su aprendizaje.

En este sentido, se reconoce que "no basta con que el maestro haya hecho las construcciones mentales; cada estudiante necesita a su vez realizarlas; en eso nada ni nadie lo puede reemplazar.” (MEN, 1998, p. 11). La situación radica pues en encontrar la vía correcta para identificar si las construcciones que realiza el estudiante son adecuadas o no, con la posibilidad de señalar en cuál o cuáles de las tres fases mencionadas se presentan fallas, haciendo un análisis no sobre el producto (respuesta), sino sobre el proceso que se lleva a cabo para llegar a ella.

Continuando en procesos de revisión, reflexión e investigación, dentro del mismo marco de los lineamientos curriculares, se ha permitido llegar a una nueva visión de las matemáticas que, de acuerdo con ellos, se basa en

- Aceptar que el conocimiento matemático es resultado de una evolución histórica, de un proceso cultural, cuyo estado actual no es, en muchos casos, la culminación definitiva del conocimiento y cuyos aspectos formales constituyen sólo una faceta de este conocimiento.
- Valorar la importancia que tienen los procesos constructivos y de interacción social en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas.
- Considerar que el conocimiento matemático (sus conceptos y estructuras), constituyen una herramienta potente para el desarrollo de habilidades de pensamiento.
- Reconocer que existe un núcleo de conocimientos matemáticos básicos que debe dominar todo ciudadano.
- Comprender y asumir los fenómenos de transposición didáctica.
- Reconocer el impacto de las nuevas tecnologías tanto en los énfasis curriculares como en sus aplicaciones.
- Privilegiar como contexto del hacer matemático escolar las situaciones problemáticas. (MEN, 1998, p. 14-15)

Es así como se reconoce, entre otros elementos, el papel que desempeñan las situaciones problemáticas como el contexto apropiado para desarrollar actividad matemática, reconociéndolas como microambientes de aprendizaje que pueden originarse en diferentes campos como la vida cotidiana o las mismas matemáticas. Incluso a partir de otras ciencias y las cuales serán utilizadas en la ejecución de la presente investigación. Aquí se tiene presente que el aprender matemáticas va más allá de números y fórmulas, transciende en el llevar a la práctica el aprendizaje a la vida real, al desarrollo de los procesos de pensamiento que permitan encontrarles sentido y utilidad a las matemáticas.

Es común el proponer situaciones problemáticas para verificar si el estudiante ha logrado aprender o no, pero debe tenerse presente que también pueden emplearse de tal manera que conduzcan a que ocurra el aprendizaje, en las fases previas a la aplicación (exploración y desarrollo) de acuerdo con los Lineamientos Curriculares en Matemáticas.

Otro elemento relevante, y que debe mencionarse dadas las circunstancias de esta investigación, tiene que ver con el papel del estudiante en el aprendizaje de las matemáticas, puesto que también es tenido en cuenta en la referencia del presente apartado. En esos términos, y en concordancia con lo planteado anteriormente, se sostiene que

> Saber matemáticas no es solamente aprender definiciones y teoremas, para reconocer la ocasión de utilizarlas y aplicarlas; sabemos bien que hacer matemáticas implica que uno se ocupe de problemas, pero a veces se olvida que resolver un problema no es más que parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrarles soluciones. Una buena reproducción por parte del alumno de una actividad científica exigiría que él actúe, formule, pruebe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que los intercambie con otros, que reconozca las que están conformes con la

cultura, que tome las que le son útiles, etcétera. (MEN, 1998, p. 13)

Por consiguiente, no estamos ante una tarea sencilla, sin embargo, existe la posibilidad de que se tengan en cuenta, entre otros que se puedan considerar, los elementos señalados hasta el momento, en el campo de la actividad matemática, especialmente desde el papel del profesor, con el propósito de que ellos puedan conducir al reconocimiento de factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero. De acuerdo con lo planteado en los Lineamientos Curriculares, es deber de los maestros "imaginar y proponer a los alumnos situaciones que puedan vivir y en las que los conocimientos van a aparecer como la solución óptima y descubrible en los problemas planteados." (MEN, 1998, p. 13).

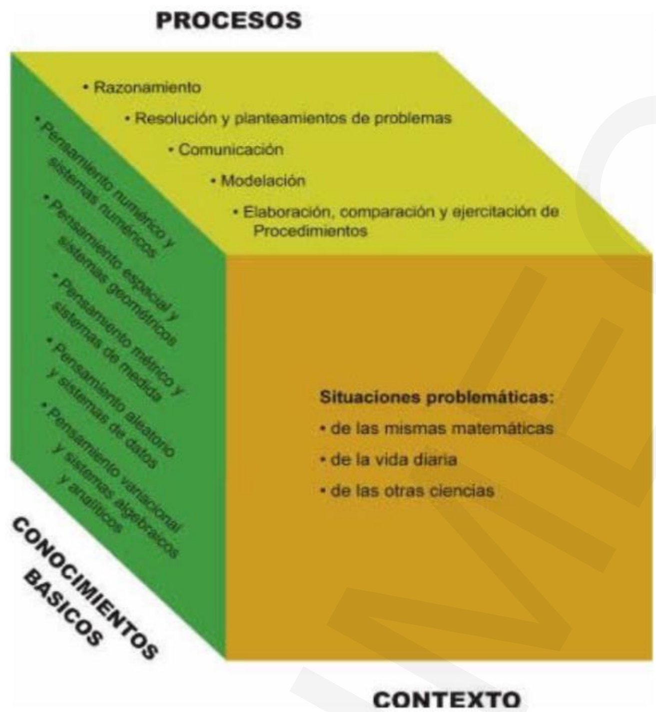
En el caso concreto del aprendizaje de las matemáticas, y en consonancia con lo enunciado hasta este punto, se aclara que "el aprendizaje de las matemáticas debe posibilitar al alumno la aplicación de sus conocimientos fuera del ámbito escolar, donde debe tomar decisiones, enfrentarse y adaptarse a situaciones nuevas, exponer sus opiniones y ser receptivo a las de los demás" (MEN, 1998, p. 18), reconociendo una vez más la importancia y utilidad de las situaciones problema. Para ello, se necesita de la relación de los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los estudiantes, lo más cercano posible a contextos reales que involucren a su vez situaciones problemas.

Así, se presentan tres aspectos fundamentales, que articulados entre sí, proporcionan la estructura curricular para el área. En primer lugar, se hace referencia a procesos generales, los cuales se relacionan directamente con el aprendizaje y son: el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos, de los cuales ya se hizo mención antes, todos ellos explícitos y relacionados en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006). En segundo lugar, aparecen los conocimientos básicos, en este caso se relacionan con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas, y en tercer lugar se tiene el contexto, que hace alusión a los diferentes ambientes que rodean al estudiante y que les dan sentido a las matemáticas durante su aprendizaje.

Entre algunos de esos ambientes destacan las condiciones sociales y culturales, el tipo de interacciones, los intereses que se pueden generar, las creencias, así como las condiciones económicas, entre otros, los cuales pueden convertirse, directa o indirectamente, en factores asociados de posibles dificultades asociadas al aprendizaje de las matemáticas, centro de interés de la presente investigación.

Los tres elementos expuestos se presentan de manera gráfica como se muestra a continuación:

Figur a 14. Estructura curricular en Matemáticas



Fuente: Tomado de Lineamientos Curriculares en Matemáticas, MEN (1998, p. 20)

Como ya se indicó, uno de los elementos mencionados corresponde a los conocimientos básicos, distribuidos y categorizados en cinco grandes pensamientos matemáticos con sus respectivos sistemas, los cuales se observan en el gráfico anterior y que se precisarán a continuación:

El pensamiento numérico y sistemas numéricos: se trata de un concepto más general que el de sentido numérico, que abarca el sentido operacional, las habilidades y destrezas numéricas, las comparaciones, las estimaciones, los órdenes de magnitud, etcétera. (MEN, 1998). Este pensamiento "se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos." (p. 26)

Para su desarrollo se recomienda el trabajo en las aulas a partir de la comprensión de los números y la numeración; la comprensión del concepto de las operaciones y los cálculos con números y aplicaciones de ellos y las operaciones. No se habla sólo del conjunto de los números naturales, sino de todos en conjunto y que se encuentran distribuidos en los Estándares Básicos de Competencias.

El pensamiento espacial y los sistemas geométricos: se considera como el "conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales." (p. 37)

Para su desarrollo, se plantea el modelo de Van Hiele, como propuesta para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, el cual describe el progreso en los niveles de razonamiento a partir de cinco niveles o fases de aprendizaje, a saber: visualización; análisis; ordenamiento o clasificación; razonamiento deductivo y, por último, el rigor.

El pensamiento métrico y los sistemas de medidas: "La interacción dinámica que genera el proceso de medir entre el entorno y los estudiantes, hace que éstos encuentren situaciones de utilidad y aplicaciones prácticas donde una vez más cobran sentido las matemáticas." (p. 41) Para abordarlo, se recomienda desarrollar con los estudiantes procesos y conceptos como: construcción de los conceptos de magnitud, conservación de la misma, estimación de magnitudes, selección de unidades de medida, patrones e instrumentos, asignación numérica y el papel del trasfondo social de la medición.

El pensamiento aleatorio y los sistemas de datos: “Fenómenos que en un comienzo parecen caóticos, regidos por el azar, son ordenados por la estadística mediante leyes aleatorias de una manera semejante a como actúan las leyes determinísticas sobre otros fenómenos de las ciencias” (p. 47). Su abordaje ha favorecido el tratamiento dado a la incertidumbre en diferentes ciencias y campos de la vida, además de contribuir al desarrollo interior de las matemáticas.

Para su abordaje, es recomendable partir de la recolección y análisis de datos, partiendo de las mismas preguntas que puedan realizarse los estudiantes, de tal manera que sea posible decidir la pertinencia de la información, la manera de recogerla , representarla e interpretarla. Además de lo anterior, se reconoce la posibilidad de encontrar y establecer relaciones con otras áreas del conocimiento, poniendo en práctica los conocimientos relacionados con los demás pensamientos matemáticos.

Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos: involucra en su campo conceptual “conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas.” (p. 49) Su estudio puede establecerse partiendo de situaciones problemáticas que aborden situaciones de cambio y variación en la vida práctica, organizando en tablas dicha variación, por citar un ejemplo, tareas en las que se puede involucrar procesos aritméticos como inicio a la comprensión del mismo.

2.3.3. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

En el mismo sentido de la revolución curricular, posterior a la consolidación de los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998), se da paso a la construcción de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006). En ellos, se hace referencia a que no es posible alcanzar las competencias matemáticas por generación espontánea, dado que exigen ambientes de aprendizaje que sean enriquecidos por situaciones problema, que a su vez sean significativas y comprensibles, y que posibiliten al estudiante avanzar a niveles de competencia cada vez más complejos.

Con relación al conocimiento matemático, sostiene que existen dos facetas básicas: de un lado, la práctica, que expresa las condiciones sociales de relación de la persona con su entorno, y del otro, la formal, "constituida por los sistemas matemáticos y sus justificaciones, la cual se expresa a través del lenguaje propio de las matemáticas en sus diversos registros de representación." (p. 50), a partir de lo cual se ha dado una clasificación en dos tipos: el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental, descritos en el apartado 2.3.

En ellos se retoman los procesos y pensamientos de los cuales se hace mención en el apartado anterior, y los distribuye jerárquicamente, en atención a los grados por conjuntos de ellos. Uno de estos conjuntos de grados corresponde a sexto y séptimo de la básica secundaria, de acuerdo al sistema educativo de Colombia, y los contenidos propuestos son los siguientes:

Figura 15. EBC en Matemáticas, ciclo 6º-7º

Al terminar séptimo grado...

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS

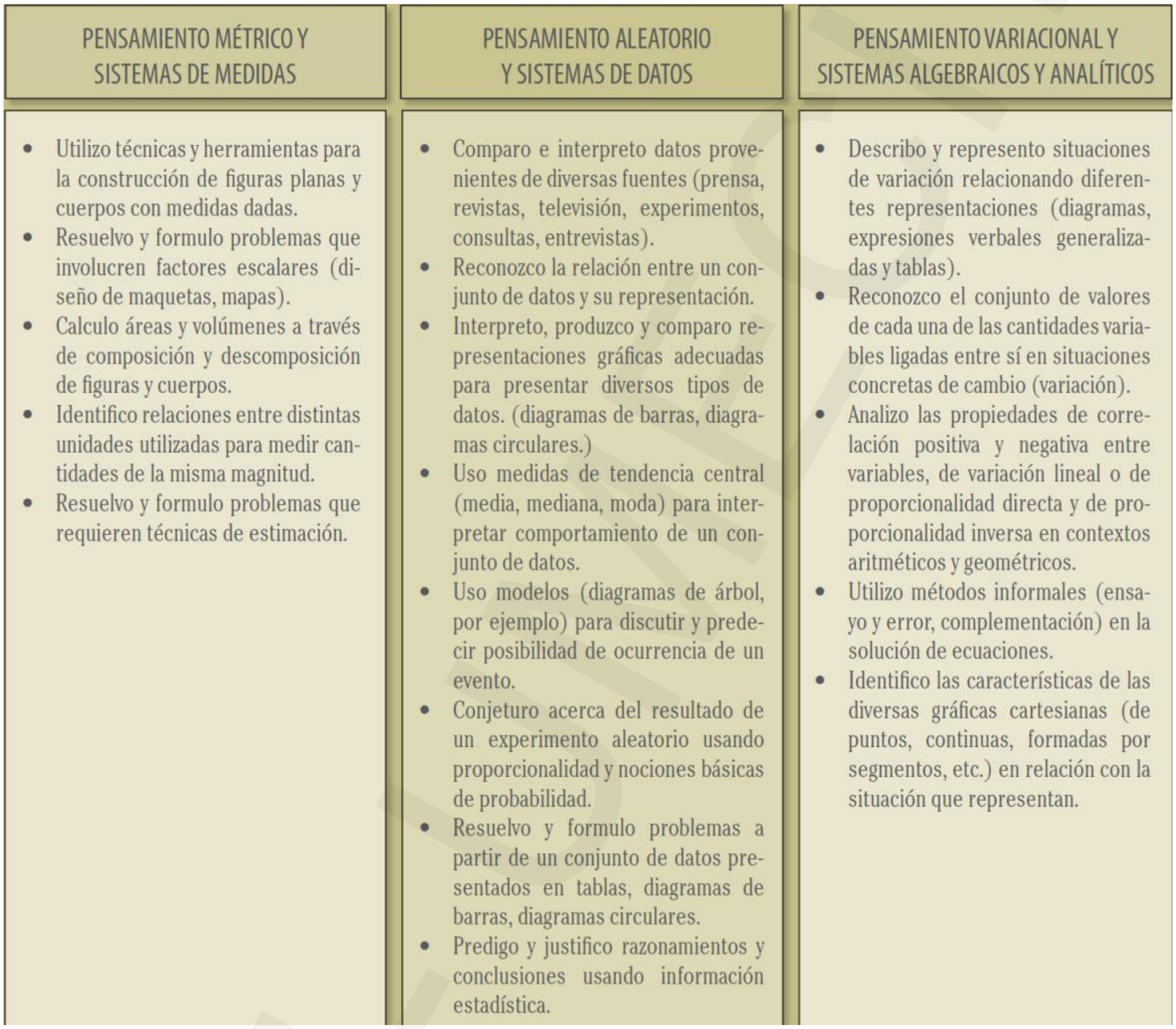
- Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las medidas.
- Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.
- Justifico la extensión de la representación polinomial decimal usual de los números naturales a la representación decimal usual de los números racionales, utilizando las propiedades del sistema de numeración decimal.
- Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales (simétrica, transitiva, etc.) y de las operaciones entre ellos (conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contextos.
- Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las de la igualdad, las de las distintas formas de la desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.
- Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones.
- Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos.
- Resuelvo y formulo problemas cuya solución requiere de la potenciación o radicación.
- Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.
- Justifico la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de las respuestas obtenidas.
- Establezco conjeturas sobre propiedades y relaciones de los números, utilizando calculadoras o computadores.
- Justifico la elección de métodos e instrumentos de cálculo en la resolución de problemas.
- Reconozco argumentos combinatorios como herramienta para interpretación de situaciones diversas de conteo.

PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS

- Represento objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.
- Identifico y describo figuras y cuerpos generados por cortes rectos y transversales de objetos tridimensionales.
- Clasifico polígonos en relación con sus propiedades.
- Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.
- Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.
- Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos.
- Identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.

Fuente: tomado de Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. (MEN, 2006, p. 84-85)

Figura 16. EBC en Matemáticas, ciclo 6º-7º



PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS	PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMAS DE DATOS	PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS
• Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas. • Resuelvo y formulo problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas). • Calculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos. • Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud. • Resuelvo y formulo problemas que requieren técnicas de estimación.	• Comparo e interpreto datos provenientes de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas). • Reconozco la relación entre un conjunto de datos y su representación. • Interpreto, produzco y comparo representaciones gráficas adecuadas para presentar diversos tipos de datos. (diagramas de barras, diagramas circulares.) • Uso medidas de tendencia central (media, mediana, moda) para interpretar comportamiento de un conjunto de datos. • Uso modelos (diagramas de árbol, por ejemplo) para discutir y predecir posibilidad de ocurrencia de un evento. • Conjeturo acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad. • Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas, diagramas de barras, diagramas circulares. • Predigo y justifico razonamientos y conclusiones usando información estadística.	• Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas). • Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación). • Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos. • Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones. • Identifico las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.

Fuente: tomado de Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. (MEN, 2006, p. 84-85)

Es necesario aclarar en este punto que, aunque estén organizados y presentados en cinco columnas, correspondientes a los cinco pensamientos matemáticos, varios de los estándares hacen referencia a otros tipos de pensamiento y sistemas, aún siendo señalados en uno sólo, lo que implica, desde la práctica, la unión entre ellos de tal manera que no se aborden de manera independiente y, en esa medida, los cinco procesos están implícitos en los diferentes estándares.

2.3.4. Concepto matemático de número entero

En el ámbito escolar, suele dársele cabida a los números enteros posterior al tratamiento de los números naturales, sin embargo es necesario tener presente que "los números enteros son de naturaleza distinta a los números naturales, aunque algebraicamente y por comodidad se identifiquen, de tal manera que la ampliación de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ es puramente algebraica" (González, y otros, 1990, pág. 81). El estudio de los números, de acuerdo con Pérez Serrano, Alcalde Esteban y Lorenzo Valentín (2014), inicia con los naturales y los enteros, proceso que conduce al estudio de las estructuras algebraicas; en general, los números enteros han contribuido al desarrollo de las matemáticas como ciencia, teniendo en cuenta que son una de las construcciones matemáticas más antiguas y fundamentales y, hasta en la actualidad, son esenciales en el desarrollo de campos como la ciencia, la economía y la tecnología, entre otros.

A lo largo de la historia, diferentes civilizaciones han representado la noción de cantidad según su desarrollo se los ha permitido, así mismo, los recursos que se utilizaban dependían de la cultura en la que el hombre se ubicara, hasta el punto que llegaron a reconocer que el uso de los enteros positivos no satisface el complejo mundo de las matemáticas (Torres Ninahuanca, 2000).

El mismo autor afirma que "la facultad de contar está implícita en la aparición del número" (pág. 2), para justificar de cierta manera su aparición como símbolo, que se ha ido perfeccionando con el pasar del tiempo y la necesidad de evolución de las matemáticas, para dar solución a diversos problemas. Es así como el número natural hace parte de nuestra cotidianidad, seamos o no conscientes de ello, los utilizamos para contar, ordenar, numerar, operar, reconociendo en ellos sus características de ordinalidad y cardinalidad. Actualmente, tras el proceso de evolución que se ha dado, los números naturales se representan simbólicamente así: $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6, 7,8, \dots\}$

Al ser ordenados, es posible ubicarlos en la recta numérica de tal manera que a cada uno de ellos le corresponde un único punto dentro de la misma, además, teniendo presente que este conjunto numérico cumple con la propiedad clausurativa para la suma y la multiplicación, pero no con la resta y la división, se genera la necesidad de ampliarlo y complementarlo, de tal manera que surgen los números negativos asumidos inicialmente como deudos o absurdos (Torres Ninahuanca, 2000). Se requirió de mucho tiempo para que lograran ser aceptados en las diferentes culturas, partiendo de los chinos, los indios y los griegos, reconociendo que hasta finales del siglo XVIII aún no eran aceptados de manera universal. Tras el proceso de aceptación, se empiezan a reconocer propiedades al conjunto de los números enteros, complementado por la unión de los números naturales y los negativos, más el cero, entre ellas, la del valor absoluto.

Es así como desde la antigüedad, el hombre se ha visto enfrentado a la necesidad de resolver problemas y en esa misma medida ha intentado encontrarles solución, y el origen del conjunto de los números enteros no es ajeno a dicha realidad. Su historia se remonta a la India, cuyos primeros indicios se encuentran en el libro de un matemático hindú, Brahmagupta, en el que se hace una distinción entre bienes, deudas y nada, términos con los que se hace referencia a los números positivos, los negativos y el cero, respectivamente (Ramírez R, y otros, 2013). Posteriormente, se identifican otros aportes en la construcción y consolidación del concepto, los cuales datan entre los años 628 y 1850 d. C, como se muestra en la siguiente imagen:

Figura 17. Cronología de números enteros

Fuente: tomado de Los Caminos del Saber Matemáticas 7º, pág. 9

De acuerdo con Schubring (1998, citado en Gallardo y Basurdo, 2010),

> los números negativos no constituyen un concepto aislado en el seno de las matemáticas, sino que surgen más allá del concepto de número en el nivel de los fundamentos, convirtiéndose en un desafío para las mismas. Los números negativos pusieron en tela de juicio pilares esenciales de la filosofía de las matemáticas. Las matemáticas eran concebidas como ciencia de las cantidades. Los números negativos obligaban de manera implícita a comprenderlas de otra manera, no empírica ya que, en el mundo exterior, ninguna realidad podía asignársele a estos números”. (pág. 256)

En su rastreo, Gallardo y Basurdo (2010) identifican “la emergencia de la negatividad vinculada a un método de naturaleza algebraica” (pág. 261), esto ligado al proceso de resolución de un sistema de ecuaciones lineales por parte de los chinos. Como reflexión final plantean que “en las distintas formas de negatividad […], el lenguaje juega un papel mediador fundamental y complejo en la construcción de conceptos matemáticos.” (pág. 265). Se identifican entonces propiedades que no funcionan en los números naturales y los números enteros lograron solucionarlo, como es el caso de la propiedad clausurativa.

Precisamente, tras reconocer el proceso que ha implicado la aceptación y evolución del concepto de número entero a través de la historia, algunos autores se han dado a la tarea de aportar al estudio de los mismos, como es el caso de Tussy y Koenig (2020), quienes sostienen que “a la colección de los números naturales positivos, los negativos de los números naturales y el 0 se le llama conjunto de los números enteros.” (pág. 186), haciendo claridad respecto al cero ya que este número no es positivo ni negativo. Se reconoce también que todos los enteros positivos son mayores que el cero y es posible escribirlos con o sin signo (+), así como todos los enteros negativos son menores que él y se escriben con el signo $-$; simbólicamente se representan:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$$

Pérez Serrano, Alcalde Esteban y Lorenzo Valentín (2014), por su parte afirman que “los números enteros son una extensión de los números naturales, formada por los propios números naturales no nulos $(1, 2, 3 \ldots)$, sus correspondientes negativos $(-1, -2, -3 \ldots)$ y cero (0)” (pág. 10). Se establece que el conjunto $\mathbb{N}$ es un subconjunto de los números enteros, conjunto que se denota con la letra

$\mathbb{Z}$, como ya se expuso en el párrafo anterior. Tras un proceso de análisis respecto a la construcción de ellos, simbólicamente presentan su composición a partir de tres subconjuntos: "Z^-,$\{0\} i\, Z^+$, es decir: $Z = Z^- \cup \{0\} \cup Z^+$" (pág. 14).

En párrafos anteriores se hizo mención al valor absoluto de un número entero entero, propiedad que de acuerdo con Tussy y Koenig (2020) "proporciona la distancia entre el número y el 0 en la recta numérica" (pág. 130), y para indicarlo se ubica al número entre dos barras verticales. Como expresa distancia, el valor absoluto de un número entero siempre es positivo o cero y nunca será negativo, por ejemplo en el caso de 3 y -3, el valor absoluto para ambos números enteros es 3, dado que los dos se encuentran ubicados a tres unidades de distancia del cero. También se hace referencia puntual sobre el símbolo $-$, dado que se emplea para indicar que un número es negativo, por ejemplo -7, para señalar el opuesto de un número como $-(-5)$ y para la operación resta, $9 - 4$.

Respecto a las operaciones básicas con números enteros (aditivas y multiplicativas), estos autores establecen las siguientes reglas para la suma de números enteros con el mismo signo: "1. Para sumar dos enteros positivos, súmelos como siempre, la respuesta final es positiva; 2. Para sumar dos enteros negativos, sume sus valores positivos y haga negativa la respuesta final" (pág. 138). Pero en caso que los números a sumar tengan signos diferentes:

> "Para sumar un entero positivo y un entero negativo, reste el valor absoluto más pequeño del más grande. 1. Si el entero positivo tiene el valor absoluto más grande, la respuesta final es positiva; 2. Si el entero negativo tiene el valor absoluto más grande, haga negativa la respuesta final." (Tussy & Koenig, 2020, pág. 140)

Las demás operaciones, y algunas de sus propiedades, se presentana continuación:

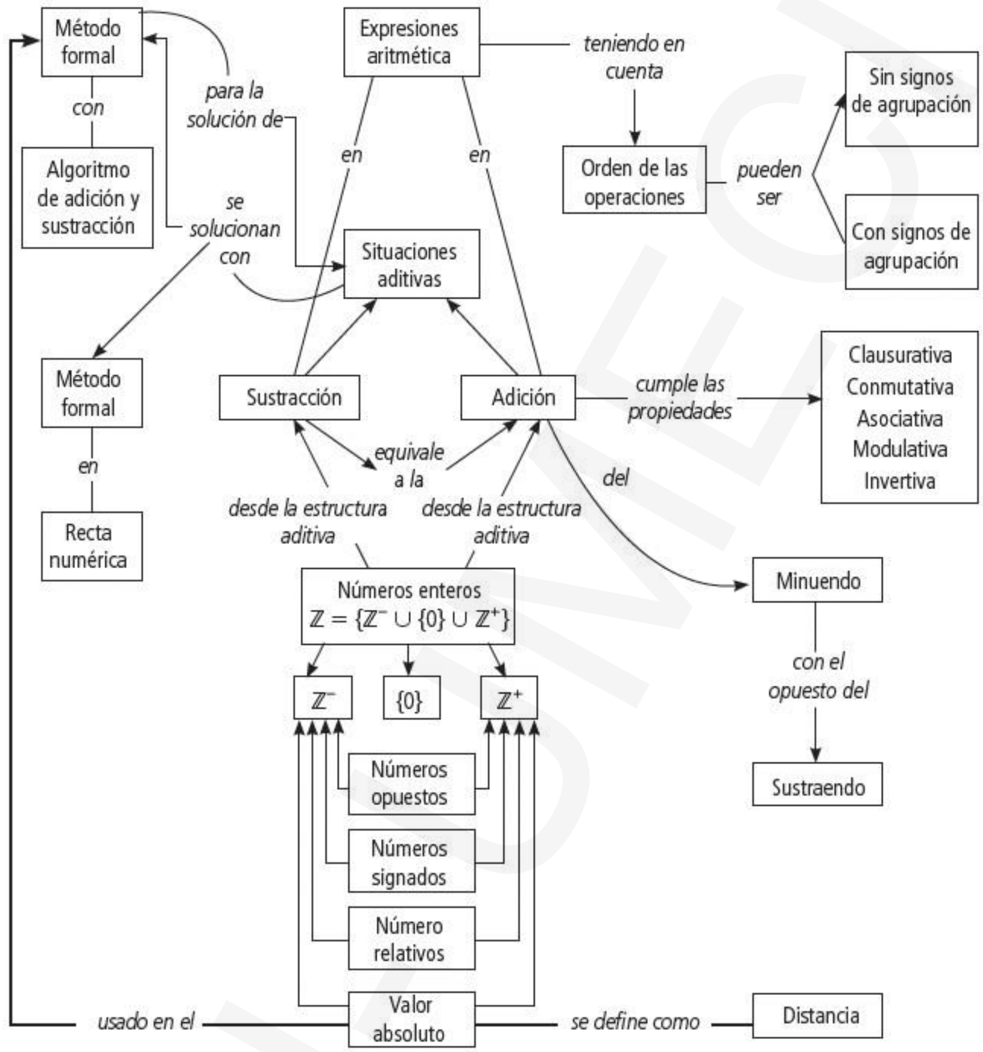
Tabla 1. Sustracción de números enteros

DEFINICIONES Y CONCEPTOS	EJEMPLOS
La **regla para la resta** es de utilidad cuando se restan números con signo. Para restar dos enteros, sume el primer entero al opuesto del entero a restarse. *La resta es lo mismo que la suma del opuesto.*	Reste: $3 - (-5)$ $\overset{\text{Sume ...}}{3 - (-5) = 3 + \underbrace{5}_{\text{...el opuesto}} = 8}$ *Use la regla para sumar dos enteros con el mismo signo.* Compruebe utilizando una suma: $8 + (-5) = 3$
Después de rescribir una resta como la suma del opuesto, use una de las reglas para la suma de números con signo explicada en la sección 2.2 para encontrar el resultado.	Reste: $-3 - 5 = -3 + (-5) = -8$ *Sume el opuesto del 5, el cual es el -5.* $-4 - (-7) = -4 + 7 = 3$ *Sume el opuesto del -7, el cual es el 7.*
Tenga cuidado cuando traduzca la instrucción para restar un número *de* otro.	Reste -6 de -9. $-9 - (-6)$ *El número a restarse es el -6.*
Las expresiones pueden involucrar una resta repetitiva o combinaciones de resta y adición. Para evaluarlas, use la **regla para la jerarquía de las operaciones** explicada en la sección 1.9.	Evalúe: $-43 - (-6 - 15)$ $-43 - (-6 - \mathbf{15}) = -43 - [-6 + (\mathbf{-15})]$ *Dentro de los paréntesis, sume el opuesto del 15, el cual es el -15.* $= -43 - [\mathbf{-21}]$ *Dentro de los corchetes, sume el -6 y el -15.* $= -43 + \mathbf{21}$ *Sume el opuesto del -21, el cual es el 21.* $= -22$ *Use la regla para la suma de enteros que tienen signos diferentes.*
Cuando se encuentra la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de una colección de mediciones se está encontrando el **rango** de los valores. Rango = valor máximo − valor mínimo	**Geografía.** El punto más alto en Estados Unidos es el monte McKinley a 20 320 pies. El punto más bajo está a −282 pies en el Valle de la Muerte, California. Encuentre el intervalo entre el punto más alto y el más bajo. Intervalo $= 20\,320 - (\mathbf{-282})$ $= 20\,320 + \mathbf{282}$ *Sume el opuesto del -282, el cual es el 282.* $= 20\,602$ *Realice la suma.* El intervalo entre el punto más alto y el punto más bajo en Estados Unidos es de 20 602 pies.
Para encontrar el **cambio en una cantidad, se resta el** *valor anterior* del *valor posterior.* Cambio = valor posterior − valor anterior	**Submarinos.** Un submarino viajaba a una profundidad de 165 pies debajo del nivel del mar. El capitán ordenó una nueva posición de solo 8 pies debajo de la superficie. Encuentre el cambio en la profundidad del submarino. Se puede representar 165 pies bajo el nivel del mar como −165 pies y 8 pies bajo la superficie como −8 pies. Cambio en la profundidad $= -8 - (-165)$ *Reste la profundidad anterior de la profundidad posterior.* Cambio en la profundidad $= -8 + 165$ *Sume el opuesto del -165, el cual es el 165.* Cambio en la profundidad $= 157$ *Use la regla para la suma de enteros que tienen signos diferentes.* El cambio en la profundidad del submarino fue de 157 pies.

Fuente: tomado de Tussy y Koenig (2020), pág. 189

En este punto, se hace referencia a la estructura aditiva de los números enteros, con el abordaje de la adición y la sustracción en dicho conjunto numérico. Tanto para sumar como para restar, se utilizan propiedades y se debe seguir una jerarquía entre dichas operaciones. De acuerdo con Becerra, Buitrago, Calderón, Cañadas, y Gómez (2016), “esto se aplica para resolver situaciones aditivas mediante el método formal, al usar los algoritmos correspondientes en una expresión aritmética, o mediante el método gráfico, al hacer uso de la recta numérica” (pág. 7), y con ello plantean el siguiente esquema, en el que se aprecian las diferentes relaciones que se establecen en este conjunto en referencia a la estructura aditiva:

Figura 18. Estructura conceptual de la adición y sustracción de números enteros



Fuente: tomado de Becerra, et al. (2016), pág. 7.

Del manera similar a lo que se hizo con la adición y la sustracción, se retoman elementos puntuales de Tussy y Koenig (2020), en los que refieren las operaciones multiplicación y división con números enteros, que en conjunto hacen referencia a la estrcutura multiplicativa:

Tabla 2. Multiplicación de números enteros

DEFINICIONES Y CONCEPTOS	EJEMPLOS
Multiplicación de dos enteros que tienen signos diferentes (no semejantes) Para multiplicar un entero positivo y un entero negativo, multiplique sus valores absolutos. Después haga negativa la respuesta final.	Multiplique: $6(-8)$ Encuentre los valores absolutos: $\|6\| = 6$ y $\|-8\| = 8$. $6(-8) = -48$ Multiplique los valores absolutos 6 y 8 para obtener 48. Después haga negativa la respuesta final.
Multiplicación de dos enteros que tienen signos iguales (semejantes) Para multiplicar dos enteros que tienen el mismo signo, multiplique sus valores absolutos. La respuesta final es positiva.	Multiplique: $-2(-7)$ Encuentre los valores absolutos: $\|-2\| = 2$ y $\|-7\| = 7$. $-2(-7) = 14$ Multiplique los valores absolutos 2 y 7 para obtener 14. La respuesta final es positiva.
Para **evaluar expresiones** que contienen varias multiplicaciones, se hace un uso repetitivo de las reglas para la multiplicación de dos enteros.	Evalúe $-5(3)(-6)$ de dos maneras. Desarrolle las multiplicaciones, empezando de izquierda a derecha. $-5(3)(-6) = -15(-6)$ $= 90$
Otro método para evaluar expresiones es utilizar las **propiedades conmutativa** y/o **asociativa de la multiplicación** para reordenar y reagrupar los factores de una manera útil.	Primero, multiplique el par de factores negativos. $-5(3)(-6) = 30(3)$ Multiplique los factores negativos para formar un producto positivo. $= 90$
Multiplicación de un número par e impar de enteros negativos El producto de un número par de enteros negativos es positivo. El producto de un número impar de enteros negativos es negativo.	Cuatro factores negativos: $-5(-1)(-6)(-2) \overset{\text{positivo}}{=} 60$ Cinco factores positivos: $-2(-4)(-3)(-1)(-5) \overset{\text{negativo}}{=} -120$
Potencias pares e impares de un entero negativo Cuando se eleva un entero negativo a una potencia par, el resultado es positivo.	Evalúe: $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3)$ El exponente es par. $= 9(9)$ Multiplique los pares de enteros. $= 81$ La respuesta es positiva.
Cuando se eleva un entero negativo a una potencia impar, el resultado es negativo.	Evalúe: $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2)$ El exponente es impar. $= -8$ La respuesta es negativa.
Aunque las expresiones exponenciales $(-6)^2$ y -6^2 se parezcan no son iguales. Las bases son diferentes.	Evalúe: $(-6)^2$ y -6^2 Debido a los paréntesis, la base es el -6. El exponente es el 2. $(-6)^2 = (-6)(-6)$ $= 36$ Dado que no hay paréntesis alrededor del -6, la base es el 6. El exponente es el 2. $-6^2 = -(6 \cdot 6)$ $= -36$
Los problemas de aplicación que involucran una **suma repetitiva** con frecuencia son más fáciles de resolver utilizando una multiplicación.	**Química.** Un compuesto químico que por lo regular se almacena a 0°F se le ha disminuido su temperatura en 8°F cada hora por 6 horas. ¿Qué número con signo representa el cambio en la temperatura del compuesto después de 6 horas? $-8 \cdot 6 = -48$ Multiplique el cambio en la temperatura cada hora por el número de horas. El cambio en la temperatura del compuesto es de -48°F.

Fuente: tomado de Tussy y Koenig (2020), pág. 190-191

Tabla 3. División de números enteros

DEFINICIONES Y CONCEPTOS	EJEMPLOS
División de dos enteros Para dividir dos enteros, divida sus valores absolutos. **1.** El cociente de dos enteros que tienen signos iguales (*semejantes*) es positivo. **2.** El cociente de dos enteros que tienen signos diferentes (*no semejantes*) es negativo. Para **comprobar una división** de enteros, multiplique el *cociente* y el *divisor*. Debe obtener el *dividendo*.	Divida: $\frac{-21}{-7}$ Encuentre los valores absolutos: $\lvert -21 \rvert = 21$ y $\lvert -7 \rvert = 7$. $\frac{-21}{-7} = 3$ Divida los valores absolutos 21 entre 7 para obtener 3. La respuesta final es positiva. ***Comprobación:*** $3(-7) = -21$ El resultado es correcto. Divida: $-54 \div 9$ Encuentre los valores absolutos: $\lvert -54 \rvert = 54$ y $\lvert 9 \rvert = 9$. $-54 \div 9 = -6$ Divida los valores absolutos 54 entre 9 para obtener 6. Haga negativa la respuesta final. ***Comprobación:*** $-6(9) = -54$ El resultado es correcto.
División con 0 Si se divide el 0 *entre* cualquier entero diferente del 0, el cociente es 0. La división *de cualquier* entero diferente del cero *entre* el 0 no está definida.	$\frac{0}{-8} = 0$ $0 \div (-20) = 0$ $\frac{-2}{0}$ no está definida. $-6 \div 0$ no está definida.
Los problemas que involucran la formación de **grupos de igual tamaño** pueden resolverse por medio de una división.	**Ventas de automóviles usados.** El precio de un automóvil usado se redujo cada día en una cantidad igual debido a que no se vendía. Después de 7 días y una reducción total de 1 050 dólares en su precio, el automóvil fue por fin adquirido. ¿Cuánto se redujo el precio del automóvil cada día? $\frac{-1\,050}{7} = -150$ Divida el cambio en el precio del automóvil entre el número de días en que se redujo el precio. El resultado negativo indica que el precio del automóvil se redujo en 150 dólares cada día.

Fuente: tomado de Tussy y Koenig (2020), pág. 192

Son diversas las aplicaciones de los números enteros en la vida diaria y, en general, de las matemáticas, razón por la que se tienen presentes tanto los aprendizajes que se formalizan en el aula de clase como los que se obtienen de manera empírica, sentido en el que se considera importante la vinculación entre ambos. Algunas de esas aplicaciones se encuentran al referirse a ganancias y pérdidas, altura y profundidad sobre el nivel del mar, variaciones en la temperatura, desplazamientos hacia arriba, abajo, izquierda o derecha (plano cartesiano), etc., de tal forma que ahora es posible, por ejemplo, sustraer una cantidad mayor de una menor, lo que no se podía hacer antes de la introducción de dicho concepto y que podría generar resistencia o confusión en algunos estudiantes, tal como he podido notar en mi experiencia como docente.

Propiamente, en el sistema educativo colombiano, de acuerdo con los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas (MEN, 2006), la enseñanza inicial de este concepto, y lo relacionado a él, se da entre los grados sexto y séptimo de educación básica secundaria, teniendo en cuenta que ambos grados hacen parte del mismo ciclo, como se mostró en apartados anteriores, y dentro de la autonomía conferida a las instituciones educativas se realiza la respectiva distribución dentro de estos dos grados. A continuación, se toma como ejemplo el plan de formación asumido en la institución donde actualmente laboro, en el que se identifica la subdivisión propuesta para la enseñanza del número entero a partir de su identificación, en el grado séptimo.

Tabla 4. Plan de formación para el grado séptimo, en relación al concepto matemático de número entero

GRADO: Séptimo	
EJE ARTICULADOR (Pensamientos): pensamiento numérico SITUACIÓN PROBLEMA: ¿Cómo aplico los números enteros en la resolución de problemas de la vida cotidiana y los articulo a mi aprendizaje de las matemáticas? ¿De qué forma puedo aplicar los números racionales para fortalecer mi aprendizaje de las matemáticas?	
CONTENIDOS DE LA CULTURA	ESTÁNDARES (Desarrollo de procesos de Pensamiento)
NÚMEROS ENTEROS: Concepto de número entero Representación en la recta numérica Valor absoluto de un número Orden en el conjunto de los números enteros Adición Sustracción Simplificación de signos de agrupación para operar con números enteros Multiplicación División Potenciación Radicación Polinomios aritméticos	• Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las medidas. • Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones. • Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos. • Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales (simétrica, transitiva, etc.) y de las operaciones entre ellos (conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contextos.

Fuente: tomado del plan de formación de la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Jericó

Se observa cómo del concepto central, número entero, se desprenden otros en relación a él, los cuales se complementan con el conjunto de los números naturales. Es precisamente la transición entre ambos conjuntos numéricos lo que llama la atención, pues de su correcta comprensión y aprendizaje depende, en cierta medida, el éxito o fracaso en los siguientes grados de escolaridad, por llamarlo así, dado que a partir del grado séptimo, en el caso concreto de esta institución, el concepto de número entero se aborda y requiere en los contenidos propuestos en el plan de formación respectivo a cada grado siguiente, sin ser exclusivos del área de matemáticas y, aún después del colegio, en la universidad, sin perder de vista su aplicabilidad en la vida diaria.

2.3.5. Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas

Retomando lo planteado en relación a ¿qué es una dificultad de aprendizaje en matemáticas?, se señalan algunas de ellas a continuación con su respectiva descripción, de acuerdo con investigaciones y teorías previas. Lo anterior, con el propósito de identificar aquellas características o condiciones que más adelante, en el proceso de investigación, conduzcan a la identificación de factores asociados y a una categorización de las mismas.

Una de las más conocidas y mencionadas, pero no la única, es la discalculia. Hudson (2017) la compara con la dislexia, pero en este caso sucede con los números; se le entiende como dificultades con el cálculo y la aritmética De acuerdo con el Department for Education and Skills (2001, citado en Hudson, 2017) se define como "una afección que afecta la habilidad para adquirir competencias matemáticas" (p. 47), de tal manera que no se limita únicamente al cálculo y la aritmética sino que se extiende a las matemáticas en general, es decir, a los cinco pensamientos y sus respectivos procesos, de los cuales ya se hizo mención. Al respecto, se reconoce su presencia en al menos un 5% de la población, pero se manifiesta además la posibilidad de que un número mayor la tenga en combinación con otras dificultades de aprendizaje.

Tal como se indicó anteriormente, es probable que la discalculia posea componentes genéticos, en estudios se ha comprobado su repitencia dentro de una misma familia, como lo es el caso de Hudson (2017), coincidiendo con Blakemore y Frith (2008), quienes afirman igualmente que la discalculia es un problema que se hereda de familia; es importante señalar, además, que no existe una cura para la misma. Es común, por tanto, encontrar en las aulas estudiantes que de una u otra forma muestran rechazo, apatía, disgusto hacia las matemáticas, no se les da, y lo que se trata de precisar es la razón o factores asociados a ello, puesto que no es posible generalizar o simplemente decir que tienen discalculia.

De acuerdo con Hudson (2017), es probable que un estudiante con discalculia tenga dificultades para recordar un número de teléfono, que carezca de confianza ante las matemáticas y por lo tanto trate de evitar actividades que las involucren. Señala, en relación a los números, que estos estudiantes no cuentan con la habilidad para captarlos intuitivamente; en relación a la comprensión de enunciados escritos, tienden a entrar en pánico y bloquearse con preguntas que hagan referencia a los números, en especial cuando se hace bajo presión: Desde la memoria a corto plazo, se les dificulta recordar los números con los que hay que trabajar durante los cálculos al igual que series e instrucciones; en la representación gráfica, puede ser un problema para ellos el llegar a tiempo a algún lugar o saber qué hora es. En la siguiente tabla se relacionan algunos indicadores que posibilitan la identificación de estudiantes con discalculia:

Tabla 5. Dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas

Números	Comprensión de enunciados escritos	Problemas de la memoria a corto plazo (dificultades de secuenciación)	Representación gráfica	Reacciones emocionales	Habilidades organizativas

Son incapaces de reconocer patrones numerales para poder decir cuántos elementos hay en un grupo (incluso cuando hay menos de 10). Tendrán que contarlos uno por uno. Tienen problemas para redondear los números hacia arriba o hacia abajo. Dificultad estimando las respuestas. A menudo contarán con los dedos. Puede que confundan números de aspecto similar como el 3 y el 8 o el 6 y el 9. Invierten números, por ejemplo, el 350 con el 305. Problemas con los ceros; se pierden con los múltiplos de 10. Dificultad extrema para aprender horarios de memoria. No pueden hacer operaciones aritméticas mentalmente. Tienen problemas para recordar datos numéricos. Dificultades a la hora de recordar procedimientos matemáticos: puede que tengan que releerlos. Si han aprendido un determinado procedimiento, lo seguirán mecánicamente, sin confianza en ellos mismos ni comprensión. Dificultad a la hora de captar porcentajes, puntos decimales y fracciones.	Dificultad para entender qué se está preguntando. Leen incorrectamente, o malinterpretan, símbolos matemáticos y enunciados, como $\div$ y $-, + y \times, < y >$. Tienden a hacer estimaciones a lo bruto. Los corchetes les confunden.	Dificultades para: Recordar las fórmulas o resolver problemas que atañen al área, el volumen, la masa, la velocidad, la aceleración y la densidad. Conversiones de temperatura. Dinero, especialmente convirtiendo moneda. Aumento o descenso de un porcentaje. Valores negativos. Ecuaciones, especialmente si implican fracciones. Estadísticas, media, mediana, moda y desviación estándar.	Problemas para comprender e interpretar gráficos. Saber en qué dirección de los ejes hay que dibujar. Obtener la escala para que encaje en el folio. Escalas incongruentes o incorrectas. Puntos representados gráficamente de forma incorrecta. Líneas trazadas incorrectamente. Lecturas inexactas.	Pueden sentir ansiedad en clase, temerosos de que se les dirija una pregunta y de verse expuestos frente a sus compañeros. A menudo entran en pánico bajo presión y se les ocurrirán elaboradas técnicas de evitación para sortear las matemáticas. Los casos más extremos pueden conducir a cuadros de ansiedad y "fobia a las matemáticas"	Algunos pueden tener problemas con la organización
No son capaces de transferir habilidades o procedimientos					

matemáticos que han aprendido con facilidad para resolver determinados problemas a otros distintos.

Fuente: Elaboración propia, Dificultades específicas de aprendizaje y otros trastornos. Hudson (2017)

Es claro entonces que un mismo estudiante pueda manifestar una o varias de estas dificultades simultáneamente, y que por lo tanto se le catalogue como discalculia, aún así se estarían desconociendo factores asociados, como se le ha denominado en la presente investigación, razón de ser de la misma.

Con lo anterior, se contempla la posibilidad de que dichas dificultades estén relacionadas con lesiones o anomalías en el cerebro, en concordancia también con Dehaene (2016), quien afirma que “distintas lesiones cerebrales con diversos orígenes pueden tener un impacto devastador y a veces sorprendentemente específico en las habilidades aritméticas”, pero también es probable que se deba a otros factores, y es esa la razón de la presente investigación, en cuanto a la necesidad de dar claridad referente a factores asociados a dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, Blakemore y Frith (2008) sostienen que

> Las dificultades graves y continuas con las matemáticas no tienen por qué deberse a problemas neurológicos, sino que pueden producirse por otras razones, entre ellas la ansiedad. Sea cual fuere la causa, las estrategias educacionales inspiradas por estudios psicológicos y cerebrales sobre el procesamiento de los números podrían ayudar a sortear o superar los déficits. Estas estrategias serían diferentes si las causas también lo fueren, de ahí la importancia de buscar las causas. (p. 119)

De esa manera reconocen, primero, la multiplicidad de posibilidades al referirse a lo que se denomina en este estudio como factores asociados a dificultades vinculadas al aprendizaje de las matemáticas, y segundo, la importancia de conocerlos, en cuanto ese conocimiento posibilita la atención de las mismas de acuerdo a sus características y condiciones específicas. Concuerda Dehaene (2016) con Blakemore y Frith (2008) al afirmar que "es muy probable que muchos de los que muestran dificultades con la aritmética no tengan ningún daño biológico" (p. 399) y sugiere, por ejemplo, que no se les ha enseñado bajo métodos apropiados. Dehaene (2016) plantea la posibilidad de que estas dificultades sean agravadas por componentes emocionales, ansiedad creciente o fobia a las matemáticas.

El propósito de la presente investigación no busca su atención sino el brindar los conocimientos frente a sus factores asociados, de tal forma que puedan ser tenidos en cuenta no sólo para su identificación y comprensión, sino en la posibilidad de su atención, los cuales podrán ser retomados por otros investigadores posteriormente.

2.3.6. Evaluación del aprendizaje en matemáticas

Un punto crucial en todo este asunto del aprendizaje, es el referido a la evaluación, en cuanto a la necesidad de comprobar si un estudiante efectivamente aprendió o no, pero partiendo del hecho de que no es posible observarlo de manera directa. Sin embargo, en nuestra cultura, la prueba escrita es uno de los medios directos para verificarlo.

Así también lo considera Schunk (2012) al afirmar que "a menudo el aprendizaje se evalúa a partir de los exámenes escritos de los alumnos mediante pruebas, cuestionarios, tareas, trabajos finales e informes" (p. 15), sin que ello sea garante unánime del proceso como tal, queriendo decir que no necesariamente quien responde correctamente el 100% de la prueba es porque en esa medida logró aprender; igualmente sucede con quien no lo logra, no quiere decir estrictamente que no aprendió, pues existen diversos factores que directa o indirectamente ejercen influencia. Tal como lo manifiesta Schunk (2012), para que el investigador o profesional, este caso el maestro, pueda saber si ha ocurrido el aprendizaje o no, existen otros procedimientos además de las pruebas, con los cuales es posible obtener la evidencia deseada.

Uno de estos procedimientos, a los que hace referencia, es la observación directa, que consiste en observar los comportamientos que pueden asumir los estudiantes para identificar posibles cambios en ellos, y la cual es comúnmente utilizada por los maestros al interior de las aulas de clase, no siempre para verificar si ha ocurrido aprendizaje. A este respecto, señala que

> la observación directa es un índice válido del aprendizaje si las observaciones son claras e implican poca inferencia por parte del observador, y funciona mejor cuando se especifica la conducta esperada y después se observa a los estudiantes para establecer si sus conductas se ajustan al estándar. (p. 14)

Se trata entonces de ser objetivos, en tanto la rigurosidad que amerita la investigación, dejando de lado la subjetividad que conduzca a la inferencia en los comportamientos observados, y como apoyo para tal fin pueden utilizarse las rúbricas, de acuerdo a lo enunciado como, entre otros, un procedimiento de carácter evaluativo.

Con lo expuesto hasta el momento sobre lo que es el aprendizaje, Schunk (2012) enuncia algunos procedimientos, de los que se habló en párrafos anteriores para evaluar el aprendizaje:

Tabla 6. Métodos de evaluación del aprendizaje

Categoría	**Definición**
Observaciones directas	Ejemplos de conducta que demuestran aprendizaje.
Exámenes escritos	Desempeño por escrito en pruebas, cuestionarios, tareas, trabajos y proyectos.
Exámenes orales	Preguntas, comentarios y respuestas verbales durante la enseñanza.
Calificaciones de terceros	Juicios de los observadores sobre los atributos que indican el aprendizaje de los sujetos.
■ Autorreportes	Juicio de las personas sobre sí mismas.
■ Cuestionarios	Respuestas escritas a reactivos o respuestas a preguntas.
■ Entrevistas	Respuestas orales a preguntas.
■ Recapitulación dirigida	Recuerdo de los pensamientos que acompañaban a la ejecución de una tarea en un momento dado.
■ Pensamiento en voz alta	Verbalización de los propios pensamientos, acciones y sentimientos mientras se desempeña una tarea.
■ Diálogos	Conversaciones entre dos o más personas.

Fuente: Tomado de Schunk (2012). Métodos de evaluación del aprendizaje, p. 15.

El autor aclara que, aunque la observación se contemple como una estrategia en el campo de la evaluación, debe considerarse que solo se observa lo que es factible de observarse, lo que implica que los procesos cognoscitivos y afectivos que anteceden las acciones de los estudiantes se pasan por alto a través de ella. Señala, además, que

> la ausencia de una conducta apropiada no significa que el individuo no ha aprendido. Aprendizaje no es lo mismo que desempeño, y muchos factores, además del aprendizaje, podrían afectarlo. Existe la probabilidad de que los estudiantes no realicen las acciones aprendidas porque no se sienten motivados, porque se sienten enfermos o están ocupados haciendo otras cosas. (Schunk, 2012, pág. 15)

De esta manera se reconoce la existencia e influencia de diversos factores, internos o externos durante el aprendizaje, especialmente en el momento de la evaluación, razón por la cual cobra importancia la presente investigación. Lo anterior, dada la posibilidad de que si un estudiante no responde acertadamente según se solicite, no necesariamente quiere decir que no ha aprendido o que se encuentre ante una posible dificultad de aprendizaje, antes bien, debe conocerse el por qué de su accionar. De acuerdo con Schunk (2012), es necesario descartar dichos factores precisamente antes de concluir que el aprendizaje no ha ocurrido ante la ausencia de determinado desempeño, cuando es común juzgar y determinar el aprendizaje en esa medida; debe trabajarse en su identificación en cuanto que, como se ha venido mencionando, la presencia de factores extraños puede llegar a afectar el desempeño y entorpecer el proceso y resultados de la evaluación del aprendizaje.

Situación similar sucede con los exámenes orales, el resultado no es del todo confiable puesto que los estudiantes “podrían enfrentar problemas para traducir en palabras lo que saben debido a desconocimiento de la terminología, dificultad para hablar en público o problemas de lenguaje" (p. 16), y como las anteriores, es posible que existan otros elementos que interfieran al obtener una respuesta, producto de la evaluación.

Por su parte, en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) se hace referencia a la evaluación formativa, señalando que debe ponerse "énfasis en la valoración permanente de las distintas actuaciones de los estudiantes cuando interpretan y tratan situaciones matemáticas y a partir de ellas formulan y solucionan problemas" (p. 75), de tal manera que se hace un llamado para que se le permita a los estudiantes, partiendo de las soluciones que propongan, justificar, explicar y argumentar.

En este sentido, se reconoce una vez más el sentido e importancia que debe asignársele a los procesos que se esconden tras una respuesta, más que a la misma respuesta independientemente de que ésta sea correcta o incorrecta. En correspondencia con Kilpatrick, Gómez y Rico (1998), quienes destacan que todo se hace con el ánimo de identificar factores asociados a posibles dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, en los casos que aplique.

Así mismo, señalan que la evaluación formativa debe ser un proceso continuo y permanente que integra la observación "como herramienta necesaria para obtener información sobre la interacción entre estudiantes, entre éstos y los materiales y recursos didácticos y sobre los procesos generales de la actividad matemática tanto individual como grupal" (MEN; 2006, p. 75), elementos que se vinculan y hacen referencia, en la propuesta de Claxton (2001), tanto a los recursos internos como externos para el aprendizaje.

2.4. Bases legales

La Constitución Política de Colombia, del año 1991, en el artículo 67, reconoce a la educación como un derecho de la persona, de carácter social, que permite el acceso al conocimiento y la ciencia. Tanto el Estado, como la sociedad y la familia son los responsables de garantizarlo, especialmente entre los cinco y quince años, edad en la que se asume a la educación como obligatoria.

Por su parte, la Ley 115 del 8 de febrero de 1994, correspondiente a la Ley General de Educación de Colombia, en su artículo 1º, enuncia que la educación es un proceso de formación permanente, personal, cultural y social que se fundamenta en una concepción integral de la persona, de su dignidad, de sus derechos y de sus deberes. De esta manera, se reconoce a la educación como un derecho que tienen todas las personas, con función social y acorde a las necesidades e intereses tanto de la persona, como de la familia y la sociedad en general.

Así mismo, en el artículo 11, se identifican los niveles que corresponden a la educación formal desde el preescolar hasta la media, ubicando los grados sexto, séptimo, octavo y noveno, que en conjunto hacen parte del nivel de básica secundaria, nivel en el que se ubica el desarrollo de la investigación. Con el artículo 23 de la misma Ley se presentan las areas obligatorias y fundamentales, entre las que se ubica matemáticas y que se debe ofrecer en todos los establecimientos educativos de acuerdo con el currículo y Proyecto Educativo Institucional definido y adoptado por cada uno de ellos. De otro lado, se establecen los objetivos generales y específicos de la educación en sus diferentes niveles de los cuales, a continuación, se presentan los que hacen referencia específica al campo de las matemáticas en el nivel de educación básica:

Tabla 7. Objetivos de la educación

Objetivo general	Objetivo específico	
Educación Básica (Art. 20)	Educación Básica Primaria (Art. 21)	Educación Básica Secundaria (Art. 22)
c) Ampliar y profundizar en el razonamiento lógico y analítico para la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, la tecnología y de la vida cotidiana;	e) El desarrollo de los conocimientos matemáticos necesarios para manejar y utilizar operaciones simples de cálculo y procedimientos lógicos elementales en diferentes situaciones, así como la capacidad para solucionar problemas que impliquen estos conocimientos;	c) El desarrollo de las capacidades para el razonamiento lógico, mediante el dominio de los sistemas numéricos, geométricos, métricos, lógicos, analíticos, de conjuntos de operaciones y relaciones, así como para su utilización en la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, de la tecnología y los de la vida cotidiana;

Fuente: Elaboración propia, *Ley General de Educación (1991)*

CAPÍTULO III. ASPECTOS METODOLÓGICOS

3. Metodología

Teniendo en cuenta que la presente investigación se desarrolla en el campo de la educación y que esta es asumida como un fenómeno social, se lleva a cabo su abordaje a partir de un enfoque investigativo cualitativo que permite reconocer, analizar y categorizar dificultades asociadas al aprendizaje del número entero que conduzcan a la comprensión de ellas, partiendo de factores asociados a las mismas y centrados en el estudiante, con el propósito de brindar elementos que favorezcan su posterior tratamiento y abordaje desde los procesos de enseñanza.

En concordancia con este enfoque, se define y asume como modelo epistémico al estructuralismo, que de acuerdo con Rodríguez Arias (2018), “se ocupa del estudio de los datos en el contexto al cual pertenecen, además de analizar las relaciones que se establecen entre los mismos” (pág. 148), encontrando correspondencia con el método de teoría fundamentada y el uso del software Atlas.ti. De acuerdo con Lévi-Strauss (1995, citado en Rodríguez Arias, 2018), para que bajo este modelo se pueda producir conocimiento, se requieren los siguientes pasos: 1. La observación de lo real; 2. La construcción de los modelos y, 3. El análisis de la estructura, este último, de acuerdo al autor, conduce hacia un modelo teórico.

En el desarrollo de este capítulo se esbozan los elementos que hacen parte de la metodología de investigación, enfocados hacia el alcance y cumplimiento de los objetivos y al responder la pregunta de investigación formulada.

3.1. Elección de la tradición cualitativa

Al partir de la necesidad de identificar factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero con estudiantes de grado octavo de básica secundaria, que conlleve a una categorización de ellas como propósito fundamental de este estudio, se considera pertinente abordarlo desde un enfoque cualitativo, ya que centra su interés en identificar y reconocer cuáles son las cualidades, características, acciones o comportamientos que conducen a concluir la presencia de una dificultad de aprendizaje.

Lo anterior se da a través de la observación, descripción e interacción pues como lo señala Minayo (2010), comprender e interpretar se convierten en los principales verbos de la investigación cualitativa. Se hace referencia a la complejidad, la sutileza y la delicadeza del ver, oír, observar, comprender e interpretar en la tarea del investigador, igual que en la vida diaria.

Del mismo modo, Minayo (2010) propone los sustantivos para este enfoque, en relación a los dos verbos ya expuestos, "comprender e interpretar se fundamentan, epistemológicamente, en los siguientes sustantivos: experiencia, vivencia, sentido común, acción social, significado e intencionalidad." (p. 254), elementos a tenerse en cuenta en la tarea de escudriñar factores asociados a dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, en cuanto al concepto matemático del número entero, pues como ya se ha expuesto en el capítulo 1, se reconoce la presencia de dichas dificultades, pero no se vislumbra claramente una asociación a factores que conduzcan a su explicación, siendo un tema de interés tanto para investigadores como para los mismos profesores de matemáticas.

De otra parte, Hernández, Fernández y Baptista (2010) señalan que la complejidad y flexibilidad del enfoque cualitativo son mayores, en cuanto a la posibilidad de representarlo mediante un esquema circular, dado que la secuencia puede variar y la indagación se mueve dinámicamente entre ambos sentidos: entre los hechos y su interpretación. De la misma manera, presentan las características, proceso y bondades para este enfoque:

Figura 19. Enfoque cualitativo para la investigación

Fuente: tomado de Hernández, Fernández y Baptista (2010) p. 3

Entre sus características se resalta, el explorar los fenómenos en profundidad, dado que hasta ahora se han encontrado investigaciones referentes a dificultades en el aprendizaje de las matemáticas más no se han ubicado estudios que ahonden en ellas, situación que en el contexto en que se ubica la investigación, amerita profundizar en un ambiente natural como lo es el aula de clase. Lo anterior conlleva a contextualizar el fenómeno y favorecer o posibilitar futuras investigaciones, de tal manera que sea posible interactuar con los estudiantes, observar sus comportamientos al momento de realizar actividad matemática poniendo a prueba sus conocimientos; dialogar con ellos para así contrastar respuestas y pasar a la identificación de posibles dificultades en el aprendizaje de las matemáticas en su abordaje a partir del número entero, y un poco más allá, en el reconocimiento de factores asociados, realizando así una inmersión en el objeto de estudio, tal como lo amerita una investigación cualitativa, esto en el orden de contar con más de una fuente que proporcione los datos necesarios para el desarrollo de la investigación.

Es importante mencionar que, desde la perspectiva de Hernández, Fernández y Baptista (2010), se asume que “la investigación cualitativa se enfoca a comprender y profundizar los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con el contexto.” (p. 364), de ahí la necesidad que este estudio requiera de un método investigativo que permita observar las dificultades de aprendizaje desde la visión de los estudiantes de la institución educativa.

Adicional a esto, aclaran que “es recomendable seleccionar el enfoque cualitativo cuando el tema del estudio ha sido poco explorado, o no se ha hecho investigación suficiente al respecto en algún grupo social específico.” (p. 364), hecho del que se ha venido hablando desde el capítulo I al no encontrar estudios que hayan profundizado en la identificación y categorización de factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero. Es común encontrar estudiantes en las aulas de clase con indicios o manifestaciones de algún tipo de dificultad en su aprendizaje y el conocimiento de factores asociados a ellas podría contribuir y favorecer la intervención para próximas investigaciones.

Se espera entonces, bajo este enfoque, realizar una inmersión que permita obtener los datos directamente en el ambiente, previa definición de los lugares en los que se recolectarán y de los participantes que, para este caso, se espera sea en el aula de clase y otros lugares propios y cercanos a la institución educativa, o en su defecto, simulaciones de un ambiente escolar, con los estudiantes de grado octavo y en relación con el concepto matemático del número entero. Así, se posibilita observar los eventos que ocurren, simples o complejos, para identificar aspectos explícitos e implícitos de los mismos, sin puntos de vista o juicios de valor, mediante la interacción con ellos y la utilización de diversas fuentes.

Esta observación tiene en cuenta a los participantes en su contexto, y el investigador, además de registrar hechos, está en la tarea de entender a los participantes (Williams, Unrau y Grinnell, 2005, citados en Hernández, Fernández y Baptista, 2010), razón por la que se pretende, además de respuestas escritas, buscar que los estudiantes puedan verbalizar y comunicar los procesos y demás sucesos que esconden tras una respuesta, con el fin de entenderlos y así construir camino hacia la comprensión de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: número entero, en los casos que suceda.

En términos de Strauss y Corbin (2016), la investigación cualitativa es aquella que "produce hallazgos a los que no se llega por métodos de procedimientos estadísticos u otros medios de cuantificación" (p. 12), haciendo alusión a que, si bien algunos datos podrán cuantificarse, prima el análisis interpretativo. Entre las razones para escoger un método de este corte, destacan la naturaleza del problema que se investiga, buscando en este caso, precisamente, identificar los factores asociados a dificultades en el aprendizaje de las matemáticas en relación al número entero, y la pretensión de lograrlo a través de la descripción e interpretación de cualidades y características manifiestas por los estudiantes objeto de la investigación.

Señalan, además, que los métodos cualitativos pueden utilizarse para obtener detalles complejos de algunos fenómenos, como lo son los procesos de pensamiento, razón en la que se pretende identificar qué elementos o condiciones se esconden tras estos en los estudiantes que manifiestan posibles dificultades de aprendizaje en el área de las matemáticas. En este sentido, se reconoce la existencia de tres componentes principales en este tipo de investigación:

Figura 20. Componentes de la investigación cualitativa

Fuente: elaboración propia. Strauss y Corbin (2016)

Lo anterior remite a la necesidad de pensar en la identificación de los datos a utilizar, de la misma manera que los procedimientos a desarrollar y la forma de comunicar los resultados, dado que no se han identificado estudios hasta el momento que logren resaltar un orden de las dificultades en cuanto a factores asociados a ellas y de ahí el apremio por teorizar más que demostrar, por tal motivo, el método que se considera más pertinente es la teoría fundamentada, como un abordaje metodológico de tipo cualitativo, de acuerdo con Minayo (2010) y Hernández, Fernández y Baptista (2010).

3.2. Tipo de investigación

Teniendo en cuenta los objetivos trazados para esta investigación y lo descrito en el apartado anterior y, al considerar la necesidad de establecer relaciones entre dificultades de aprendizaje referentes al número entero y factores asociados a ellas, centrados en el estudiante, se encuentra sustento en el tipo de estudio correlacional, pues como lo señalan Hernández, Fernández y Baptista (2010), "este tipo de estudios tiene como finalidad conocer la relación o grado de asociación que exista entre dos o más conceptos, categorías o variables en un contexto en particular" (p. 81), a la cual se le asigna un valor explicativo, de manera parcial, en tanto el conocimiento referente a la relación entre dos o más categorías aporta información explicativa, que para el caso concreto se espera aporte a la comprensión del fenómeno estudiado.

El diseño correlacional no es exclusivo al enfoque cuantitativo de la investigación, pues como lo plantea Ramos Galarza (2020), "en el enfoque cualitativo se proponen estudios con análisis del contenido lingüístico, como es el análisis de codificación selectiva, en donde se proponen las relaciones que se pueden generar entre las categorías que surgen en los discursos de los participantes" (pág. 3), aporte en el que se encuentra sustento para la elección realizada.

3.3. Método: Teoría fundamentada

Strauss y Corbin (2016) definen la teoría fundamentada como una "teoría derivada de datos recopilados de manera sistemática y analizados por medio de un proceso de investigación. En este método, la recolección de datos, el análisis y la teoría que surgirá de ellos guardan estrecha relación entre sí" (p. 13). Su propósito es el de desarrollar teoría basada en datos empíricos (Hernández, Fernández y Baptista, 2010) tal cual se planea la recolección de datos a través de las respuestas obtenidas por parte de los estudiantes, tanto escritas como orales, de manera sistemática, para proceder con su respectivo análisis y así llegar a la identificación de factores asociados a dificultades en el aprendizaje de las matemáticas en relación al número entero.

En ese sentido, Strauss y Corbin (2016) plantean lo que definen como las características para trabajar con la teoría fundamentada:

1. Capacidad de mirar de manera retrospectiva y analizar las situaciones críticamente.
2. Capacidad de reconocer la tendencia a los sesgos.
3. Capacidad de pensar de manera abstracta.
4. Capacidad de ser flexibles y abiertos a la crítica constructiva.
5. Sensibilidad a las palabras y acciones de los que responden a las preguntas.
6. Sentido de absorción y devoción al proceso del trabajo. (p. 8)

Se trata entonces de asumir dichas capacidades, no de manera automática, pues se deben consolidar durante el proceso, en el sentido, por ejemplo, de prestar especial atención a las respuestas que puedan dar los estudiantes ante lo que puedan decir e incluso manifestar con su cuerpo, situación que debe conducir a la retrospección y análisis crítico de los hallazgos, evitando los sesgos y permitiendo la flexibilidad, elemento último propio a la investigación cualitativa.

El planteamiento básico de su diseño, según Hernández, Fernández y Baptista (2010), "es que las proposiciones teóricas surgen de los datos obtenidos en la investigación, más que de los estudios previos. Es el procedimiento el que genera el entendimiento de un fenómeno" (p. 493), siendo posible reconocer el valor que se le asigna en la investigación, pues se trata principalmente de trascender dificultades en el aprendizaje del número entero y comprenderlas, permitiendo que ella emerja a partir de los datos y su respectivo análisis, al ir un poco más allá de las respuestas que se puedan obtener como requisito para la categorización de las mismas.

Dado que la teoría fundamentada se basa en los datos, de acuerdo con Strauss y Corbin (2016), es más factible la generación de conocimientos, aumentar la comprensión y proporcionar una guía significativa para la acción, ruta que se pretende seguir para posibilitar la comprensión de dichas dificultades a partir de factores asociados a ellas, por medio de los procesos que evidencian los estudiantes al enfrentarse a situaciones que impliquen y requieran de la actividad matemática en relación con el número entero, como conocimiento matemático privilegiado en el estudio.

Teniendo en cuenta que "el análisis es la interacción entre los investigadores y los datos" (Strauss y Corbin, 2016, p. 14), es parte del proceso en la tarea de identificar factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero. En la interacción con estos estudiantes, se apunta al reconocimiento de elementos internos y externos, tales como predisposiciones por vivencias anteriores, inconvenientes propios con el asunto matemático, ausencia de conocimientos previos como pre-requisitos o debilidad en ellos, la relación profesor-estudiante que encarna asuntos emocionales, causas genéticas, entre otras. Es así como esta investigación amerita de procesos rigurosos y sistemáticos dando cabida a la flexibilidad para poder realizar un análisis coherente y pertinente al problema estudiado.

Uno de los procesos que aporta en esa identificación es la codificación, cuyos propósitos son: construir teoría más que comprobarla, ofrecer herramientas útiles para manejar grandes cantidades de datos brutos, ayudar a considerar significados alternativos de los fenómenos, ser sistemático y creativo al mismo tiempo; e identificar, desarrollar y relacionar los conceptos, elementos constitutivos básicos de la teoría (Strauss y Corbin, 2016).

Dentro de la teoría fundamentada se hace referencia al ordenamiento conceptual, el cual es concebido como "la organización de los datos en categorías (o a veces, clasificaciones) discretas, según sus propiedades y dimensiones y luego al uso de la descripción para dilucidar estas categorías" (Strauss y Corbin, 2016, pág. 21). De esta manera será necesario realizar una categorización de los datos encontrados a partir del reconocimiento de posibles dificultades en el aprendizaje del número entero, en el ejercicio de poder vincular cada uno de los elementos que hacen parte de esta teoría.

En relación con las dimensiones y propiedades, se hace necesario tener presente que ellas conducen al investigador hacia la diferenciación entre los elementos de un conjunto, incluso entre los pertenecientes a varias clases, para así poder mostrar variaciones entre ellos. Para los autores en mención, "este tipo de análisis es precursor de la teorización. Una teoría bien desarrollada es aquella en la cual se definen los conceptos de acuerdo con sus propiedades y dimensiones específicas". (p. 23), por lo tanto, si se habla de dificultades asociadas al aprendizaje del número entero en el marco de la teoría fundamentada, será de suma importancia el poder explicarlas a partir de factores asociados a ellas.

3.3.1. Procedimientos de codificación

Una vez identificados y recolectados los datos, viene el procedimiento de codificar, entendido como el "proceso analítico por medio del cual se fragmentan, conceptualizan e integran los datos para formar una teoría" (Strauss y Corbin, 2016, pág. 3), importante para el desarrollo de la teoría fundamentada, teniendo en cuenta que es un proceso de carácter dinámico y que fluye como tal. Es de anotar, en este punto, que "el análisis no es un proceso estructurado, estático o rígido" (Strauss y Corbin, 2016, pág. 64), haciendo referencia a la condición flexible propia de los métodos cualitativos. Con esto, se encuentran tres elementos principales para el análisis: los datos; las interpretaciones del investigador ante acontecimientos, objetos, sucesos y acciones y, en tercer lugar, la interacción entre los dos elementos anteriores, en el proceso de recolección y análisis de los datos.

En correspondencia con los datos, esenciales en el proceso de codificación, se espera su definición e identificación a partir de la propuesta de Claxton (2001), específicamente lo que tiene que ver con las facultades para aprender, de tal manera que se asumirán, en su ausencia, como posibles generadores de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, a partir de la propuesta y ejecución de actividad matemática que involucra al número entero, y es allí cuando se llega al conocimiento de ellas, objetivo principal del presente estudio.

Queda claro entonces que será posible, según casos específicos, explicar algunas dificultades en razón a la resistencia que pueda existir por parte del estudiante, otras por la ausencia o mal uso de recursos internos y externos, o por la calidad de la reflexión que se pueda generar en la relación estudiante – conocimiento matemático. Puesto que el proceso de codificación requiere rigurosidad para recibir de él los resultados esperados, se tendrán en cuenta las tres clases para ser utilizadas de acuerdo con la necesidad: codificación abierta, axial y selectiva.

3.3.1.1. Codificación abierta

Este tipo de codificación, de acuerdo con Strauss y Corbin (2016), se concibe como "el proceso analítico por medio del cual se identifican los conceptos y se descubren en los datos sus propiedades y dimensiones" (p. 110). En la tarea de construir teoría, se convierte en el primer acercamiento y tratamiento de los datos, puesto que lleva directamente a la recolección de ellos a partir de los cuales emergen las categorías.

De acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2010), el investigador debe revisar todos los segmentos del material para analizarlos y así generar categorías iniciales de significado. En este caso, la codificación abierta debe conducir a la generación de las primeras categorías referidas a factores asociados a dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, específicamente del número entero; entendiendo por categorías aquellos conceptos que representan fenómenos (Strauss y Corbin, 2016), las cuales se basan en los datos recolectados como lo son las observaciones, entrevistas, anotaciones, entre otros (Hernández, Fernández y Baptista, 2010).

Como uno de los propósitos iniciales en la codificación es el de determinar las propiedades y dimensiones de los datos, es importante tener en cuenta que las primeras corresponden a las características de cada categoría, mientras las segundas se refieren a la escala de variación de las propiedades, tal como lo proponen Strauss y Corbin (2016). Ellos también afirman, en el sentido de dar mayor claridad, que mientras "las propiedades son las características generales o específicas o los atributos de una categoría, las dimensiones representan la localización de una propiedad durante un continuo o rango" (p. 128). En este orden de ideas, la propuesta de Claxton (2001) acerca de las facultades para aprender, se asumen como propiedades del objeto en estudio, conduciendo así a la identificación de sus dimensiones a través del desarrollo del mismo.

Es así como se debe llegar a la descomposición de los datos en partes discretas, examinarse minuciosamente y compararlos en la búsqueda de similitudes y diferencias (Strauss y Corbin, 2016). Durante el proceso de recolección de los datos y en concordancia con los instrumentos diseñados, hay un punto en el que debe prestarse especial atención y este es el de las acciones, interacciones, acontecimientos, sucesos y objetos manifestados o usados por los estudiantes ante una posible dificultad de aprendizaje en el caso concreto del número entero; ya que al agruparse por regularidades, conducirán a la categorización de las mismas, agrupación que se considera importante porque permite reducir el número de unidades con las que se trabaja, atendiendo a lo planteado por los mismos autores.

Este proceso de codificación, a su vez, permite la conceptualización, de tal manera que "los datos se descomponen en incidentes, ideas, acontecimientos y actos discretos a los que luego se les da un nombre que los represente o reemplace" (Strauss y Corbin, 2016, pág. 114); nombres que pueden provenir de diversas fuentes, y que se sugiere deben estar en correspondencia con el contexto en el que se ubica el acontecimiento. Además de categorías, desarrolladas en términos de sus propiedades y dimensiones, se hace referencia a unas subcategorías, que responden al cuándo, el dónde, el por qué y cómo, que posiblemente existan y se definan dentro de cada categoría, como lo proponen dichos autores.

Se trata entonces de identificar factores asociados a posibles dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, concretamente en lo referido al número entero, por tanto, se parte de tres facultades para aprender: resistencia, recursos y reflexión, definidas por Claxton (2001), y las cuales se tornan en posibles dificultades en la medida que es considerada su ausencia y, con base a ellas, realizar el proceso de codificación abierta según lo expuesto. Una vez se logren identificar y definir las categorías, de acuerdo con sus propiedades y dimensiones, se procede con la codificación axial, tratada a continuación.

3.3.1.2. Codificación axial

Definida por Strauss y Corbin (2016) como el "proceso de relacionar las categorías a sus subcategorías, denominado -axial- porque la codificación ocurre alrededor del eje de una categoría, y enlaza las categorías en cuanto a sus propiedades y dimensiones" (p. 134), su propósito es precisamente el de iniciar el proceso de reagrupar los datos, relacionando categorías y subcategorías para lograr explicaciones más precisas sobre el objeto de estudio.

Nuevamente se retoman las propiedades y dimensiones para establecer dichas relaciones, como ya se ha mencionado, teniendo en cuenta que "una categoría representa un fenómeno, o sea, un problema, un asunto, un acontecimiento o un suceso que se define como significativo para los entrevistados" (Strauss y Corbin, 2016, pág. 136), buscando la identificación y reconocimiento de factores asociados a dificultades en el aprendizaje en el área de las matemáticas, a partir de actividad matemática en el campo del número entero.

Así como muestran Hernández, Fernández y Baptista (2010), en este tipo de codificación se parte del análisis en la agrupación de los datos, previamente separados durante la codificación abierta, proceso en el que "se construye un modelo del fenómeno estudiado, que incluye: las condiciones en que ocurre o no ocurre, el contexto en que sucede, las acciones que lo describen y sus consecuencias" (p. 494); que en el caso propio, y como ya se ha expuesto antes, refiere a la identificación de factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero, para la posterior categorización de las mismas, siendo, por consiguiente, un proceso más analítico comparado con la codificación abierta, en la que se requiere de mayor abstracción.

Para lograr la codificación axial, Strauss y Corbin (2016) proponen algunas tareas básicas, entre las que se encuentran:

1. Acomodar las propiedades de una categoría y sus dimensiones, tarea que comienza durante la codificación abierta.
2. Identificar la variedad de condiciones, acciones/interacciones y consecuencias asociadas con un fenómeno.
3. Relacionar una categoría con sus subcategorías por medio de oraciones que denotan las relaciones de unas con otras.
4. Buscar claves en los datos que denoten cómo se pueden relacionar las categorías principales entre sí. (p. 137)

Como ya se indicó, la codificación axial tiene un carácter predominante en lo analítico, y en el proceso de análisis de los datos intervienen dos niveles de explicaciones, tal como lo señalan Strauss y Corbin (2016): de un lado, las palabras que utilizan los entrevistados y, del otro, las conceptualizaciones del investigador sobre ellas, es decir, ellos proporcionan el cuándo, el cómo, el por qué , el para qué, etc., y él se encarga de interpretar los acontecimientos.

Referente a lo anterior, lo que se busca es dar respuesta a interrogantes como por qué sucede, dónde y cuándo, y en ese proceso se descubren relaciones entre categorías (Strauss y Corbin, 2016), lo que permite una contextualización del fenómeno en sí. Se señalan, por consiguiente, dos elementos relevantes en la codificación axial, siendo ellos la estructura y el proceso. El primero, corresponde a las “circunstancias en las cuales se sitúan o emergen los problemas, asuntos, acontecimientos o sucesos pertenecientes a un fenómeno” (p. 139), y el segundo “denota la acción/interacción, en el tiempo, de las personas, organizaciones y comunidades, en respuesta a ciertos problemas y asuntos" (p. 139), es decir, se traducen en el por qué y el cómo, ambos importantes para lograr la comprensión del fenómeno, para captar la dinámica y naturaleza evolutiva del mismo.

Surge un elemento denominado Paradigma, el cual consiste en un esquema organizativo que corresponde a una perspectiva que se toma frente a los datos como una posición de análisis, que contribuye en su recolección y ordenamiento de manera sistemática, para así lograr la integración entre la estructura y el proceso, resaltados en el párrafo anterior.

Entre sus componentes básicos se señalan los siguientes: condiciones, como "una manera conceptual de agrupar las respuestas a las preguntas de por qué, dónde, cuándo y cómo" (Strauss y Corbin, 2016, pág. 140), las cuales componen la estructura del fenómeno; acciones/interacciones, como "las respuestas estratégicas o rutinarias dadas por los individuos o grupos a los asuntos, problemas, acontecimientos o sucesos que emergen bajo estas condiciones" (p. 140), ellas se representan por el quién y el cómo y; como tercer componente, consecuencias, "representadas por preguntas relativas a qué sucede como resultado de estas acciones/interacciones o por qué los grupos no responden a situaciones por medio de acciones/interacciones, lo que constituye un hallazgo importante por sí mismo" (p. 140).

Estos tres elementos: condiciones, acciones/interacciones y consecuencias, fundamentan el propósito de identificar factores asociados a posibles dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, a través de la interacción misma con los estudiantes, unidades de estudio, y la de ellos con el conocimiento matemático, número entero.

Con respecto a estos paradigmas y sus componentes, Strauss y Corbin (2016) sostienen que, al identificar los fenómenos, entendidos como el ¿qué es lo que sucede?, lo que se busca son los “patrones repetidos de acontecimientos, sucesos, o acciones/interacciones que representen lo que las personas dicen o hacen, solas o en compañía, en respuesta a los problemas y situaciones en los que se encuentran” (p. 142), resaltando así dos factores a tener en cuenta en la recolección de datos y la posterior codificación, los cuales son: el decir y el hacer. De tal manera que llevan a pensar en la necesidad de fuentes que permitan un acercamiento desde ambas líneas con los estudiantes, en situaciones que los enfrenten directamente a la actividad matemática relacionada con los números enteros.

Como uno de los propósitos de la codificación axial es el establecimiento de relaciones entre categorías a partir de los datos, Hernández, Fernández y Baptista (2010) las conciben como “temas de información básica identificados en los datos para entender el proceso o fenómeno al que hacen referencia” (p. 495), dichas categorías deben conducir entonces a comprender dificultades asociadas al aprendizaje de las matemáticas a partir de la identificación de factores asociados a ellas. Señalan, además, la utilidad de la teoría fundamentada, concretamente en la comprensión de procesos educativos, al identificar conceptos implicados y la serie de acciones e interacciones de quienes se involucran en el proceso.

3.3.1.3. Codificación selectiva

Basado en los postulados de Hernández, Fernández y Baptista (2010), el principal atributo de la teoría fundamentada consiste en que “los datos se categorizan con codificación abierta, luego el investigador organiza las categorías resultantes en un modelo de interrelaciones (codificación axial), que representa a la teoría emergente y explica el proceso o fenómeno de estudio” (p. 496), para posteriormente llegar a la integración y refinamiento de la teoría (codificación selectiva), tal como lo definen Strauss y Corbin (2016).

De tal modo que, en primera medida se procura identificar y generar las categorías y propiedades que representan factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero, para posteriormente establecer relaciones entre dichas categorías y las subcategorías que puedan emerger a partir de ellas y, luego, dar paso al refinamiento e integración de la teoría, como fin de la teoría fundamentada.

Para llegar a la consolidación de la teoría, proceso que demanda tiempo, tal como lo afirman Strauss y Corbin (2016), se requiere de la interacción entre los datos y el analista que incluye “la evolución del pensamiento que ocurre con el tiempo gracias a la inmersión en los datos” (p. 158), haciendo referencia al investigador y su arduo trabajo.

Es posible que al inicio no sea tan fácil identificar y reconocer los datos, sus categorías y subcategorías, por lo que se sugiere entonces que la inmersión en ellos y las relaciones que se puedan establecer partiendo de sus potenciales regularidades, en un contexto cercano como se ha descrito, lo cual favorece los procesos de codificación en sus diferentes niveles, para así llegar a la integración de la teoría.

Se hace referencia igualmente a que el investigador, o analista, “reduce datos de muchos casos a conceptos y los convierte en conjuntos de afirmaciones de relación que pueden usarse para explicar, en un sentido general, lo que ocurre” (p. 159), de tal forma que, para el presente estudio, se requiere tener claridad frente a lo que pueda ser o no una dificultad en el aprendizaje de las matemáticas. Para ello será necesario contrastar los datos a través de varias fuentes, no limitarse a una sola, y a partir de ellas generar esos conceptos o relaciones que lleven al establecimiento de categorías que permitan continuar con el proceso.

Para determinar los datos, se contempla enfrentar a los estudiantes, foco de la investigación, al desarrollo de una guía física, en relación con el conocimiento matemático previamente seleccionado e identificado -número entero-. Posteriormente se contrastan las respuestas que se obtengan por parte de ellos en una entrevista semiestructurada, a fin de que se les permita verbalizar lo que puedan sentir, saber o pensar en la solución de la primera guía. Lo anterior es necesario con la intensión de permitirse ir más allá de las respuestas y comprender qué condiciones, características o procesos se esconden tras ellas, en un análisis más profundo de las mismas.

Al pensar en la manera de relacionar categorías y subcategorías, Strauss y Corbin (2016) sostienen que “no hay solo una manera correcta de expresar las relaciones. El elemento esencial es que se interrelacionen las categorías para formar un esquema teórico más amplio” (p. 160), teniendo en cuenta así una característica del enfoque cualitativo dentro de la investigación, correspondiente a la flexibilidad, dado que en la búsqueda de dichas relaciones es factible que vayan surgiendo nuevas, o se modifiquen las ya existentes, y esto implique adaptaciones dentro del esquema. En este punto, con la intención de refinar las categorías, como ya se expuso, debe atenderse a dicha flexibilidad, aún siendo rigurosos y sistemáticos, para lograr la integración de la teoría.

En ese proceso de generar teoría Hernández, Fernández y Baptista (2010) recomiendan que el investigador se cuestione frente a: "¿Qué clase de datos estamos encontrando? ¿Qué nos indican los datos y elementos emergentes? (categorías) ¿Qué proceso o fenómeno está ocurriendo? ¿Qué teoría e hipótesis están resultando? ¿Por qué emergen estas categorías, vinculaciones y esquemas?" (p. 497), por lo que convendría dar respuesta a dichos cuestionamientos en el proceso de codificación e integración de los datos en teoría, en el ejercicio de refinamiento que se debe establecer.

Para lograr tal integración de los datos en teoría, el primer paso consiste en la determinación de la categoría central (Strauss y Corbin, 2016), la cual se convierte en la representación del tema principal de la investigación, que para el presente estudio corresponde a factores asociados a dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, concretamente del número entero. Entre las técnicas para facilitar tanto la identificación de la categoría central como la integración de los datos, Strauss y Corbin (2016) sugieren algunas, como el relatar la historia, el uso de diagramas y la revisión y clasificación de memorandos a mano o a través de software especializados, como sería el caso de Atlas.ti.

Teniendo presente que, de acuerdo con Strauss y Corbin (2016), "la idea central debe encajar con los datos" (p. 164), haciendo referencia a la categoría central, ella debe retomarse para volver al ejercicio escritural, pero esta vez haciendo uso y en relación con las categorías existentes.

En este sentido, el uso de diagramas resulta llamativo, incluso los autores destacan su utilidad, puesto que “pueden ser herramientas integradoras valiosas” (p. 167), permitiéndole al investigador apartarse de los datos, ya que “ lo fuerza a trabajar con conceptos y no con los detalles de los datos.

También le exige pensar con mucho cuidado sobre la lógica en las relaciones porque si éstas no están claras, los diagramas serán confusos y enredados” (p. 168). El hacerse la integración a través de diagramas permite y favorece, en correspondencia a lo enunciado, la identificación de las relaciones entre las categorías y con ello la integración de los datos, por la visualización misma del proceso y cada uno de los elementos que se puedan tener en cuenta y plasmar en ellos. “Los diagramas deben fluir, con aparente lógica y sin demasiadas explicaciones” (p. 168)

En este sentido, el diagrama seleccionado debe hacer evidentes las relaciones entre los conceptos abordados, favoreciendo su reconocimiento y comprensión y al mismo tiempo la generación de teoría, al considerarse como “mecanismos que dibujan las relaciones entre conceptos” (Strauss y Corbin, 2016, pág. 237), y los cuales evolucionan al hacerse más complejos, claros y precisos en la medida que la investigación avanza.

Existen diversos diagramas que podrían emplearse con la intención de establecer y visualizar relaciones entre conceptos y categorías, esto dependiendo del propósito de la investigación. Así, el diagrama de red se identifica como apropiado en el objetivo de reconocer factores asociados a posibles dificultades en el aprendizaje del número entero. dado que se reconoce su presencia, pero se pretende establecer posibles relaciones entre lo que se esconde tras ellas, las cuales se pueden construir con ayuda del computador.

Este diagrama permite establecer relaciones entre conceptos, enunciados o hechos que se convierten en la explicación de un comportamiento, un proceso, etc., partiendo de un tema central, definido como el objeto de estudio para este caso y las ideas derivadas, entendidas como los conceptos o enunciados relacionados con el concepto central, las cuales corresponderán a factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero. En este orden de ideas, Campos Arenas (2005) señala que es útil para estructurar ideas, para organizar y priorizar información, así como para relacionarla, permitiéndome en este punto una asociación con la propuesta de Claxton (2001), en relación a los recursos internos y externos en el aprendizaje.

Para la elaboración del diagrama de red, se debe partir del concepto central, luego se identifican los conceptos del primer nivel de desagregación, correspondientes a las categorías; luego se deben ubicar alrededor del concepto central y se continúa desagregando cada concepto del primer nivel, continuando con el proceso hasta llegar a un nivel de desagregación aceptable para, finalmente, revisar la coherencia y precisión, sentido en el que se irán configurando relaciones entre categorías y subcategorías.

Por consiguiente, partiendo de la codificación abierta, continuando con la codificación axial y la selectiva, viene el refinamiento de la teoría, proceso que consiste en "revisar el esquema para buscar su consistencia interna y brechas en la lógica, completar las categorías poco desarrolladas, recortar las excedentes y validar el esquema" (Strauss y Corbin, 2016, págs. 171172), de tal forma que el esquema teórico fluya de manera lógica y no presente inconsistencias.

Este refinamiento debe darse durante el proceso, pero especialmente en la escritura final, momento en el que si se identifica que algo no cuadra o no coincide con los demás elementos, será necesario trabajar en ello para lograr la validez de la teoría emergente, en correspondencia también con el esquema consolidado.

3.4. Análisis a partir de la teoría fundamentada

La selección de la teoría fundamentada obedece al propósito de explicar un fenómeno determinado a partir de la creación de teoría, pasando por procesos de codificación que conllevan a la generación de categorías, las cuales en su integración y establecimiento de relaciones conducen a que emerja la teoría, punto en el que el uso de esquemas se identifica como necesario y pertinente, lo anterior teniendo en cuenta que hasta el momento no se han encontrado investigaciones que profundicen en su estudio y comprensión, y más que demostrar teoría, se busca la creación de la misma.

El presente estudio se centró en el análisis de procesos, características, comportamientos, condiciones, que se esconden en estudiantes de grado octavo con posibles dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, concretamente con el número entero, situación que corresponde al fenómeno de estudio, objeto de la investigación.

3.5. Trabajo de campo

En una investigación de corte cualitativo, y partiendo de las metas trazadas, se requiere de la interacción con la población objeto de estudio, que para el presente caso corresponde a estudiantes que cursan el grado octavo de educación básica secundaria. Por lo tanto, el trabajo de campo está centrado en la planeación y ejecución de actividades que posibiliten el reconocimiento y análisis de factores asociados a dificultades en el aprendizaje, cuando ellos se enfrentan al desarrollo de actividad matemática referida al número entero. Dadas las características del método de investigación seleccionado, se identifican y detallan algunos elementos que encaminan este estudio.

3.5.1. Descripción general

De la interacción en ambientes reales en la institución educativa que hace parte del presente estudio, se participó en clases con estudiantes que cursan el grado octavo, en las que la actividad matemática se centró en la verificación de aprendizaje del número entero.

En primera instancia, se identificaron aquellos estudiantes que evidenciaron posibles dificultades en el aprendizaje de los mismos, contrastando respuestas escritas con las que pudieron verbalizar, con el detalle y rigurosidad que se amerita, pues a partir de allí se obtuvieron los datos y se inició el proceso de codificación correspondiente, tal cual se ha descrito en este capítulo.

Una vez observados e identificados estos estudiantes, se procedió con la tarea de reconocer elementos que se esconden tras las evidencias de posibles dificultades, en tanto se permite señalar regularidades, similitudes y diferencias entre ellos, proceso correspondiente a la codificación abierta, posteriormente se establecieron y definieron las relaciones entre los elementos seleccionados que posibilitaron la delimitación de categorías, las cuales agrupan y representan el fenómeno en estudio, tarea de la codificación axial; esto en el ejercicio de reconocer las propiedades y características que conllevaron a la identificación de relaciones entre las mismas. En este punto, es importante tener en cuenta las respuestas que ofrecen los estudiantes, no sólo escritas sino verbales también, en la medida que se les dio la posibilidad de verbalizar los procesos que siguieron para llegar a ellas, además de sus actitudes, gestos o silencios.

Como el propósito fue generar teoría, se hizo necesario validarla a la luz de los datos y los procesos de codificación abierta y axial, dando paso así a la codificación selectiva. En este punto, se requirió del diseño de estrategias que posibilitaron dar esa validez al esquema teórico construido, siendo el diagrama de red para este caso, asumiendo procesos continuos de revisión, análisis e integración de las categorías y subcategorías, conducentes a la refinación de las mismas y de la teoría emergente.

3.5.2. Población y muestra

En el capítulo 1 se realizó la descripción y contextualización del problema de investigación para el presente estudio, señalando que la misma se desarrolló en Jericó, situado en la subregión suroeste del departamento de Antioquia, Colombia. En este municipio se ubica la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Jericó, de carácter público; la mayoría de sus estudiantes residen en el casco urbano y algunas veredas pertenecientes al mismo, una minoría de ellos se desplaza desde pueblos vecinos como lo son Tarso y Pueblorrico, situación que no es ajena a las condiciones del grado octavo. En general, provienen de escuela graduada y del modelo Escuela Nueva, este último para quienes realizaron sus estudios de básica primaria, hasta el grado quinto, en las escuelas del sector rural.

En relación al concepto matemático seleccionado, número entero, se esperaba que los estudiantes estuvieran en la capacidad de resolver y formular problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, justificar procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones, formular y resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, también aquellos cuya solución requiera de la potenciación o radicación (MEN, 2006), por tanto, el diseño de estrategias estuvo encaminado a evidenciar si se ha consolidado el aprendizaje en los estudiantes foco de estudio, o si por el contrario, se encontraban ante posibles dificultades de aprendizaje. Al suceder el último caso, quienes se identificaron en él, hicieron parte de una segunda propuesta con el fin de contrastar y corroborar indicios.

Para determinar si los estudiantes daban muestras de encontrarse ante posibles dificultades en el aprendizaje del número entero, se retomaron aspectos y elementos tratados en el capítulo dos, desde la teoría referida a lo que es el aprendizaje y así mismo dificultades de aprendizaje. Para el desarrollo de este estudio, se contó con los permisos, previa autorización de los padres de familia y/o acudientes, de los estudiantes para participar del mismo, con la posibilidad de tomar diferentes registros, como lo son grabaciones, fotografías, muestras físicas de las producciones, entre otras, asumidas como fuentes de las cuales, a partir del respectivo análisis, se extrajeron los datos, fuente esencial para el proceso de codificación.

Es así como se trabajó inicialmente con 57 participantes, todos pertenecientes al grado octavo, quienes se vieron enfrentados al desarrollo del primer instrumento, luego se tomó como base las respuestas obtenidas para intencionalmente seleccionar una muestra de cuatro de ellos, al identificar características especiales en las respuestas que proporcionaron, lo anterior en razón de establecer factores asociados a posibles dificultades en el aprendizaje del número entero. Para ello, tras la revisión de todas las respuestas, se identificó mayor concentración de "respuestas equivocadas" en los ítems 6 y 7, que hacen referencia a operaciones con números enteros, en los que es relevante el uso de signos. Por lo anterior, se dicidió centrar la atención en los dos ítems mencionados, para continuar con el proceso.

3.5.3. Técnicas para la recolección de la información

Partiendo de los elementos anteriormente señalados, se contempló el uso de dos instrumentos principales que posibilitaron la recolección de los datos. El primero de ellos, corresponde al diseño de una guía – taller, la cual propone a los estudiantes una serie de ejercicios que promueven el desarrollo de actividad matemática, desde el conocimiento del número entero, tal como se ha descrito en los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (MEN, 2006). Teniendo en cuenta las respuestas obtenidas por ellos, se procedió con la identificación de aquellos que muestran dificultades, al basarse en las mismas respuestas, es decir, quienes no lograron responder correctamente, proceso que se siguió a través de las evidencias de aprendizaje descritas en la matriz diseñada para tal fin. Con estos estudiantes, se llevó a cabo una entrevista semiestructurada, buscando que puedieran exponer, de manera verbal, lo sucedido durante su interacción con la guía.

Con estos instrumentos se buscó la identificación de aquellos participantes que dan evidencias de dificultades en el aprendizaje del número entero, para profundizar en ellos a través de sus respuestas, explicaciones, comportamientos. De esa manera, se generaron los datos que tras el proceso de observación y análisis, permitieron explicitar relaciones existentes entre conceptos, categorías y propiedades que pudieron emerger durante la investigación, y para ello se empleó como esquema el diagrama de red (Campos Arenas, 2005), de tal forma que lo comúnmente visible es el hecho de estar relacionados con dificultades en el aprendizaje, pero no se ha profundizado en los factores y condiciones que se esconden tras ellas, buscando así clarificarlos pero además establecer relaciones entre ellos.

3.5.3.1. Instrumento 1: Guía – taller

Para el diseño y elaboración del primer instrumento, se tuvieron en cuenta tanto los EBC como los DBA en matemáticas correspondientes a los grados 6º y 7º de educación básica secundaria ya que, de acuerdo a ellos, son los grados en los que se enfatiza la enseñanza del conocimiento matemático abordado en esta investigación: número entero. La guía está conformada por 8 ítems en total, dentro de los cuales se buscó darles cabida a los cinco procesos matemáticos propuestos desde los EBC en matemáticas (MEN, 2006).

En correspondencia con estas orientaciones se propuso la siguiente matriz, en la que se muestra la relación entre cada uno de los elementos señalados, las evidencias de aprendizaje descritas en los DBA seleccionados y cada uno de los ítems que componen la guía. En los anexos será posible ampliar información sobre el contenido de esta matriz:

Tabla 8. Matriz relación EBC - DBA - Guía taller

EBC	DBA	Evidencias	Items
1 – 5 – 6 – 7 – 8	c) , f)	Localiza, describe y representa la posición de un objeto en un plano cartesiano. Expresa la misma medida con diferentes unidades según el contexto. Representa e interpreta situaciones de ampliación y reducción en contextos diversos.	1
1	a) , d)	Resuelve problemas en los que intervienen cantidades positivas y negativas en procesos de comparación, transformación y representación. Propone y justifica diferentes estrategias para resolver problemas con números enteros, fraccionarios y decimales en contextos escolares y extraescolares. Representa en la recta numérica la posición de un número utilizando diferentes estrategias. Interpreta y justifica cálculos numéricos al solucionar problemas. Describe situaciones en las que los números enteros y racionales y sus operaciones están presentes. Utiliza los signos “positivo” y “negativo” para describir cantidades relativas con números enteros y racionales.	2

6 – 7	a) , e)	Resuelve problemas en los que intervienen cantidades positivas y negativas en procesos de comparación, transformación y representación. Propone y justifica diferentes estrategias para resolver problemas con números enteros, fraccionarios y decimales en contextos escolares y extraescolares. Representa en la recta numérica la posición de un número utilizando diferentes estrategias. Interpreta y justifica cálculos numéricos al solucionar problemas. Representa los números enteros y racionales en una recta numérica. Construye representaciones geométricas y pictóricas para ilustrar relaciones entre cantidades. Describe procedimientos para calcular el valor de una operación (suma, resta, multiplicación y división) entre números enteros y racionales	3
1 – 4	a)	Resuelve problemas en los que intervienen cantidades positivas y negativas en procesos de comparación, transformación y representación. Propone y justifica diferentes estrategias para resolver problemas con números enteros, fraccionarios y decimales en contextos escolares y extraescolares. Representa en la recta numérica la posición de un número utilizando diferentes estrategias. Interpreta y justifica cálculos numéricos al solucionar problemas.	4 y 5
2 – 3	a) , b) , d) , e)	Resuelve problemas en los que intervienen cantidades positivas y negativas en procesos de comparación, transformación y representación. Propone y justifica diferentes estrategias para resolver problemas con números enteros, fraccionarios y decimales en contextos escolares y extraescolares. Representa en la recta numérica la posición de un número utilizando diferentes estrategias. Interpreta y justifica cálculos numéricos al solucionar problemas. Propone y utiliza diferentes procedimientos para realizar operaciones con números enteros, fraccionarios y decimales. Describe situaciones en las que los números enteros y racionales y sus operaciones están presentes. Utiliza los signos “positivo” y “negativo” para describir cantidades relativas con números enteros y racionales. Representa los números enteros y racionales en una recta numérica. Construye representaciones geométricas y pictóricas para ilustrar relaciones entre cantidades. Describe procedimientos para calcular el valor de una operación (suma, resta, multiplicación y división) entre números enteros y racionales.	6 y 7

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8	a) , b) , c) , d) , e) , f)	Resuelve problemas en los que intervienen cantidades positivas y negativas en procesos de comparación, transformación y representación. Propone y justifica diferentes estrategias para resolver problemas con números enteros, fraccionarios y decimales en contextos escolares y extraescolares. Representa en la recta numérica la posición de un número utilizando diferentes estrategias. Interpreta y justifica cálculos numéricos al solucionar problemas. Propone y utiliza diferentes procedimientos para realizar operaciones con números enteros, fraccionarios y decimales. Localiza, describe y representa la posición de un objeto en un plano cartesiano. Describe situaciones en las que los números enteros y racionales y sus operaciones están presentes. Utiliza los signos “positivo” y “negativo” para describir cantidades relativas con números enteros y racionales. Representa los números enteros y racionales en una recta numérica. Construye representaciones geométricas y pictóricas para ilustrar relaciones entre cantidades. Describe procedimientos para calcular el valor de una operación (suma, resta, multiplicación y división) entre números enteros y racionales. Expresa la misma medida con diferentes unidades según el contexto. Representa e interpreta situaciones de ampliación y reducción en contextos diversos.	8

Fuente: Elaboración propia, *EBC (2006), DBA (2016)*

Tomando la anterior matriz como base, se realizó un análisis respecto a los aprendizajes priorizados en el instrumento, teniendo en cuenta que se seleccionaron aquellas respuestas con indicios frente a posibles dificultades, momento en el que se tomaron las evidencias correspondientes a cada aprendizaje, ya que al no cumplirse con ellas se entendió, dentro del presente estudio, como una posible dificultad asociada al aprendizaje del número entero. De esta forma, una vez se seleccionaron las respuestas, se procedió a la aplicación del instrumento dos, una entrevista semiestructurada, con la que se logró interactuar de manera directa con los participantes.

3.5.3.2. Instrumento 2: Entrevista semiestructurada

Para la construcción de este instrumento, se partió de la necesidad de profundizar y conocer un poco más de las respuestas obtenidas con anterioridad de los participantes del proceso, para identificar el por qué de ellas como factores asociados a posibles dificultades relacionadas con el aprendizaje del número entero. Teniendo en cuenta el fin anterior, se esbozaron diez preguntas con las que se buscó obtener información conducente a una posterior categorización.

Se eligió este tipo de entrevista por su correspondencia con la investigación cualitativa, de acuerdo con Trindade (2016) la entrevista se distingue "por ser un proceso comunicativo que se da en un encuentro entre sujetos, previamente negociado y planificado" (pág. 19). Además, señala que debe procurarse, por parte de quien entrevista, generar un ambiente de confianza en el que la relación con el entrevistado posibilite la obtención de la información deseada, de tal manera que no se vea como un interrogatorio. Así mismo, Hernández, Fernández y Baptista (2010) la destacan como uno de los principales métodos para obtener datos cualitativos y, en este tipo de entrevista en especial, señalan la posibilidad de que el entrevistador incluya preguntas adicionales para precisar u obtener más información.

Para el caso concreto del presente estudio, de antemano se ha determinado el tipo de información que se espera obtener sin que ello implique una camisa de fuerza para el ejercicio, es decir, quedó abierta la posibilidad que durante la conversación surjieran otras preguntas que puedieran complementar o reforzar las respuestas iniciales. Los datos que se obtuvieron fueron analizados, como se ha propuesto y descrito en los capítulos anteriores, previa identificación de posibles dificultades en el aprendizaje del número entero, para establecer relaciones y llegar al establecimiento de categorías, sentido en el que Hernández, Fernández y Baptista (2010) recomiendan, en esta tarea, la ayuda de software, entre otros, como Atlas.ti, reconociendo que "el análisis cualitativo es iterativo y recurrente" (pág. 406).

3.6. Atlas.ti

Atlas.ti es una herramienta de uso tecnológico y técnico creada con el objetivo de apoyar la organización, el análisis e interpretación de información en investigaciones cualitativas, permitiendo el trabajo y organización de grandes cantidades de información en una variedad de formatos digitales, además de favorecer la comparación, optimizando de esa forma los tiempos en la investigación y mejorar el aprovechamiento de la información en el tratamiento de los datos.

Figura 21. Software Atlas.ti

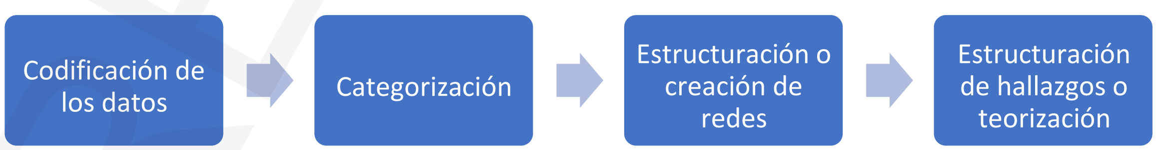
Fuente: Imagen tomada de

https://doc.atlasti.com/QuicktourMac.v22/Intro/IntroductionLicenceActivation.html

Este software posibilita la segmentación de datos en unidades de significado, la codificación de los datos y la construcción de teoría (relacionar conceptos y categorías), tal como lo plantean Hernández, Fernández y Baptista (2010), y que para la teoría fundamentada corresponden a los tres procesos de codificación (abierta, axial y selectiva). Atlas.ti dispone diversas herramientas para efectuar tareas asociadas con enfoques sistemáticos para datos no estructurados, es decir, datos que no se pueden analizar de manera significativa mediante enfoques estadísticos formales, ayuda en la exploración de los complejos fenómenos ocultos en sus datos, para lo cual ofrece herramientas para gestionar, extraer, comparar, explorar y volver a montar piezas significativas a partir de grandes cantidades de datos de forma creativa, flexible pero sistemática.

Varguillas (2006) comparte, en primera instancia, la siguiente recomendación metodológica para quien realiza investigación cualitativa: "uso del programa computacional Atlas.ti como herramienta de apoyo al proceso de análisis" (pág. 75), dado que puede trabajar con diversas fuentes de información, desde textos, observaciones, audios, entre otros. De esa manera, describe el programa en la medida que el proceso implica cuatro etapas, las cuales se relacionan con el apartado de teoría fundamentada y los procesos de codificación, a saber:

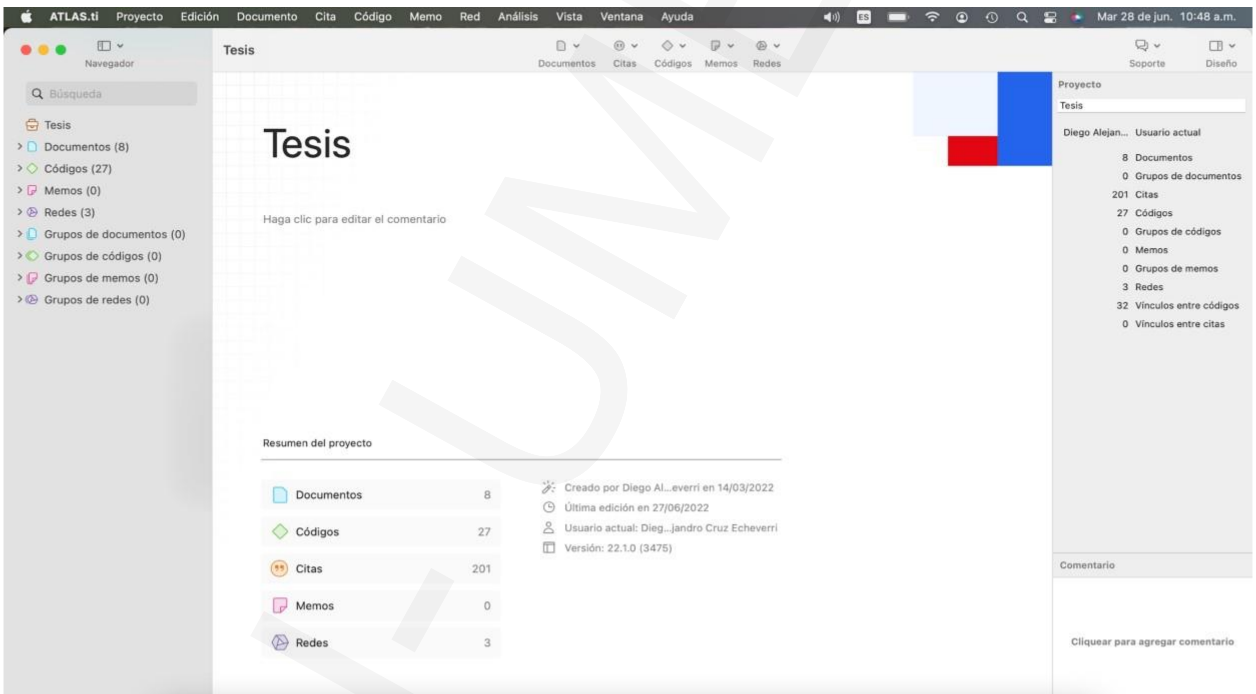
Figura 22. Etapas codificación con Atlas.ti



Fuente: Elaboración propia. (Varguillas, 2006, pág. 76)

En este caso, se ha adquirido una licencia del software para estudiante que corresponde a su versión 22, para procurar el uso de las funciones que ofrece para el tratamiento de datos cualitativos. Como se muestra a continuación, la configuración del software es amplia, debiendo iniciar el proceso con el ingreso de los documentos que servirán de soporte para la codificación:

Figura 23. Entorno Atlas.ti



Fuente: Tomado de Atlas.ti

Por su parte, San Martin (2014) establece vínculos entre la teoría fundamentada y el uso de Atlas.ti, para ello, considera conveniente "recordar el principio de los métodos interpretativos, el cual plantea que un investigador no comienza su trabajo con una teoría preconcebida, excepto si quiere desarrollar una ya existente" (pág. 113), de manera que, los conceptos e hipótesis deben elaborarse a partir de los datos. Una vez ingresados los documentos, fuente de los datos, se procede con la selección de las citas y la asignación de códigos o palabras que las definan. El software irá relacionando estos códigos para así ir conformando categorías y al mismo tiempo creando redes, tal como lo señala Varguillas (2006).

San Martin (2014) considera este software como el principal soporte informático para desarrollar teoría fundamentada, entre otras razones, porque favorece la identificación de los códigos que requieran saturación, a través de sus funciones tanto para cada código como categoría, orientado hacia la conceptualización, en el que “cada paso de la codificación teórica (codificación abierta, axial y selectiva) tiene un espacio en el programa” (pág. 114). La primera de ellas, codificación abierta, se da con la asignación de códigos a citas, en los formatos posibles, mientras que la codificación axial surge con la creación de redes de relaciones conceptuales y, para la tercera, Atlas.ti dispone de funciones que permiten establecer una categoría central, momento en el que se integran los códigos y categorías establecidos para tal fin. En la siguiente tabla, el autor expone la relación entre el software y el método utilizado:

Tabla 9. Correspondencia entre funciones de Atlas.ti y procedimientos de la teoría fundamentada

Funciones	Descripción	Presentación en la TF
Unidad Hermenéutica	Contenedor electrónico que alberga y organiza todos los datos, códigos, memorandos y diagramas pertenecientes al análisis	En la TF esta opción permite abordar el caso en estudio desde distintas fuentes documentales.
Documentos primarios	Fuentes de datos representadas en textos, fotografías, audio, video, etc.	En la codificación abierta, cada documento primario se muestra y recorre en la pantalla. Se señalan los trozos pertinentes y se les asignan códigos y memorandos.
Citas	Segmentos significativos que contienen el fenómeno que se estudia	Los testimonios contienen las relaciones que los participantes realizan respecto del tema de investigación. Permite fundamentar la construcción teórica en las evidencias textuales.
Código	Expresión descriptiva del fenómeno que se estudia	El código representa el nivel conceptual que permite la emergencia de categorías y subcategorías.
Anotaciones	Comentarios teóricos, metodológicos o empíricos que surgen a partir de análisis de los datos	Registros escritos especializados que contienen ideas analíticas y conceptuales más que descripciones detalladas.
Familias	Son categorías de códigos que expresan un nivel conceptual del fenómeno en estudio.	Conceptos abstractos que agrupan códigos descriptivos de acuerdo a sus propiedades y dimensiones.
Link (relación)	Representan conectores que sintetizan las relaciones entre códigos, categorías o subcategorías.	Los vínculos permiten explicitar las conexiones sutiles que emergen entre códigos y categorías. También facilitan la integración de la teoría en los datos.
Network (red)	Redes que grafican las relaciones entre códigos y categorías, expresan: condiciones, contextos y dimensiones en que ocurre el fenómeno.	Los diagramas son visuales más que escritos, dibujan las relaciones entre los conceptos. Representan la organización de ideas analíticas.

Fuente: Tomado de San Martin Cantero, 2014, pág. 115.

Por lo anteriormente expuesto, dados los aportes de los diferentes autores citados y por las características de este estudio, teniendo en cuenta que la teoría fundamentada emplea diversos procesos de codificación, se considera y asume el uso del Atlas.ti como un apoyo relevante en la tarea de establecer relaciones entre los datos y llegar a categorizar dificultades en el aprendizaje del número entero según sean los factores que se le asocien.

3.7. Consideraciones éticas

Con el desarrollo de la presente investigación, y teniendo presente que se contará con la participación de estudiantes del grado 8º de educación básica secundaria, es necesario definir y asumir medidas éticas para el beneficio de ambas partes, participantes e investigador, como lo es asegurar la confidencialidad de su información, tanto durante el proceso como con la publicación de los resultados, y aún posterior a ello. Además, por la situación mundial que se vive a causa de la pandemia, generada por el Covid-19, se requiere también el garantizar normas de bioseguridad que puedan contrarrestar un posible contagio, lo anterior por la cercanía física que se pueda dar entre el investigador y los participantes, y atendiendo a las orientaciones que constantemente está ofreciendo el Ministerio de Salud colombiano y la Organización Mundial de Salud, buscando así la menor afectación posible durante la recolección y tratamiento de los datos.

Así mismo, reconociendo que los estudiantes son menores de edad, previa aceptación voluntaria por parte de ellos para participar de la investigación, se requiere del debido permiso informado de los padres o acudientes quienes, como sus representantes legales, autorizarán su participación. En esta medida y por el carácter voluntario, se les aclara que dicha participación no implica contraprestación alguna ni tendrá influencia, positiva o negativa, dentro de los procesos que normalmente desarrollan dentro y fuera de la institución.

Este capítulo, además de brindar los planteamientos metodológicos del proceso investigativo, se consolida como una alternativa para continuar y profundizar en estudios de similares características, con los cuales se busque ahondar en la comprensión de dificultades de aprendizaje asociadas a conceptos matemáticos, utilizando la teoría fundamentada y el Atlas.ti para el análisis de datos, aspectos que, para este estudio, se retoman en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO IV. ANÁLISIS

4. Análisis e interpretación de los resultados

Para esta investigación, el análisis ocupa un lugar predominante, en tanto que, se busca encontrar y determinar conexiones entre posibles dificultades asociadas al aprendizaje del número entero con factores asociados a ellas, convirtiéndose así en un proceso continuo de principio a fin y que busca dar cumplimiento a los objetivos trazados, responder a la pregunta formulada y al mismo tiempo dar validez a los resultados obtenidos.

Dado que la investigación se aborda a partir de la teoría fundamentada de Strauss y Corbin (2016), es importante resaltar desde esta perspectiva que "los computadores son absolutamente incapaces de comprender el significado de las palabras u oraciones. Su fortaleza se deriva de su capacidad de ayudar en todo tipo de tareas de ordenamiento, estructuración, recuperación y visualización." (pág. 299), por tal motivo, para fortalecer el proceso de análisis se emplea como apoyo el software Atlas.ti, ya que se considera la utilidad de este sin que ello implique que todo el trabajo dependa de él, pues es allí donde está el papel del investigador. Precisamente se hace énfasis en lo útil que puede ser al momento de realizar el análisis correspondiente a partir del tratamiento de los datos, pues como estos autores también lo mencionan, "un buen programa puede ser extremadamente útil para crear orden a partir de una pila de notas de campo […]; para visualizar la red de conceptos y relaciones en la teoría que va emergiendo" (pág. 299), en correspondencia con el método y la herramienta utilizada, como ya se ha descrito antes.

Identificar posibles dificultades relacionadas con el aprendizaje del número entero en estudiantes de octavo grado, en un ambiente cotidiano para ellos, se convierte en el primer paso para llegar a establecer relaciones entre ellas y factores asociados a las mismas. Para este caso, es de anotar que, si bien el proceso de aprendizaje puede diferir de una persona a otra, por lo que no se podría generalizar o disponer reglas, lo que se busca es identificar y establecer regularidades que faciliten su reconocimiento dentro del aula, situación que pretende brindar una mayor posibilidad de atención por parte del docente, contemplando la factibilidad de retomar los resultados obtenidos para el desarrollo de futuras investigaciones. Durante el proceso de descripción y análisis, se presentarán algunas imágenes tomadas de las respuestas proporcionadas por los participantes, a fin de mostrar el proceso de análisis realizado a partir de los datos.

4.1. Recolección de los datos

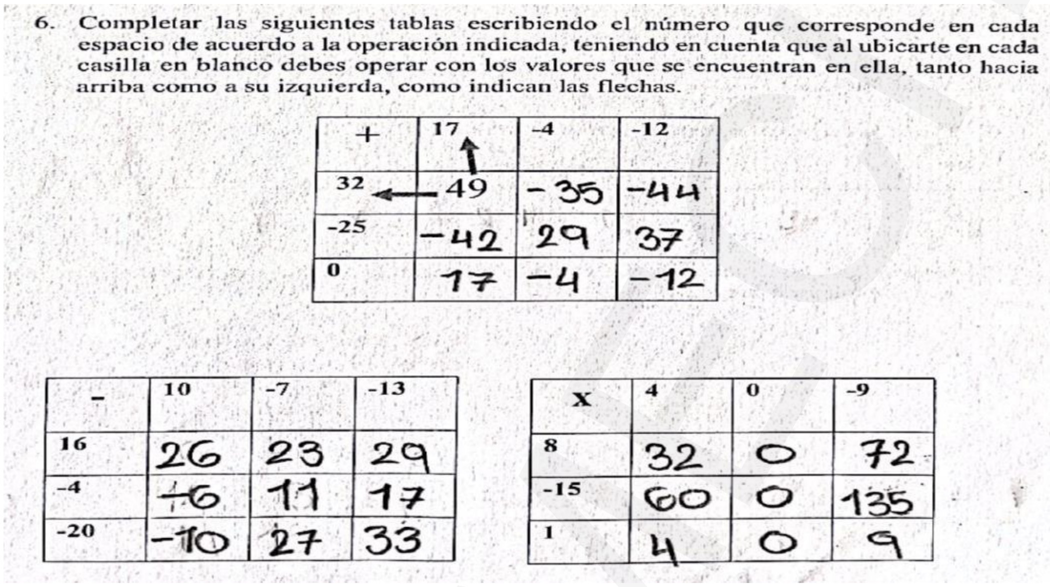
La recopilación de los datos para el desarrollo del presente estudio, tal como se planteó en el capítulo anterior, se dio en la institución educativa de la cual forman parte los estudiantes, un ambiente natural y cotidiano para ellos tal como lo proponen Hernández, Fernández y Baptista (2010). Inicialmente, previo diálogo y concertación con los participantes, se procede con la aplicación del primer instrumento (guía taller), a partir del cual se obtienen algunas evidencias de aprendizaje respecto al conocimiento matemático del número entero, de acuerdo a lo planteado en la matriz diseñada para tal fin pero, así mismo, ante la no presencia de dichas evidencias se identifican posibles dificultades asociadas al aprendizaje de él, de esta manera se selecciona una muestra en virtud de las características de las respuestas y, partiendo del propósito de esta investigación, se procede con el proceso de codificación y análisis.

Para esta investigación, los datos corresponden inicialmente a las respuestas que dan indicios de posibles dificultades y que fueron obtenidas luego de la aplicación del primer instrumento a partir del desarrollo de actividad matemática en torno al número entero. Posterior a ello, las respuestas a las preguntas planteadas en la entrevista semiestructurada se suman al cuerpo de los datos, los cuales serán tratados a través de Atlas.ti en los diferentes procesos de codificación. A continuación, se presenta el tratamiento de los datos a partir de los instrumentos implementados.

4.2. Respuestas escritas proporcionadas por los participantes

Partiendo de las respuestas de la guía taller suministradas por los estudiantes, se observan indicios conducentes a la posible presencia de dificultades asociadas al aprendizaje del número entero. Se presentan a continuación algunas de esas respuestas, sobre las cuales se hará énfasis en su análisis para la identificación de factores asociados a ellas:

Figura 24. Respuestas instrumento 1, ítem 6



6. Completar las siguientes tablas escribiendo el número que corresponde en cada espacio de acuerdo a la operación indicada, teniendo en cuenta que al ubicarte en cada casilla en blanco debes operar con los valores que se encuentran en ella, tanto hacia arriba como a su izquierda, como indican las flechas.

+	17	-4	-12
32	49	-35	-44
-25	-42	29	37
0	17	-4	-12

-	10	-7	-13
16	26	23	29
-4	-6	11	17
-20	-10	27	33

x	4	0	-9
8	32	0	72
-15	60	0	135
1	4	0	9

Fuente: tomado de instrumento guía taller, respuestas dadas por los participantes

Para este caso, como se indica en el enunciado, la actividad matemática consistía en completar cada uno de los espacios teniendo en cuenta la operación presente (suma, resta o multiplicación) pero, además, atendiendo al concepto de número entero y las implicaciones de los signos (más, menos). Dado que los EBC en matemáticas abordados corresponden al ciclo de los grados 6º y 7º, se esperaría que estuviesen en la capacidad de responder acertadamente mostrando así evidencias de aprendizaje, sin embargo, es posible observar por ejemplo en el primer recuadro correspondiente a la operación suma, que:

$$32 + (-12) = -44$$
$$-25 + 17 = -42$$
$$-25 + (-4) = 29$$
$$-25 + (-12) = 37$$

Las respuestas anteriores son incorrectas pues se observa que, sin importar los signos, en todos los casos realiza operaciones de suma, así como también se puede intuir que desconoce el significado del símbolo menos y las propiedades multiplicativas de los signos. Sin embargo, dadas las condiciones y características de este estudio, será necesario ir un poco más allá de ellas a través del diálogo que se pueda generar por medio de la entrevista semiestructurada, buscando así la identificación del por qué de dichas respuestas, entendida esta como factores asociados dentro de la investigación en desarrollo. Ahora bien, haciendo referencia nuevamente a las respuestas y al retomar la matriz elaborada para su análisis, es posible señalar dificultades en las siguientes evidencias de aprendizaje, siendo viable determinarlo al reconocer su ausencia:

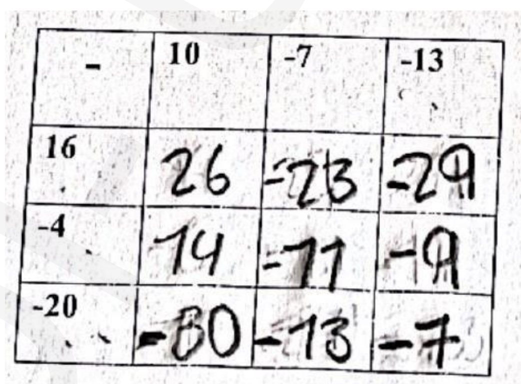
- Resuelve problemas en los que intervienen cantidades positivas y negativas
- Propone y justifica diferentes estrategias para resolver problemas con números enteros
- Interpreta y justifica cálculos numéricos al solucionar problemas.
- Propone y utiliza diferentes procedimientos para realizar operaciones con números enteros
- Describe situaciones en las que los números enteros y sus operaciones están presentes.
- Utiliza los signos “positivo” y “negativo” para describir cantidades relativas con números enteros
- Describe procedimientos para calcular el valor de una operación (suma, resta, multiplicación y división) entre números enteros.

De manera similar, sucede con la resta y multiplicación entre números enteros, con respuestas como las que se transcriben a continuación:

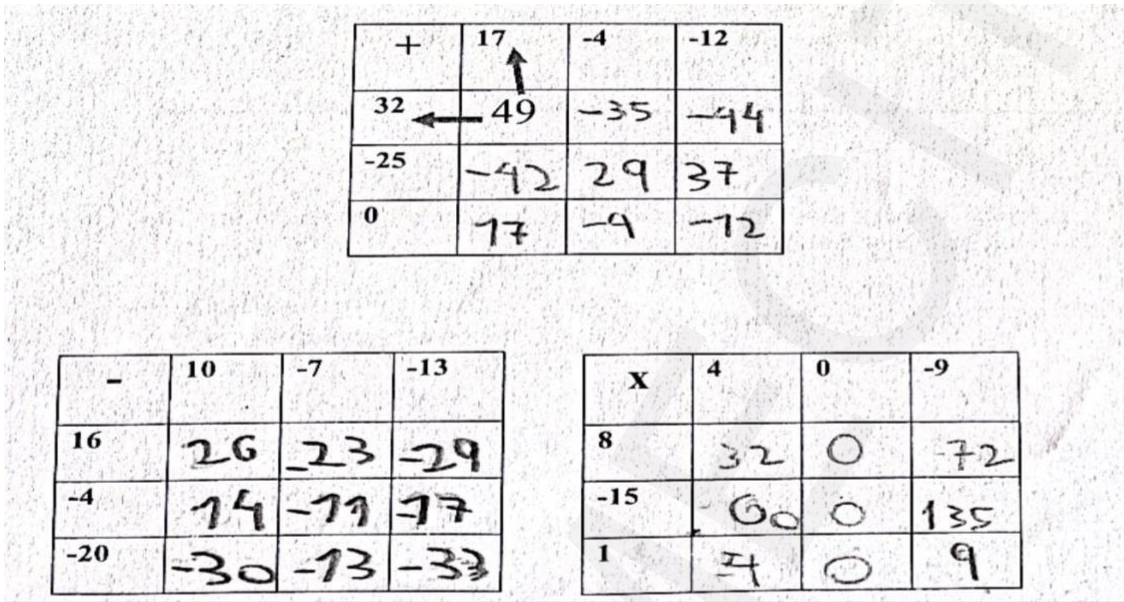
$$16 - 10 = 26$$
$$-4 - 10 = -6$$
$$-4 - (-7) = 11$$
$$-4 - (-13) = 17$$
$$-20 - 10 = -10$$
$$-20 - (-7) = 27$$
$$-20 - (-13) = 33$$
$$8 \times (-9) = 72$$
$$-15 \times 4 = 60$$
$$1 \times (-9) = 9$$

Al igual que en la suma de números enteros, se observa que las respuestas no coinciden con la operación indicada, situación que abre el camino para pensar en posibles dificultades relacionadas al aprendizaje del número entero. De la misma forma, se retoman otras respuestas que, en relación a las anteriores, comparten similitudes:

Figura 25. Respuestas instrumento 1, ítem 6



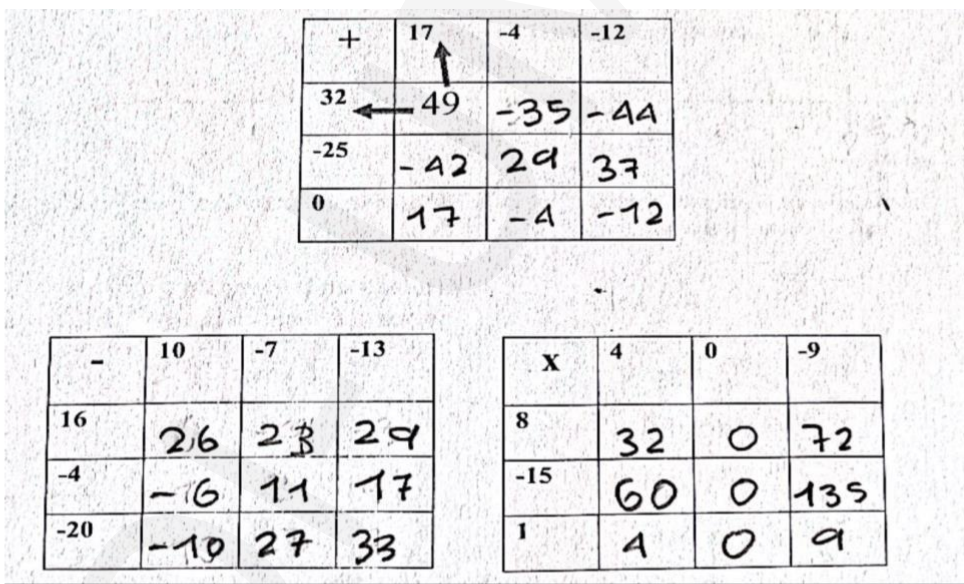
-	10	-7	-13
16	26	-23	-29
-4	14	-11	-19
-20	-30	-13	-7



+	17	-4	-12
32	49	-35	-44
-25	-42	29	37
0	17	-4	-12

-	10	-7	-13
16	26	_23	-29
-4	14	-11	17
-20	-30	-13	-33

X	4	0	-9
8	32	0	72
-15	60	0	135
1	4	0	9



+	17	-4	-12
32	49	-35	-44
-25	-42	29	37
0	17	-4	-12

-	10	-7	-13
16	26	23	29
-4	-6	11	17
-20	-10	27	33

X	4	0	-9
8	32	0	72
-15	60	0	135
1	4	0	9

Fuente: tomado de instrumento guía taller, respuestas dadas por los participantes

En el caso de la división entre números enteros, nuevamente se observan dificultades frente al tratamiento de los signos, como se muestra seguidamente, aún cuando con el instrumento se les proporcionó información referente a las cuatro operaciones básicas, abordadas en la guía taller y que se esperaba pudiesen utilizar para facilitar el desarrollo de la misma:

Figura 26. Respuestas instrumento 1, punto 7

7. Resolver teniendo en cuenta la ley de signos para la división:

a) $(-60) \div (+5) =$ -12
b) $(+10) \div (2) =$ 5
c) $(32) \div (-4) =$ 8
d) $(-48) \div (-8) =$ -6
e) $(-60) \div (+5) =$ -12
f) $(144) \div (-12) =$ 12
g) $(-7 + 9) \div (2) =$ -8.

Fuente: tomado de instrumento guía taller, respuestas dadas por los participantes

Figura 27. Respuestas instrumento 1, punto 7

7. Resolver teniendo en cuenta la ley de signos para la división:

a) $(-60) \div (+5) =$ -12
b) $(+10) \div (2) =$ +5
c) $(32) \div (-4) =$ +8
d) $(-48) \div (-8) =$ -6
e) $(-60) \div (+5) =$ -12
f) $(144) \div (-12) =$ +12
g) $(-7 + 9) \div (2) =$ -1

7. Resolver teniendo en cuenta la ley de signos para la división:

a) $(-60) \div (+5) =$ -12
b) $(+10) \div (2) =$ 5
c) $(32) \div (-4) =$ 8
d) $(-48) \div (-8) =$ -6
e) $(-60) \div (+5) =$ -12
f) $(144) \div (-12) =$ 12
g) $(-7 + 9) \div (2) =$ -8

7. Resolver teniendo en cuenta la ley de signos para la división:

a) $(-60) \div (+5) =$ - 12
b) $(+10) \div (2) =$ 5
c) $(32) \div (-4) =$ 8
d) $(-48) \div (-8) =$ - 6
e) $(-60) \div (+5) =$ - 12
f) $(144) \div (-12) =$ 12
g) $(-7 + 9) \div (2) =$ - 8

Fuente: tomado de instrumento guía taller, respuestas dadas por los participantes

Se aprecia en las respuestas inconsistencias, como se ha descrito antes, en el uso de los signos tanto para la estructura aditiva como en la estructura multiplicativa, situación que se ratifica con casos como el literal g) del punto 7, $(-7+9) \div (2) = -8$ o $(-7+9) \div (2) = -1$, en los que se continúa el análisis a partir de las preguntas formuladas en la entrevista semiestructurada, buscando así profundizar frente a lo que se esconde tras dichas respuestas, tratando de comprender dicho fenómeno.

4.3. Ir más allá de respuestas escritas

Una vez implementado el instrumento 1 y luego de revisar y seleccionar aquellas respuestas que dan indicios de dificultades asociadas al aprendizaje del número entero, se procede de igual manera con la invitación a cada uno de los participantes elegidos para llevar a cabo el proceso de diálogo, orientado por la propuesta de entrevista semiestructurada y contando además con la debida autorización de sus padres ya que, siendo menores de edad, es necesario dicho permiso para poder realizar las grabaciones y así mismo para el tratamiento de su información. De esta manera, el espacio seleccionado para tal fin sigue siendo el colegio, como ambiente natural y cotidiano para ellos, según lo planteado por Hernández, Fernández y Baptista (2010).

Dado su propósito, se lleva a cabo el encuentro con cada uno de los participantes previamente seleccionados, procurando no intimidarlos ni generar inconvenientes en ellos con la dinámica propuesta, sino más bien tratar de hacerlo de la mejor forma posible en un ambiente en el que se sientan cómodos y que puedan expresar sin temor lo que deseen, en concordancia a las preguntas planteadas y las que vayan surgiendo en medio de la conversación. En este sentido, se hace claridad respecto a que no habrá respuestas correctas o incorrectas, el ejercicio consiste precisamente en tener la posibilidad de, a partir de sus respuestas iniciales en el instrumento anterior, ir un poco más allá para conocer el por qué de ellas, que lo puedan exponer y verbalizar con total confianza.

En este proceso es posible apreciar que, en general, se asocia el número entero con pérdidas y ganancias, pero no se evidencia claridad frente a la apropiación del concepto matemático abordado, en situaciones como las siguientes:

<u>Entrevistado 1:</u>

Entrevistador: ¿Sabes para qué te pueden servir los números enteros en la vida real, en la vida cotidiana?

Entrevistado: (Silencio) No me he preguntado eso

Entrevistador: ¿Pero si sabes qué son los números enteros? Podrías decirme así, como lo entiendes, ¿qué son los números enteros para ti?

Entrevistado: (Silencio)

Entrevistador: Si no recuerdas o no sabes qué decir, no hay problema

Entrevistado: No, no sé qué decir.

Entrevistador: No sabes qué decir, listo, no hay problema.

<u>Entrevistado 2:</u>

Entrevistador: ¿Sabes para qué te pueden servir los números enteros en la vida cotidiana, en la vida real?

Entrevistado: Pues… yo diría que, para muchas cosas, pero esas muchas cosas no las sabría decir.

Entrevistador: Dice mucho y no dice mucho tampoco. Pero, si sabes qué son los números enteros

Entrevistado: Si

Entrevistador: Si te pidiera en este momento una definición de número entero, ¿qué dirías?

Entrevistado: (Risa) Pues como explicarlo difícil, porque yo para eso soy como malo.

Entrevistador: Sin importar que lo vayas a hacer bien o que lo vayas a hacer mal, qué dirías que es un número entero.

Entrevistado: Es que yo como para explicar no soy bueno, pero por ejemplo yo retomo muy bien las cosas, sino que yo no soy para explicar.

Entrevistador: Pero, dirías que si lo tienes claro para ti

Entrevistado: Si

<u>Entrevistado 3:</u>

Entrevistador: ¿Sabes para qué te pueden servir los números enteros en la vida cotidiana?

Entrevistado: Pues, puede ser para las deudas, para aumentar cosas…

Entrevistador: Tranquila, piensa. ¿Tienes claro qué son los números enteros?

Entrevistado: Si

Entrevistador: ¿Cómo definirías tú números enteros? ¿qué son?

Entrevistado: En dinero, en que más puede ser, en los días. Digamos que los números enteros están presentes en todo, entonces, pues si, para mí los números enteros qué serían, en la vida cotidiana

Entrevistador: piensa, piensa tranquila

Entrevistado: Me puedes repetir por favor la pregunta

Entrevistador: Si, ¿sabes para qué te pueden servir los números enteros en tu vida cotidiana? Es decir, en tu vida real, en el día a día

Entrevistado: Para resolver problemas, para que más… Entrevistador:

¿Qué tipo de problemas?

Entrevistado: Por ejemplo, que uno tiene que pagar algo, o que tiene una deuda o algo así por el estilo, entonces si, para eso también podría ser para… para qué mas… No ya

<u>Entrevistado 4:</u>

Entrevistador: ¿Sabes para qué te pueden servir los números enteros en la vida cotidiana?

Entrevistado: Para calcular que, plata, algún día si voy a entrar en un trabajo no trocarme con plata o algo así.

Entrevistador: ¿Qué es un número entero?

Entrevistado: Ay profe, usted me va a preguntar a mi

Entrevistador: Es decir, no, qué recuerdas, qué entiendes en este momento por número entero

Entrevistado: A ver, como ya estamos con otra cosa, entonces a ver yo me acuerdo porque… ósea, número entero no es que más o menos, algo así, entonces a veces también depende del clima, las horas que uno, ósea que maneja en el automóvil, no sé qué más, kilos de café, eso mis familias emplean eso en los kilos de café o algo así.

Se consideran por medio de las respuestas, manifestaciones de dudas en lo que verbalizan y así mismo, con los silencios que se hacen presentes por momentos, hechos que se interpretan como expresiones de dificultades en la comprensión y claridad frente al concepto de número entero y que, como tal, ejerce influencia en la realización de actividad matemática que le involucra. Inicialmente, los participantes asumen que les va bien en matemáticas, esto según lo expresan ellos mismos; durante el diálogo previsto, reconocen la presencia tanto de agentes externos como internos en sus procesos de aprendizaje para el caso concreto frente al número entero, entre ellos la falta de atención y el papel que desempeña el maestro. A continuación, se describen otros momentos de la entrevista:

Entrevistado 1:

Entrevistador: ¿Y entonces por qué no revisaste o te cercioraste de esa respuesta en ese momento?

Entrevistado: Porque la verdad estábamos muy cogidos de tiempo, y por intentar hacerlo a las carreras, así nos salió.

Entrevistador: ¿Por qué crees que cometiste algunos errores al responder las preguntas? ¿A qué se debe?

Entrevistado: Algunos errores los cometí a falta de que algunos fueron por el tiempo, otras fueron porque no presté la demasiada atención

Entrevistador: Si

Entrevistado: Otras, como ya le dije, me dejé llevar.

Entrevistado 2:

Entrevistador: ¿Qué concepto tienes de las clases de matemáticas?

Entrevistado: Pues yo diría que eso depende también del profesor

Entrevistador: Si, claro

Entrevistado: Porque por ejemplo yo en la primaria, mis matemáticas con la profesora no fueron muy buenas, pues no las notas sino como me la llevaba con ella, porque yo tuve muchos problemas con ella de que ella a mi me ponía malas notas y yo tenía como el taller bueno, lo que hicimos bueno, entonces yo tuve muchos inconvenientes con ella sobre eso. Y el año pasado no, con el profesor estuvo bien.

Entrevistador: Es decir que reconoces que influye mucho el papel del maestro en las clases.

Entrevistado: Si

Entrevistador: ¿Y el papel del estudiante también influye?

Entrevistado: Si, el comportamiento y estar atento.

Entrevistador: ¿Por qué crees que cometes ese error?

Entrevistado: Yo diría que la distracción, uno a veces se distrae y como que no mira bien lo que tiene que resolver y se equivoca.

Entrevistado 3:

Entrevistador: ¿Creerías que tienes alguna dificultad para aprender matemáticas?

Entrevistado: Algunas veces, porque algunas veces como que estoy distraída, si, y por eso no entiendo las cosas. Pero eso me pasa muy de vez en cuando, es poquitas veces que me pasa que no entiendo la matemática.

Entrevistado: Como que nos reímos casi todo el tiempo, y por eso la profesora una vez nos regañó que nos estábamos riendo mucho, y en esos momentos, ya después Isabela una amiguita mía se fue a otro grupo para que no molestáramos tanto

<u>Entrevistado 4:</u>

Entrevistado: Ese día tenía un dolor de cabeza muy maluco, luego nos tocó inglés, tuvimos una riñita con la profesora ese día y ya luego tocó matemáticas.

Entrevistador: ¿Crees que tienes alguna dificultad para aprender matemáticas?

Entrevistado: La concentración, ósea, a veces cuando tengo la mente como muy llena de cosas, muy llena de cosas no me da, como que me desconcentro mucho, entonces como que no le entiendo bien a la profesora, aunque ella me explique y me explique no soy capaz.

Entrevistado: El año pasado estaba muy cansona, entonces yo no le prestaba atención al profesor y me regañaban mucho, eso fue lo que pasó

Entrevistador: La culpa, entre comillas, era tuya

Entrevistado: Si, era mía, porque pues obviamente el profesor explicaba muy bueno

Entrevistador: Si

Entrevistado: Pero yo de cansona, y poniéndome a molestar y a hablar ahí, no le entendía, cómo le iba a entender si no estaba concentrada en lo que me estaban diciendo.

Entrevistador: Entonces a qué crees que se deba esa respuesta

Entrevistado: A mi desconcentración se puede decir, no leí bien y no tomé bien la información.

Entrevistador: Listo, entonces ya de manera general para terminar, te das cuenta que cometiste algunos errores, ¿cierto?

Entrevistado: Si

Entrevistador: Que podrían dar indicios de que hay una dificultad en el aprendizaje, es decir, que no has logrado aprender, o entender, comprender correctamente el concepto de número entero, no queriendo decir que eso esté malo, cierto, porque para eso estamos precisamente. Pero entonces, de manera general, quisiera que me dijeras, cuáles serían las causas, en general, o por qué presentas esas dificultades en este momento

Entrevistado: Porque a veces quiero hacer las cosas como de una tacada, no me tomo mi tiempo para aprenderlas, ósea, ya la última hora, entonces hagamos eso, faltan 10 minutos, y entonces lo hacemos al último a la mano de Dios, no nos tomamos nuestro tiempo, no lo pensamos bien, no lo volvemos a revisar, ni a recalcar, entonces eso es como el contra de nosotros los estudiantes, porque somos el todo en general.

Entrevistador: Listo, y crees entonces que la responsabilidad es sólo tuya o esas dificultades dependen de alguien o de algo más

Entrevistado: No, esas dificultades son solo de uno, ósea, pues, por qué se va uno a apresurar, por qué no se toma el tiempo para revisarlo, para recalcarlo, eso es de uno.

Estos diálogos permiten identificar la importancia de lo planteado por Claxton (2001) en relación a los recursos internos y externos, como parte importante de la facultad de aprender, situación que se puede corroborar en las respuestas ofrecidas por ellos. Es así como podría pensarse en cuáles recursos afectan el proceso de aprendizaje del número entero, que para este caso se identifican aspectos como el tiempo, la atención, la relación con docentes, la disposición para el trabajo, entre otras, elementos que son tomados para definir las propiedades y dimensiones que las pueden constituir en categorías. De esta manera y con la ayuda de Atlas.ti se aborda el proceso de codificación abierta, centrando la atención en las diferentes manifestaciones de las dificultades en las explicaciones dadas por los participantes.

En este orden de ideas y, en la tarea de identificar qué se esconde tras las posibles dificultades en el aprendizaje del número entero vistas en los argumentos recibidos, se reconoce además la dificultad que genera el uso de los números enteros en el desarrollo de operaciones básicas entre los participantes, con lo que se hace alusión al propio concepto y reafirman también los hallazgos registrados en las respuestas escritas, extraídas del primer instrumento. Destaca durante el proceso de análisis, como se ha mencionado, el conflicto que les genera el uso de los signos más y menos en el desarrollo de dichas operaciones, mencionado de manera explícita por ellos cuando, por ejemplo, en lugar de sumar restan o, al contrario, aludiendo que en algunos casos puede deberse al no tener en cuenta dichos signos y que, como se indica, se demuestra en las respuestas señaladas y el análisis realizado en el apartado anterior.

En relación a las clases de matemáticas, en general manifiestan agrado hacia ellas, en lo que incluyen tanto las metodologías como a los profesores que han ocupado ese lugar, sin embargo, son conscientes y reconocen también los inconvenientes que genera la falta de atención frente a las explicaciones y el desarrollo de las actividades asignadas. Ya sobre el caso concreto del número entero, al comparar un entero negativo con el cero coinciden en que este último es menor aduciendo a previas explicaciones del profesor, según lo pueden manifestar; en algunos casos hay claridad frente a lo que se debe hacer, pero no logran hacerlo, evidenciando así confusión al realizar actividad matemática que involucra números enteros.

Lo anterior, describe parte del proceso de análisis inicial realizado para el tratamiento de los datos tomados de ambos instrumentos y la importancia de asociar dichos datos con los componentes teóricos presentados en el capítulo 2. El siguiente apartado, detalla la codificación realizada basada en la teoría fundamentada, método trazado en el capítulo 3.

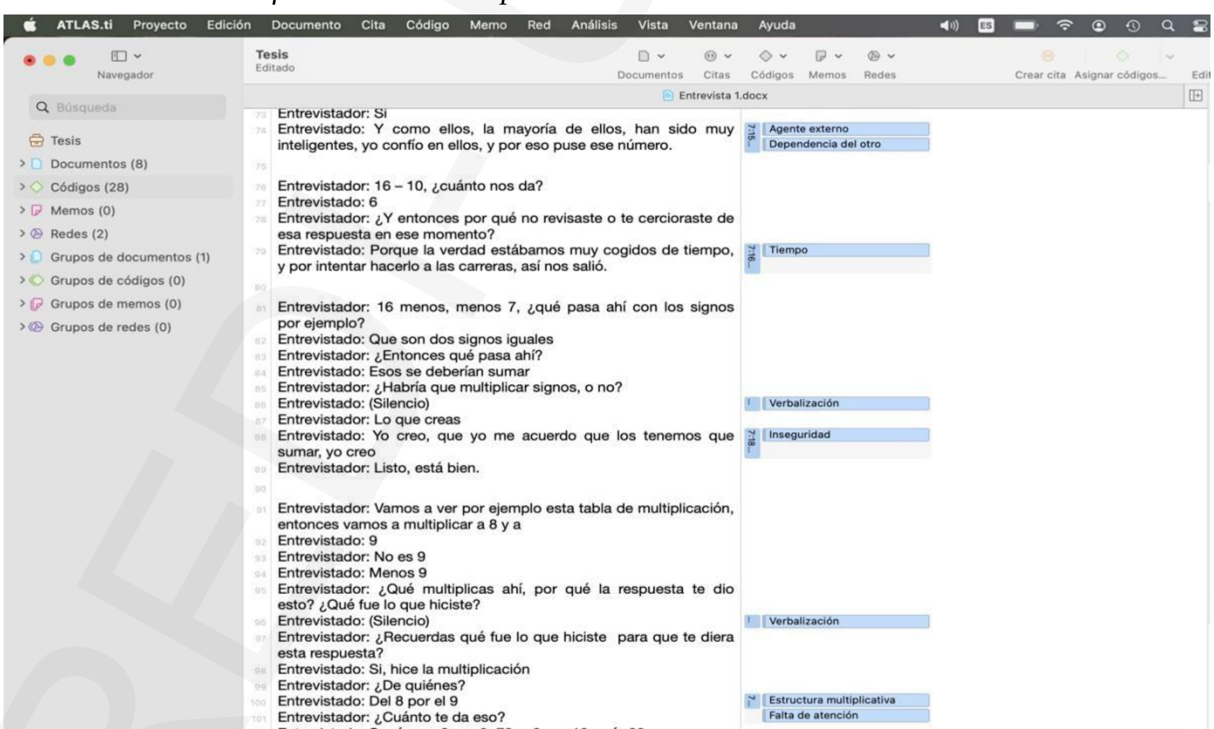
4.4. Análisis de los datos, procesos de codificación

Entendidos los datos como las respuestas que evidencian dificultades en el aprendizaje del número entero, se procede con el ingreso de las entrevistas, fuente de los mismos, al software Atlas.ti, en un comienzo como archivos de audio y luego la transcripción de las mismas, dado que en formato de texto se facilita la asignación de códigos a las citas seleccionadas, para así dar inicio al proceso de codificación con la fragmentación de los mismos de acuerdo a sus propiedades y dimensiones.

4.4.1. Factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero, centrados en el estudiante, descubrir propiedades en los datos

Como primer proceso de codificación, en concordancia con la teoría fundamentada (Strauss y Corbin, 2016), se inicia con la tarea de identificar similitudes a los datos en tratamiento, de manera que, sea posible asignar códigos a las citas que se vayan seleccionando. De esta manera, algunas de esas propiedades se reconocen a partir de los soportes teóricos mientras otras van surgiendo de los mismos datos, es decir, de las respuestas dadas. A continuación, se presenta una síntesis del trabajo realizado con la mediación de Atlas.ti; la siguiente imagen muestra en la columna central los datos (respuestas de los participantes) mientras que a su derecha se identifican las propiedades (códigos) asignadas a cada cita:

Figura 28. Proceso de codificación mediado por Atlas.ti

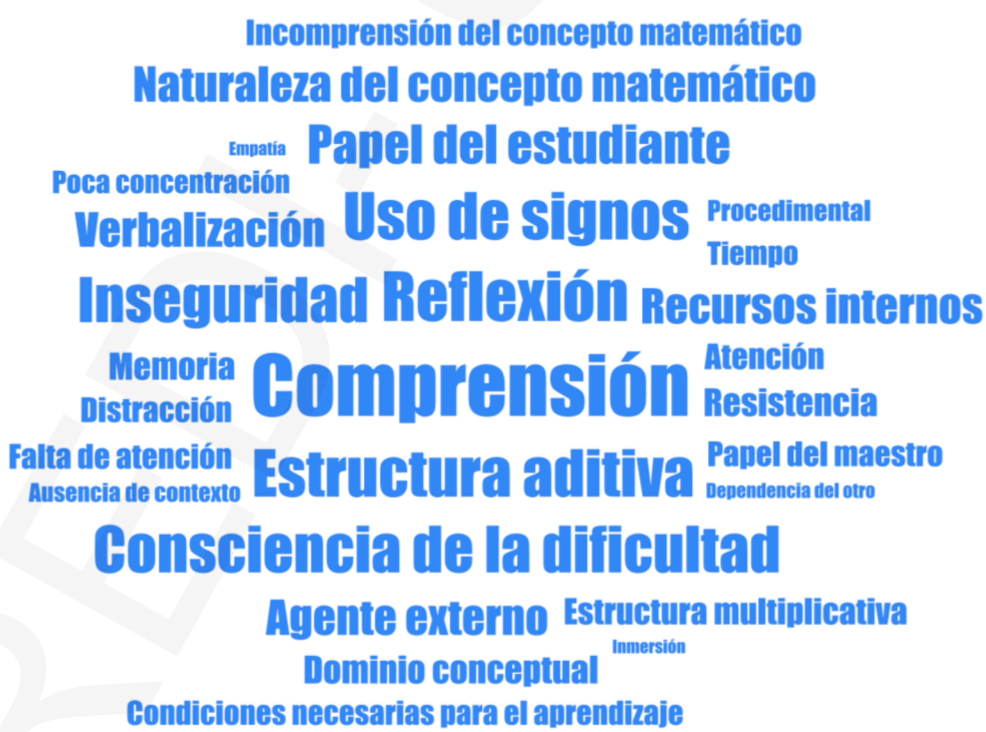


Fuente: tomado de Atlas.ti

Esta revisión se realiza con cada una de las fuentes (entrevistas) mientras el software recopila los códigos que se van asignando. Es posible identificar que, la falta de atención y, así mismo, la comprensión, surgen en los datos al tratar de explicar el por qué de las respuestas dadas, esto en la medida que se reconoce a la falta de atención como una de los posibles factores asociados al aprendizaje del número entero que, a su vez, genera incomprensión. En este orden de ideas, también aparece el factor tiempo al desempeñar un papel poco favorable cuando de realizar actividad matemática se trata, y así otros códigos más que se detallarán en lo que sigue y que se pueden ir relacionando con los recursos necesarios para el aprendizaje (Claxton, 2001).

En un primer ejercicio de identificar regularidades entre los datos, durante la codificación abierta, se obtienen los siguientes códigos:

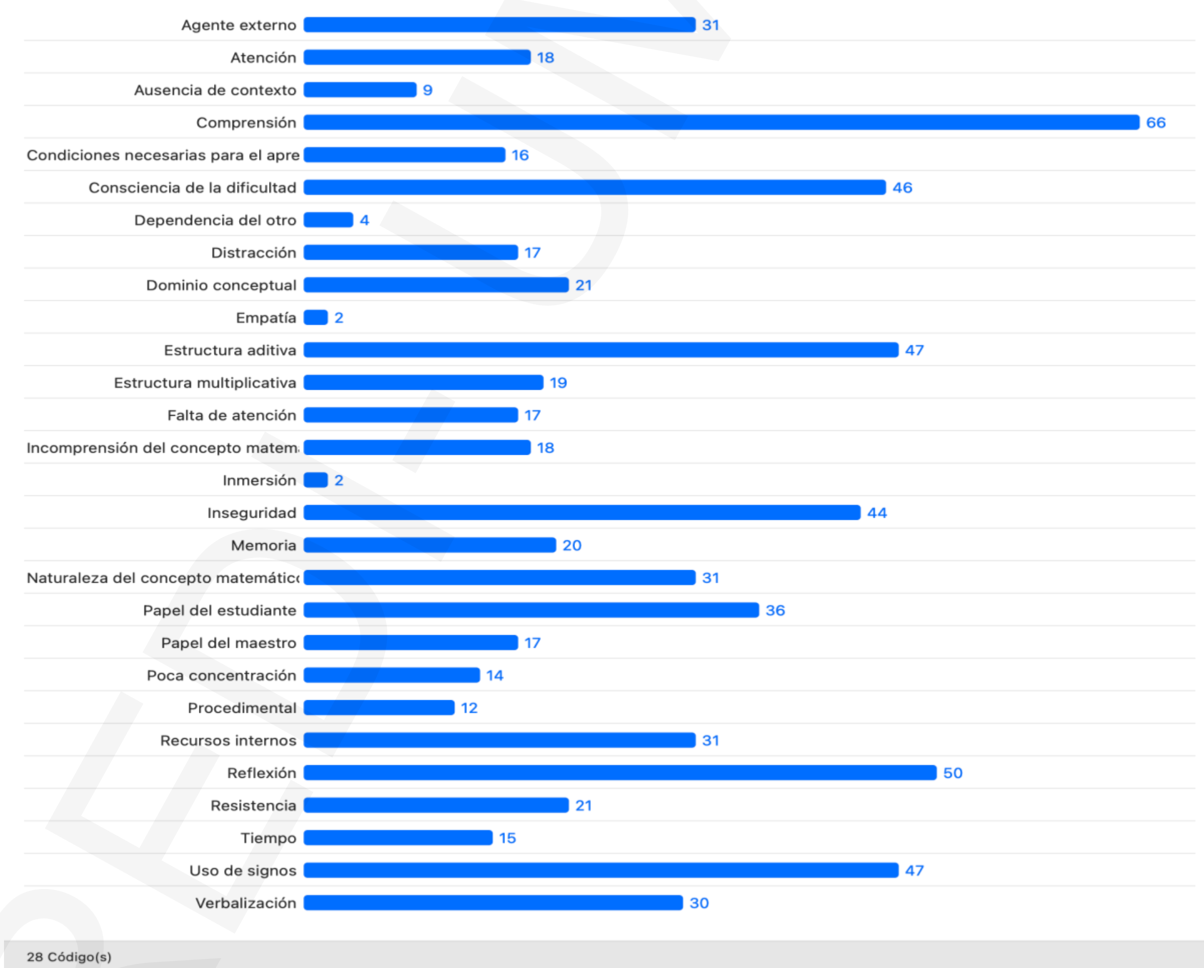
Figura 29. Nube de códigos extraída de Atlas.ti



Fuente: tomado de Atlas.ti

A través del software Atlas.ti, en apoyo a estos procesos de codificación, se consolida la anterior nube de códigos en la que se vislumbran propiedades relacionadas con ellas y en correspondencia a condiciones necesarias para el aprendizaje. En este sentido, resalta la comprensión entre las demás por encontrarse ubicada en el centro y también por su tamaño, lo que significa que es el código que se asignó mayor cantidad de veces durante el proceso y que se puede constatar por medio de un diagrama de barras, proporcionado por el mismo programa:

Figura 30. Gráfico de barras, frecuencia códigos asignados



Fuente: tomado de Atlas.ti

Es posible apreciar, partiendo del diagrama anterior, que el término comprensión encabeza la lista, seguido de reflexión, estructura aditiva, consciencia de la dificultad, inseguridad, papel del estudiante y agente externo, naturaleza del concepto matemático y recursos internos con una frecuencia igual, entre los que siguen. Como lo señala la codificación abierta, estos términos se definen teniendo en cuenta códigos creados a partir de las propiedades y regularidades de los datos; en este estudio se asignaron basados en las características asociadas al fenómeno, a continuación, se explica la manera como se asignaron algunas de ellas.

La *comprensión*, se define inicialmente como una categoría ya que se identifica de manera regular en los datos de diferentes formas, por ejemplo: al tratar de explicar el por qué se presentan dificultades en el aprendizaje del número entero; al identificar la falta de comprensión de lo que se debe hacer (enunciados, instrucciones, indicaciones, …) como la no comprensión del concepto matemático en sí, referidas de otra forma como conocimiento procedimental y conocimiento conceptual. De otro lado, se identifican variaciones en esta categoría lo cual conlleva a prestar atención a niveles en la comprensión, puesto que puede tenerse claridad frente a lo que hay que hacer o cómo hacerlo, pero no disponer del dominio conceptual para lograrlo o viceversa, esto se interpreta dentro de la teoría fundamentada como dimensiones.

Esta categoría surge, como se indica en el párrafo anterior, al identificar que asocian al número entero con pérdidas y ganancias, sin posibilidad de evidenciar mayor apropiación del concepto matemático, además de manifestar dudas en lo que dicen y presencia de silencios por momentos: “No, no sé qué decir”; “Pues… yo diría que, para muchas cosas, pero esas muchas cosas no las sabría decir"; "A ver, como ya estamos con otra cosa, entonces a ver yo me acuerdo porque… ósea, número entero no es que más o menos, algo así, entonces a veces también depende del clima, las horas que uno, ósea que maneja en el automóvil, no sé qué más, kilos de café, eso mis familias emplean eso en los kilos de café o algo así."

Es así como se reconoce una subcategoría asociada a la comprensión, correspondiente a la capacidad para verbalizar, ya que es una forma de dar a entender a otro qué tanto se ha comprendido o, por el contrario, dar muestra de que no se comprendió lo requerido, y que se relaciona también con el nivel de seguridad o inseguridad que se demuestra, asumiéndose como otra subcategoría en relación, aspectos que serán verificados en las siguientes codificaciones.

De forma similar, surge en los datos otra categoría referente al uso del tiempo, el cual se puede evidenciar en diferentes momentos y respuestas expresadas por los participantes, se reconoce como una regularidad que puede afectar el aprendizaje del número entero. Además de lo anterior, son argumentos presentados para justificar sus resultados en el desarrollo del primer instrumento, por ejemplo: "porque la verdad estábamos muy cogidos de tiempo, y por intentar hacerlo a las carreras, así nos salió"; "porque a veces quiero hacer las cosas como de una tacada, no me tomo mi tiempo para aprenderlas, ósea, ya la última hora, entonces hagamos eso, faltan 10 minutos, y entonces lo hacemos al último a la mano de Dios, no nos tomamos nuestro tiempo, no lo pensamos bien, no lo volvemos a revisar, ni a recalcar, entonces eso es como el contra de nosotros los estudiantes, porque somos el todo en general"; "como que no estaba tan concentrada porque estaba de afán, porque la profesora se iba a ir", dando a entender que por querer cumplir con las actividades asignadas y entregar el 100% desarrollado pues el tiempo se agota, responden con la poca seguridad de hacerlo bien, razones que apoyan el surgimiento de esta categoría.

De esta manera, el *manejo del tiempo* es una categoría inicial que se identifica durante este proceso de codificación y como tal, presenta dimensiones relacionadas con su duración, es decir, con su frecuencia y puede ser en menor o mayor cantidad su aprovechamiento, tanto al momento de realizar actividad matemática como de atender a las explicaciones, razón por la que es posible relacionarla con otras subcategorías como lo son la falta de atención, los recursos internos o poca concentración, extraídas igualmente de los datos en el proceso de codificación y análisis dentro de la codificación axial.

En este sentido, el reconocimiento de notoria distracción, poca concentración ante explicaciones o desarrollo de actividades asignadas se relacionan como subcategorías, en respuestas como: "yo diría que la distracción, uno a veces se distrae y como que no mira bien lo que tiene que resolver y se equivoca"; "algunas veces, porque algunas veces como que estoy distraída, si, y por eso no entiendo las cosas"; "la concentración, ósea, a veces cuando tengo la mente como muy llena de cosas, muy llena de cosas no me da, como que me desconcentro mucho"; "Pero yo de cansona, y poniéndome a molestar y a hablar ahí, no le entendía, cómo le iba a entender si no estaba concentrada en lo que me estaban diciendo"; "pues porque cuando uno está haciendo desorden, uno está como distraído, pensando en otra cosa. Y cuando está ya más atento, ya si uno le entiende mejor".

Otra regularidad identificada en los datos es la que se define como *consciencia de la dificultad*, en tanto que, se identifican respuestas que evidencian directamente que los participantes reconocen problemas para abordar el tema de números enteros, pudiendo ser consciente de que se está haciendo algo mal, así como también de que se están cometiendo errores o asumir lo que se plantea como difícil, incluso reconocer que el desarrollo de actividad matemática que involucra al número entero implica dificultad y en algunos casos el concepto matemático en sí mismo, estos aspectos pueden ser variaciones que conllevan a señalarse como dimensiones en tanto que se identifica la necesidad de solucionar dicho problema, puesto que puede variar entre individuos, algunos estarán interesados en hacerlo mientras que otros no, o al menos no con la intensidad y disposición o motivación requerida, también se señala la actitud que se pueda asumir posterior a dicho reconocimiento, lo que conlleva a actuar en diversas circunstancias que dependen de ello y que puede desencadenar en resistencia hacia el aprendizaje, aspectos que se retomarán en la codificación axial para refinar el alcance de esta categoría.

Asumir que algo es difícil de entender y por tanto difícil de resolver, asumir actitudes poco favorables para el aprendizaje y durante el trabajo individual o en grupos, también se relacionan con esta categoría en tanto pueden ser observables y asumidos por los participantes de la investigación, medida en la que se constituyen en características comunes y así mismo cumplen con regularidades que les permite relacionarse entre sí.

Otra característica común se reconoce al hacer referencia al concepto de número entero, partiendo de la presencia de los signos más y menos y la interpretación que se le da a los mismos, convirtiéndose en una regularidad dentro de los datos. Es así como se denomina la categoría *uso de signos*, que implica propiamente las propiedades de dos estructuras: aditiva y multiplicativa, las cuales llegan a generar confusiones en el desarrollo de operaciones que les implican, es ahí, por ejemplo, cuando se multiplican signos en casos que no aplica, se suma cuando había que restar o viceversa, en correspondencia con sus dimensiones. Se considera esta categoría como significativa ya que se observó en diferentes momentos durante el desarrollo de la guía y en varios participantes.

Se nombra uso de signos, dado que se identifica conflicto que genera el uso de los signos más y menos en el desarrollo de operaciones básicas (suma, resta, multiplicación, división), como se demuestra a continuación con algunas respuestas de los participantes: "Por lo malo, me ha ido un poquito así con los números enteros, que al sumarlos, que al restarlos y que saber cual es el menor y cual es el mayor, esa es la dificultad que tengo"; "Es que yo me troco mucho con eso, todos nos trocamos con los signos"; "Porque se nos olvida y nos trocamos. A veces hay tantos, tantos signos que uno dice, entonces este de cuál es y este de cuál es, si me entiendes, entonces hay dificultades en eso"

En conjunto, durante este proceso de codificación abierta, se pueden identificar las siguientes categorías en relación a factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero con estudiantes de octavo grado: comprensión, manejo del tiempo, consciencia de la dificultad y uso de signos, nombres que son asignados teniendo en cuenta las propiedades y dimensiones de los conceptos estudiados.

Lo anterior, se convierte en un primer acercamiento al proceso de codificación y determinación de factores asociados al objeto de estudio definido, los cuales se espera precisar y definir por medio de los siguientes procesos de codificación.

4.4.2. Relaciones entre factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero, codificación axial

De acuerdo con la teoría fundamentada (Strauss y Corbin, 2016), la codificación axial pretende establecer relaciones entre categorías y subcategorías, enlazándolas y reagrupando los datos, teniendo en cuenta las categorías iniciales identificadas en la codificación abierta, proceso que se dio con el análisis y descripción de los datos al señalar regularidades entre ellos. En este orden de ideas, se pretende identificar con mayor claridad cuáles son los factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero, por medio del ordenamiento sistemático de los datos en un esquema que permita vislumbrar la estructura de dichas dificultades.

Para lograr este propósito, en concordancia con lo planteado en el capítulo anterior, Atlas.ti favorece el trabajo al disponer de opciones como la creación de redes, en las que la visualización desempeña un papel fundamental para descubrir conexiones entre factores asociados de dificultades asociadas al aprendizaje del número entero y así mismo el poder relacionarlos.

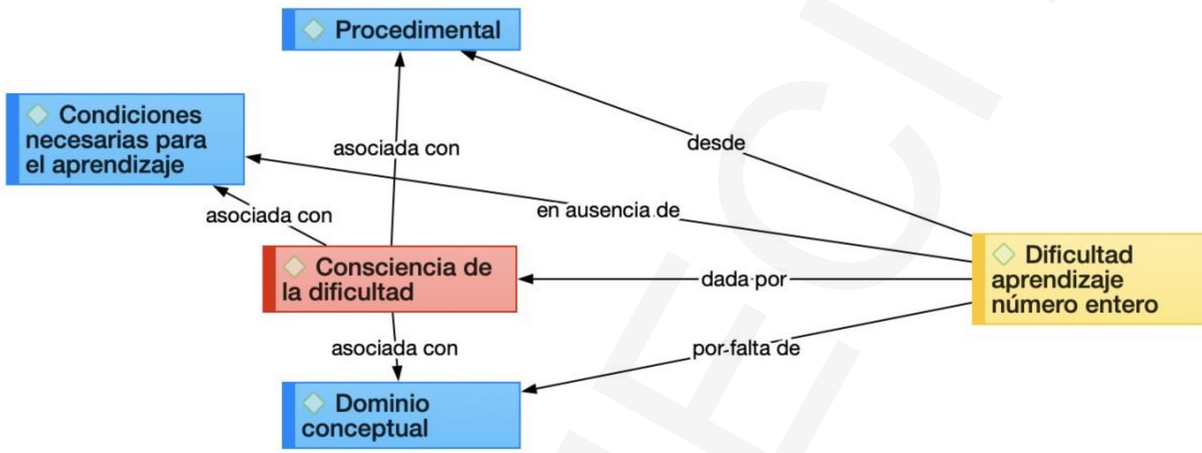
De esta manera, por medio de la configuración de esquemas, se esbozan las primeras estructuras teóricas que establecen relaciones y agrupan posibles factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero, a través de la disposición de categorías y subcategorías establecidas durante la codificación abierta. Al representar procesos abstractos, por las características del objeto de estudio, es posible que unas contengan a las otras, lo cual es parte de la tarea que se busca desarrollar en este apartado. Es necesario entonces llevar a cabo un proceso más analítico que permita realizar la integración de factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero.

Volviendo al análisis realizado en el apartado anterior, en el que se vislumbraron cuatro categorías: comprensión, manejo del tiempo, consciencia de la dificultad y uso de signos, se conjeturan conexiones entre subcategorías y ellas, pero teniendo en cuenta el objeto de estudio seleccionado se hace necesario establecer una categoría adicional, que a su vez permita explicar las ya mencionadas y es la que se define como *dificultad en el aprendizaje del número entero*, entendida como una barrera que impide u obstaculiza el aprendizaje del conocimiento matemático en cuestión y, por tanto, se considera como diversos los factores asociados a dicha dificultad.

En este orden de ideas, es preciso recordar que la presente investigación se centra en la identificación de los factores más que en la explicación de la dificultad, pues el propósito es establecer factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero y buscar similitudes o diferencias entre ellos, razón por la que se considera imprescindible establecer características que la definan como categoría.

En el proceso de análisis y codificación, se precisa que en algunos casos la dificultad parte del reconocimiento del problema, es decir, en el momento que se genera consciencia respecto a la presencia de una barrera que obstaculiza el aprendizaje del número entero, tal como se señala, pero en otros casos se identifica la dificultad sin que sea necesario que el participante sea consciente de ella, como se presenta a continuación:

Figura 31. Categoría Consciencia de la dificultad



Fuente: tomado de Atlas.ti

En el caso de darse el cuestionamiento, por ejemplo: "¿Entendiste bien cómo se debían completar las tablas?" y obtener como respuesta "Digamos que no", es posible identificar que el participante es consciente de la no comprensión respecto a lo que se le solicita realizar, lo que influye de manera directa en los resultados obtenidos y que se relaciona con el componente procedimental. Situación similar se presenta con el siguiente caso:

Entrevistado: 16 menos 10

Entrevistador: ¿Cuánto nos da?

Entrevistado: ¿Por qué sumaron?

Entrevistador: Cierto, la respuesta que está aquí es porque sumaron

Entrevistado: Si

Entrevistador: ¿Debíamos sumar aquí?

Entrevistado: No

En relación a lo anterior, se identifica que el participante percibe el error cometido, igualmente desde el proceder, puesto que reconoce que no se debía sumar para obtener la respuesta solicitada, razones por las que se hace posible el relacionar a la categoría consciencia de la dificultad con la subcategoría procedimental, como se muestra en el esquema. De otro lado, partiendo de los datos, se hace referencia al reconocimiento de barreras relacionadas con el componente conceptual

Entrevistado: Por lo malo, me ha ido un poquito así con los números enteros que, al sumarlos, que al restarlos y que saber cual es el menor y cual es el mayor, esa es la dificultad que tengo.

Entrevistador: Y por qué tienes dificultad cuando hay que sumar o restar, si hablamos de números enteros.

Entrevistado: Porque hay veces que me da como dificultad con la suma, bueno la suma no, porque yo se sumar y todo, pero con eso que uno… porque con los números enteros es diferente sumar, restar y así, entonces con la resta y pues… en este taller hubo la resta de los animales y eso, a mi me dio súper híper mega dificultad esa parte.

Se manifiesta en el diálogo la dificultad que le genera al participante el tratamiento del número entero desde el concepto, puesto que no hay claridad suficiente para él respecto al orden y el desarrollo de operaciones. En otro caso, a la pregunta: "¿sabes para qué te pueden servir los números enteros en la vida real, en la vida cotidiana?, se obtiene como respuesta, luego de un silencio, "No me he preguntado eso", lo que indica una ausencia de contexto y significado frente al concepto matemático abordado. De forma similar, en ocasión a los datos, se presenta el siguiente diálogo

Entrevistador: ¿Qué es un número entero?

Entrevistado: Ay profe, usted me va a preguntar a mi

Entrevistador: Es decir, no, qué recuerdas, qué entiendes en este momento por número entero

Entrevistado: A ver, como ya estamos con otra cosa, entonces a ver yo me acuerdo porque… ósea, número entero no es que más o menos, algo así, entonces a veces también depende del clima, las horas que uno, ósea que maneja en el automóvil, no sé qué más, kilos de café, eso mis familias emplean eso en los kilos de café o algo así.

Llama la atención en este caso, como a partir del momento de realizar la pregunta el participante reconoce no poseer el dominio conceptual referente al número entero, cuando textualmente refiere: "Ay profe, usted me va a preguntar a mi", sentido en el que es notoria la consciencia de la dificultad en él. Hasta este punto se han referido dos subcategorías (dominio conceptual y procedimental), las cuales emergen de los datos, pero al mismo tiempo se relacionan y vinculan con el capítulo 2 en relación al conocimiento matemático, dado que desde los EBC en matemáticas se hace referencia al conocimiento conceptual y procedimental, discriminados de acuerdo a su naturaleza y vinculados por la complementariedad existente entre ambos, tan importante el saber del qué (concepto) como del cómo (proceso). En la misma línea, se enfatiza en casos como los que prosiguen para continuar con el proceso de análisis y establecimiento de relaciones entre categorías y subcategorías, caso concreto de la consciencia de la dificultad.

Entrevistador: ¿Crees que tienes alguna dificultad para aprender matemáticas?

Entrevistado: La concentración, ósea, a veces cuando tengo la mente como muy llena de cosas, muy llena de cosas no me da, como que me desconcentro mucho, entonces como que no le entiendo bien a la profesora, aunque ella me explique y me explique no soy capaz.

En el suceso anterior el participante reconoce la existencia de una barrera en relación a la concentración, puesto que admite la implicación que tiene al momento de entender lo que el profesor trata de explicarle, además de generarle resistencia puesto que se predispone logrando obstaculizar su proceso de aprendizaje. Así mismo, se convierte en un argumento para justificar errores en las respuestas: "A mi desconcentración se puede decir, no leí bien y no tomé bien la información", "Yo diría que la distracción, uno a veces se distrae y como que no mira bien lo que tiene que resolver y se equivoca"; del mismo modo que reconocen las implicaciones de actuar de la forma esperada y de no hacerlo: "Pues porque cuando uno está haciendo desorden, uno está como distraído, pensando en otra cosa. Y cuando está ya más atento, ya si uno le entiende mejor", situación que se presenta de manera regular dentro de los datos. Otro factor a destacar se identifica en el siguiente caso:

Entrevistado: Más o menos, porque fueron a las dos últimas horas y uno ya está un poquito cansado, más con el calor y todo

Entrevistador: Y lo que había sucedido antes de la clase de matemáticas

Entrevistado: Pues, ósea, es que, todos los salones hablan mucho, hablan mucho entonces como que se dispersan mucho y a veces es muy difícil concentrarse.

Se presentan elementos que hacen referencia a condiciones necesarias para el aprendizaje y de las cuales son conscientes los participantes, en tanto les atribuyen características que las configuran como barreras u obstáculos, entre ellas la falta de atención, poca concentración, el factor tiempo, interferencias dentro y fuera del aula de clase. Por estas razones se establecen relaciones con la subcategoría condiciones necesarias para el aprendizaje.

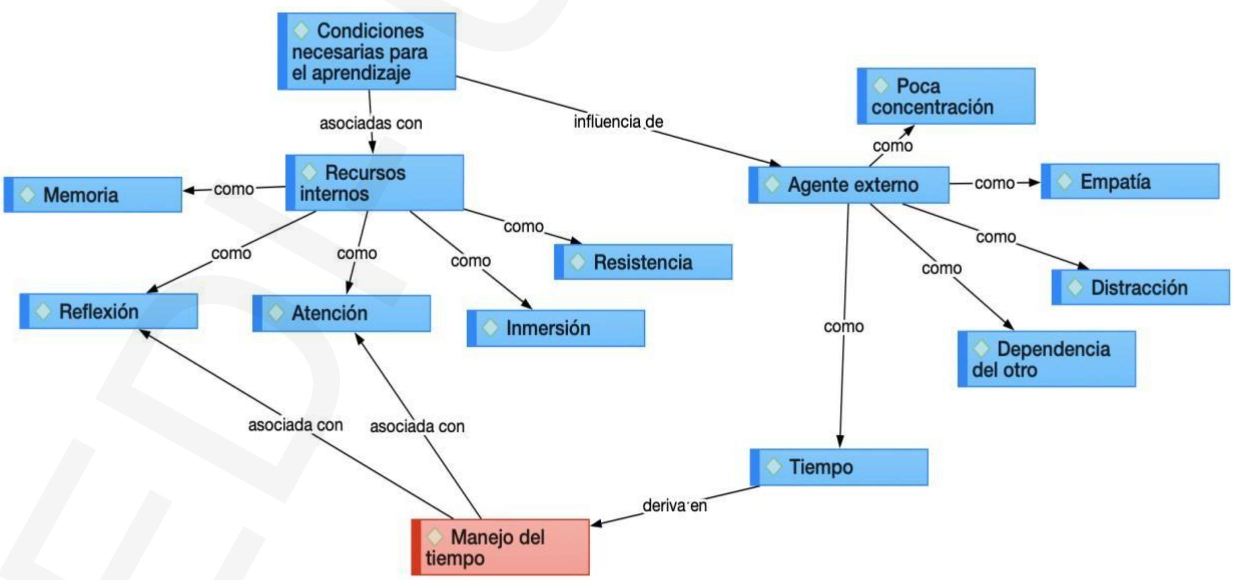
Es así como la consciencia de la dificultad se relaciona directamente con tres elementos puntuales tras el proceso de análisis, correspondientes a la declaración de dificultades originadas desde lo procedimental, el dominio conceptual o por la falta de condiciones necesarias para el aprendizaje, en tanto se establecen como subcategorías debido a la identificación de sus características y el contraste a partir de los datos.

Cada una de ellas presenta propiedades y dimensiones que les permite ser contenidas en la categoría descrita, puesto que comparten una característica común y es la de su aceptación como dificultad por parte de los participantes, en el sentido que las consideran como barreras para el aprendizaje del número entero, lo que puede conllevar a la generación de resistencia frente a este proceso. Así, por ejemplo, el dominio conceptual se fundamenta desde la ausencia de un contexto claro y la naturaleza misma del concepto de número entero, propiedades extraídas de los datos.

Respecto al problema procedimental, dada su regularidad, su interpretación parte de la inseguridad manifestada por los participantes cuando tratan de explicar y justificar procesos desarrollados que involucran al número entero, de un lado con las dudas en lo que expresan y de otro con los silencios, en ambos casos acompañados de gestos y movimientos que lo confirman, por ejemplo, al rascarse la cabeza, ubicar una mano en el rostro y simular que están pensativos, por citar algunos ejemplos.

En relación a las condiciones necesarias para el aprendizaje, el problema se reconoce a partir de su ausencia durante el proceso y basado en los datos, las cuales se clasifican en dos grupos: internas y externas, las primeras asociadas directamente con quien aprende y las segundas, de cierta manera, ajenas a él, pero ambas, como se ha descrito, comparten características comunes al ser requeridas y complementarse entre sí durante el aprendizaje, requisito para lograr el reagrupamiento de los datos durante la codificación axial, tarea en desarrollo. El siguiente esquema cumple esta labor:

Figura 32. Categoría Manejo del tiempo

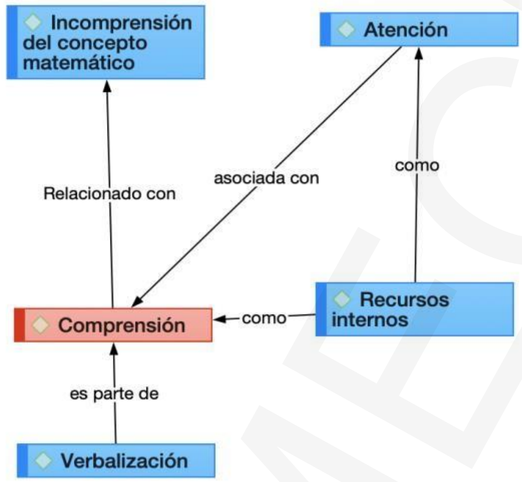


Fuente: tomado de Atlas.ti

De manera similar, se realiza el proceso de análisis que permite el reconocimiento de relaciones entre otras categorías y subcategorías. Aunque se ubica al tiempo como un agente externo que influye en los procesos de aprendizaje del número entero, dadas sus propiedades y dimensiones descritas en el apartado 4.4.1., se define como una categoría que, como se evidencia en el diagrama anterior tiene la facultad, asignada por el investigador, de agrupar subcategorías como la falta de atención, la reflexión y el papel del estudiante, quien debe poseer la capacidad de autorregularse, sentido en el que juega un papel importante la empatía entre él y el maestro, si se tiene en cuenta la relación sustancial que existe entre los procesos de aprendizaje y enseñanza. Así mismo, el manejo del tiempo, definido en el apartado previo, posee propiedades y dimensiones que le otorgan la condición de categoría, posterior al tratamiento de los datos y al reconocerse como generador, dado el caso, de dificultades asociadas al aprendizaje del número entero.

En referencia a la comprensión que, al igual que las demás categorías, relieve desde el proceso de codificación abierta en el propósito de identificar factores asociados al aprendizaje del número entero con estudiantes de octavo grado, se establece una relación directa con la siguiente estructura, en las que se reconocen dificultades, tanto de manera directa como indirecta

Figura 33. Categoría Comprensión

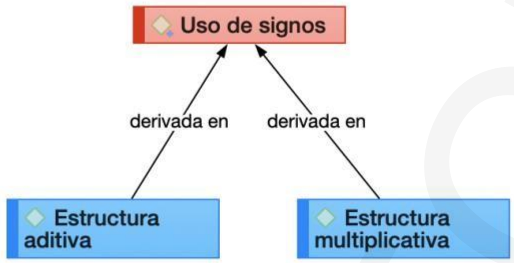


Fuente: tomado de Atlas.ti

Por lo tanto, la comprensión ocupa un lugar importante dentro de dificultades asociadas al aprendizaje del número entero, por un lado, en relación a la incomprensión del concepto matemático y por el otro en lo concerniente a la comprensión de lo que se debe hacer, evidenciable con el desarrollo de actividad matemática pero también con lo que se puede verbalizar sobre ella. Para este estudio se complementan ambas con el propósito de corroborar la presencia de dificultades al respecto, al mismo tiempo que se concibe como un recurso interno para el aprendizaje a la comprensión.

Finalmente, y no menos importante, se ubica al uso de signos como factor asociado a dificultades en el aprendizaje del número entero. Cuando los participantes se ven enfrentados al uso de los signos más y menos en diferentes situaciones, surge en ellos confusión respecto a su uso y es en ese caso que se hace referencia a las estructuras aditiva y multiplicativa, descritas en el apartado anterior, las cuales se vinculan a esta categoría.

Figura 34. Categoría Uso de signos



Fuente: tomado de Atlas.ti

Sin desconocer el papel desempeñado por el maestro, resalta en este caso las dudas generadas en los participantes cuando tratan de resolver operaciones matemáticas con números enteros, el no tener la suficiente claridad para saber en qué casos se deben multiplicar los signos y en cuáles no, situaciones que derivan en dificultades para su aprendizaje.

Se aprecia entonces y, en concordancia con lo planteado en el capítulo 2, que son múltiples los factores que se pueden esconder tras una dificultad en el aprendizaje, concretamente en lo referido al número entero. Con cada uno de los esquemas anteriores se evidencian múltiples conexiones entre ellas, de acuerdo con las propiedades y dimensiones asignadas en los procesos de codificación. Así mismo, estos esquemas vislumbran mayor claridad frente al objeto de estudio en tratamiento, reconocimiento de factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero, además de posibilitar la atribución de significado a los datos.

Hasta este punto, se han señalado elementos y características que permiten continuar con el análisis, ya que como se ha indicado antes, debe ser un proceso continuo y sistemático, que aporte al proceso de codificación y por tanto permita el emerger de la teoría referida a factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero.

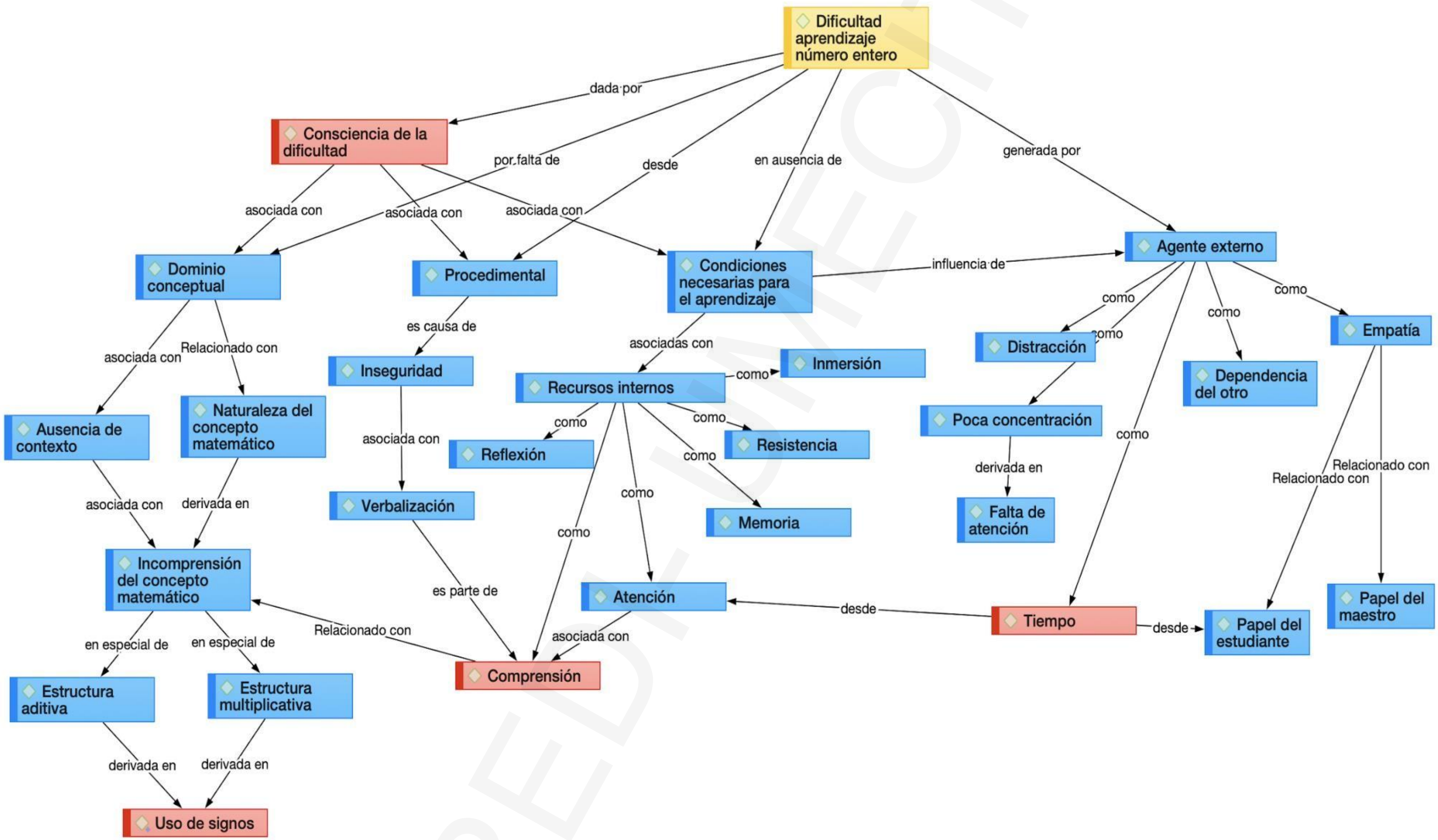
A través del software Atlas.ti se posibilitó el trabajo y composición de cada uno de los esquemas, partiendo del proceso de codificación previo. Con esto, las categorías descritas en la codificación abierta fueron examinadas nuevamente en este apartado, logrando instaurar conexiones significativas entre ellas conducentes a su establecimiento y reafirmación como categorías, las cuales explican factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero en estudiantes de octavo grado de educación básica secundaria. Sin embargo, prosigue el camino para consolidar la teoría en el proceso analítico que hasta este punto se ha logrado, la codificación selectiva.

4.4.3. Refinamiento de la teoría de factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero

El proceso de análisis desarrollado durante la codificación axial ha posibilitado relacionar categorías y subcategorías, como se evidencia en el apartado 4.4.2. Lo anterior aporta a la comprensión del fenómeno objeto de estudio, en el sentido que permite vislumbrar posibles factores asociados que subyacen a dificultades en el aprendizaje del número entero y al mismo tiempo establece relaciones entre ellas.

En este momento, con la codificación selectiva, se busca la integración y refinamiento de la teoría tal y como se describe en el capítulo 3. Para ello, se ha transitado por dos procesos de codificación (abierta y axial) que han requerido, de manera simultánea, la inmersión en los datos; así mismo, se continúa el abordaje mediado por el software Atlas.ti pues, como se ha descrito, apoya el análisis por medio de la configuración de esquemas que, a través de la visualización y establecimiento de relaciones entre categorías y subcategorías, posterior a la revisión y organización de las mismas a través de un esquema teórico, que posibilita el emerger de la teoría referente a factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero.

Figura 35. Esquema elaborado a partir de la codificación axi al

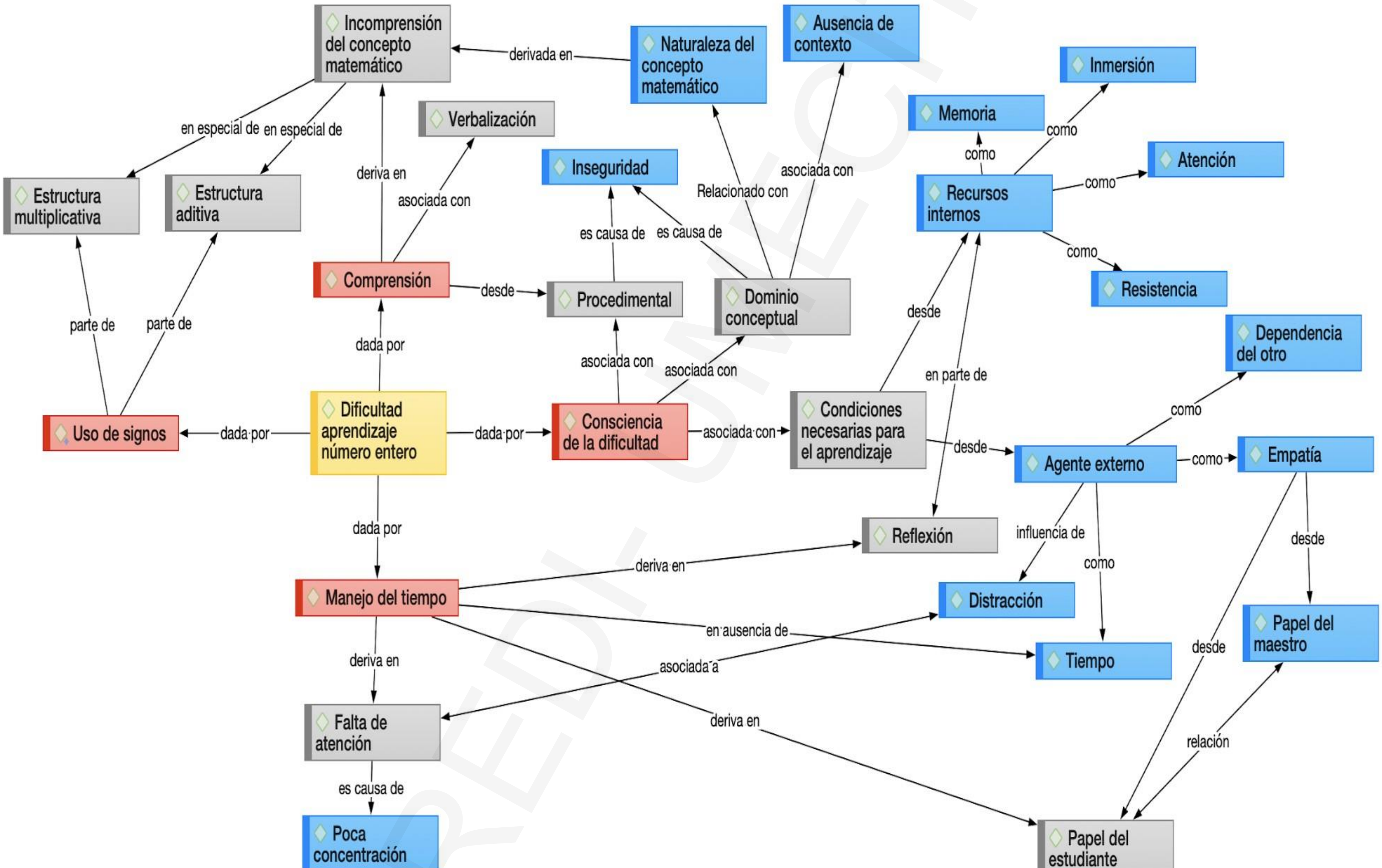


Fuente: tomado de Atlas.ti

El esquema anterior, recupera y presenta estas relaciones establecidas durante los procesos de codificación previos, a partir de la revisión de las propiedades y dimensiones correspondientes a cada categoría y subcategoría, con el propósito de integrar nuevamente los datos y consolidar así un esquema teórico que configure la teoría en relación a factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero. Sin embargo, se hace necesario continuar con el proceso de integración y refinamiento de los datos, favoreciendo la saturación de los mismos, de la misma manera en que se describe en el capítulo 3 a partir de la teoría fundamentada.

De esa manera, en el capítulo anterior se esboza que “no hay sólo una manera correcta de expresar las relaciones. El elemento esencial es que se interrelacionen las categorías para formar un esquema teórico más amplio”, de acuerdo con Strauss y Corbin (2016, pág. 160), sentido en el que se retoma el esquema ya construido para, a partir de él, revisar nuevamente las relaciones previamente establecidas en la posibilidad de configurar otras que favorezcan la definición del objeto de estudio y así permita también dar respuesta a la pregunta de investigación. Así mismo, se considera necesario, a este punto, la definición y consolidación de dichas categorías y subcategorías dentro del esquema, puesto que el uso de él debe favorecer la visualización, pero también la comprensión del objeto de estudio, razón por la que se asigna un color específico de acuerdo a su caracterización, sin que ello implique un orden jerárquico dentro del mismo, como se muestra a continuación

Figura 36 . Esquema elaborado a partir de la codificación selectiva



Fuente: tomado de Atlas.ti

Debido que la codificación selectiva pretende ilustrar la construcción teórica derivada de los datos en un esquema, se ha identificado que la importancia de este radica en mostrar las relaciones que se establecen entre las propiedades y dimensiones de cada categoría para mostrar factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero. Se considera que un esquema de red es el que mejor representa dichas relaciones y permite visibilizar los aspectos más relevantes de este constructo teórico, así mismo permite modificar, ampliar, refinar, depurar, potenciar en la medida que se realicen nuevos estudios que profundicen en el objeto de estudio de esta investigación.

Se identifica una categoría central, con color amarillo, que define el objeto de estudio de la presente investigación: dificultades en el aprendizaje del número entero. A su alrededor, en color rojo, se ubican las cuatro categorías establecidas durante los procesos de codificación abierta y axial, consciencia de la dificultad, comprensión, uso de signos y manejo del tiempo, las cuales explican factores asociados a estas dificultades. En color azul se aprecian algunos factores que se relacionan a las subcategorías, que se distinguen con el color gris, elementos emergentes a partir de los datos y el tratamiento de los mismos.

En relación también a los planteamientos efectuados en el capítulo anterior sobre el diseño metodológico, teoría fundamentada, es necesario llevar a cabo procesos que den validez a estos esquemas, siendo posible compararlos nuevamente a la luz de los datos. Para esto, se revisan una vez más las relaciones establecidas en correspondencia a las características del fenómeno de estudio, partiendo de situaciones en las que se dan procesos de aprendizaje, o se validan, respecto al número entero como fenómeno de estudio, pero que implican también procesos de enseñanza, en otras palabras, inmersión en los datos.

De acuerdo a lo anterior, se identifican en la estructura teórica ya establecida, múltiples relaciones entre categorías y subcategorías, no de manera lineal ni mucho menos jerárquica, puesto que se reconocen múltiples factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero, como se ha tratado de explicar ya, y por ello no sería posible definir un factor asociado de manera específica a un individuo en concreto, cuando pueden variar de una persona a otra, contemplando la posibilidad de que se cumpla a la vez con varios de ellos. Este hecho que se convierte en un aporte para profundizar y comprender aún más el fenómeno de estudio y los factores asociados que subyacen a él.

Se reconoce entonces la complejidad del fenómeno de estudio, en el sentido que no es posible establecer una única relación entre este y sus posibles factores asociados. Las categorías establecidas atienden a diferentes características de dificultades en el aprendizaje del número entero puesto que, reconociendo su presencia, se desconoce en algunos casos lo que antecede a ellas, qué las origina, pero al mismo tiempo se contempla la posibilidad que se deba a diversos factores, tal como se ha evidenciado con el presente estudio.

De un lado, el uso de signos se consolida como uno de los principales factores que conlleva a la presencia de dificultades en el aprendizaje del número entero, relacionado directamente con las estructuras aditiva y multiplicativa, aspectos vinculados a la naturaleza del fenómeno de estudio y que conlleva a procesos abstractos de razonamiento, pero que también deben relacionarse con procesos concretos, especialmente durante la enseñanza para así favorecer el aprendizaje. En este sentido, es importante partir de las posibilidades y condiciones presentes en el individuo y el contexto, medida en la que se reconoce que los factores sociados a dichas dificultades pueden depender, por ejemplo, tanto de quien aprende como del medio en el que se encuentra, incluso de ambos.

Simultáneamente, la comprensión desempeña un papel fundamental dada la presencia de dificultades en el aprendizaje, bien sea en relación a la comprensión del concepto o a la comprensión de lo que se debe hacer, ya que en ambos casos se requiere la inversión de mayor cantidad de tiempo y por lo tanto afecta directamente el aprendizaje del número entero. Esta situación desencadena en dificultades que se pueden manifestar de diversas formas, por ejemplo, en los bajos resultados tras el desarrollo de actividad matemática y que se pueden constatar por medio de la verbalización, tal como se logró con este estudio.

Respecto a esta categoría, se considera la necesidad de profundizar en ella, pues como se ha sugerido durante la codificación, requiere de un estudio exclusivo a ella en el propósito de identificar y establecer niveles en la comprensión, teniendo presente que ella presenta variaciones que pueden influir a su vez en la presencia de dificultades en el aprendizaje del número entero, sin embargo, no es este el propósito de la presente investigación.

El esquema teórico evidencia además relaciones entre esta categoría con el uso de signos, pero también con la consciencia de la dificultad, mostrando interrelaciones tanto entre categorías como con las subcategorías, dando soporte a lo expuesto en este apartado y que se fundamenta en los datos.

Así mismo, se reconoce al tiempo como un factor externo que se ubica dentro de las condiciones necesarias para el aprendizaje, pero de igual forma se define como categoría dadas sus regularidades, esto al tomarse como soporte para justificar dificultades en el aprendizaje del número entero. En este sentido, se asocia con la falta de atención que conlleva a la no comprensión, evidenciando una vez más interrelaciones entre categorías y subcategorías, que dan muestra de variaciones múltiples dentro del esquema teórico.

En el recorrido trazado durante los procesos de codificación, se establecieron las relaciones ya definidas al mismo tiempo que se muestran las interrelaciones por medio de los esquemas expuestos, con su carácter integrador y con los que se pretende clarificar factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero sin que sean necesarias muchas explicaciones.

De esta manera, se soporta la integración de los datos y el emerger de la teoría que busca explicar y comprender el fenómeno de estudio, como uno de los propósitos de esta investigación cualitativa, visibilizando factores asociados al aprendizaje del número entero en estudiantes de grado octavo de educación básica secundaria, entendidas como factores asociados, proceso que requirió la identificación y reconocimiento de cualidades, características, acciones o comportamientos que conducen a concluir la presencia de una dificultad de aprendizaje, ello a través de la observación, descripción e interacción con los datos y los participantes en un contexto inmediato y conocido para ellos.

CAPÍTULO V. CONSTRUCCIÓN TEÓRICA

5. Proceso de teorización

En este capítulo, se presentan los resultados del análisis desarrollado a través de los procesos de codificación abierta, axial y selectiva, correspondientes a la teoría fundamentada y mediados por el software Atlas.ti, centrando la atención en los aspectos teóricos al campo de la educación matemática, puntualmente en relación al número entero, y que posibilitan la comprensión del fenómeno estudiado.

Partiendo del diseño metodológico de la teoría fundamentada, se establece como proceso final la teorización, momento en el que la teoría emerge de los datos, tal como se logra en los apartados anteriores y especialmente con la codificación selectiva. Es un proceso complejo y sistémico que implica la configuración de un esquema teórico que deriva una estructura conceptual, relacionando categorías y subcategorías para explicar el fenómeno.

Con la presentación de este capítulo se logra evidenciar el cumplimiento de cada uno de los objetivos trazados al inicio de la investigación, aspectos que ya fueron descritos, estableciendo así elementos que responden a la pregunta de investigación. Pero un poco más allá, se espera que los resultados permitan orientar nuevos procesos de investigación acerca de dificultades de aprendizaje en las matemáticas y en concreto del número entero, y que así mismo sirvan como insumo para la atención puntual a dificultades en el aprendizaje de dicho concepto, dado el reconocimiento de su presencia a lo largo de la historia, y con los aportes realizados con este estudio.

5.1. Teoría factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero

El proceso investigativo posibilitó el establecimiento de cuatro categorías que describen el fenómeno de dificultades en el aprendizaje del número entero a través de la identificación de factores asociados a ellas y centrados en el estudiante: la consciencia de la dificultad, la comprensión, el uso de signos y el manejo del tiempo; respectivamente se establecieron subcategorías en relación a cada categoría logrando una mayor comprensión del fenómeno.

Cada una de las categorías descritas están en correspondencia con la multiplicidad de elementos que pueden influir en los procesos de aprendizaje del número entero, de la misma manera que se identifica su influencia dada la presencia de dificultades en su aprendizaje, esto al reconocer que no se han generado cambios que perduren con el tiempo en los participantes en relación a la apropiación del número entero, en conrrespondencia con Schunk (2012) respecto a su concepción sobre el aprendizaje, lo anterior en el trabajo realizado con estudiantes de octavo grado de educación básica secundaria. A continuación, se presentan algunos aspectos que permiten la caracterización de dificultades, partiendo de factores que se asocian a ellas con centro en el estudiante, en base a los resultados de los procesos de codificación llevados a cabo.

Consciencia de la dificultad: se configura al reconocer que se poseen dificultades frente al desarrollo de actividad matemática que involucra al número entero, las cuales provienen y se relacionan partiendo de tres elementos puntuales que corresponden a la declaración de dificultades originadas desde lo procedimental y el dominio conceptual, tomando como referencia en este punto las orientaciones de los lineamientos curriculares (MEN, 1998) y los EBC en matemáticas (MEN, 2006) y los aportes de autores como Godino, et al. (2003) en relación a la competencia y la comprensión matemática, y en tercer lugar por la falta de condiciones necesarias para el aprendizaje, partiendo de las facultades para el aprendizaje y la caja de herramientas, propuestas por Claxton (2001), estos tres elementos establecidos como subcategorías ya que, en general, son aceptadas como dificultad por parte de los participantes, en el sentido que las consideran como barreras para el aprendizaje del número entero, lo que conlleva a la generación de resistencia frente al proceso puesto que, aunque lo admiten y reconocen, no se evidencia interés en tratar de superarlas.

Es relevante, del mismo modo, el papel que desempeña el cerebro y la memoria, elementos señalados por Blakemore y Frith (2008) y Schunk (2012), respectivamente, esto ante la presencia de dificultades en el aprendizaje del número entero, tanto antes como después que el proceso suceda, teniendo en cuenta que los participantes se encuentran en grado octavo de educación básica secundaria, una etapa posterior al momento en el que se da el aprendizaje del número entero, de acuerdo al currículo establecido y, aún así, recononcen poseer dificultades al respecto. En este sentido, se señala que la memoria es fundamental para el aprendizaje, el cuestionamiento se da en relación a la forma cómo se aprende ya que delimita la manera en que se almacena y recupera la información, en este caso, del número entero, hecho que cuestiona también qué tan significativo ha sido el aprendizaje para ellos y la facultad que poseen para almacenar y recuperar la información.

El dominio conceptual se soporta a partir de la ausencia de un contexto claro y la naturaleza misma del concepto de número entero, tras el proceso de análisis realizado, además de su relación con la comprensión, pues como lo señalan Godino, et al. (2003), ella atiende al componente teórico del conocimiento, en este caso del número entero y que en concordancia con los EBC en matemáticas (MEN, 2006), corresponde al saber cómo; en relación al problema procedimental, surge de la inseguridad manifestada por los participantes cuando tratan de explicar y justificar procesos desarrollados que involucran al número entero, con las dudas que generalmente suelen identificarse en sus verbalizaciones y así mismo con los silencios presentes, en ambos casos acompañados de gestos y movimientos que lo reafirman, haciendo referencia así a lo que se denomina competencia matemática, de acuerdo con Godino, et al. (2003) y, en correspondencia a condiciones necesarias para el aprendizaje, se establecen, partiendo de su ausencia, como internas y externas, ambas requeridas para favorecer los procesos de aprendizaje y que se complementan, estableciendo que la no presencia de alguna de ellas puede desencadenar en dificultades durante y para el aprendizaje del número entero.

El uso de signos: por su parte, esta categoría hace referencia a las dificultades que genera el tratamiento de los signos y la aplicación de propiedades que les corresponden, tanto aditivas como multiplicativas, en el desarrollo de actividad matemática que involucra al número entero, ambas estructuras definidas como subcategorías en conexión al uso de signos. En esta categoría se encuentra relación con autores como Iriarte Bustos, et al. (1991), al reconocer que ciertas reglas se encuentran vacías de contenido y significado y por lo tanto hay una tendencia a que sean fáciles de olvidar y confundir, especialmente la regla de los signos, también se da lugar a Socas Robayna (1997), pues en este mismo sentido enuncia que los signos pueden ser operados mediante reglas sin aludir a un significado . De esta manera, se requiere de procesos abstractos de razonamiento, los cuales directa o indirectamente deben relacionarse con procesos concretos, especialmente durante la enseñanza para así favorecer el aprendizaje, soportado igualmente en los procesos de análisis realizados.

El no poseer claridad respecto a las propiedades en el uso de los signos más y menos con números enteros, potencializa la presencia de dificultades en el aprendizaje del ellos, de la misma forma que se logra con la asignación de propiedades de una estructura a la otra. Además, lo ya descrito conlleva a la incomprensión del concepto matemático, generando confusiones tanto desde el campo de aplicación conceptual como desde lo procedimental, convirtiéndose en barreras para el aprendizaje. En este orden de ideas y, como lo plantea Cid Castro (2016), se identifican casos en que los estudiantes interpretan estos signos como una operación, desconociendo que también pueden indicar si el número es positivo o negativo, del mismo modo se soporta en Ruíz Ramírez (2021) en tanto sostiene que no siempre el signo menos está asociado con una resta o el más con una suma, con mayores posibilidades de que el primero sea ignorado por el estudiante.

Manejo del tiempo: aunque se reconoce al tiempo como un factor externo que hace parte de condiciones necesarias para el aprendizaje, se constituye como categoría en la tarea de explicar, comprender y justificar dificultades en el aprendizaje del número entero. Se hace referencia al uso poco eficiente que se le da al tiempo, en la medida que no se optimiza, de un lado durante las explicaciones del profesor y del otro en el desarrollo de actividad matemática. Es así como se definen tres subcategorías: falta de atención, reflexión y papel del estudiante.

En correspondencia con esta categoría, se establece una relación inversamente proporcional entre la comprensión y ella: a mayores niveles de comprensión, menor será el tiempo requerido, pero se necesita de mayor tiempo en los casos que no se logra comprender adecuadamente, bien sea a nivel conceptual o procedimental, localizando en este caso a la falta de atención para explicar dichas relaciones.

Ahora bien, con el reconocimiento que tiene la falta de atención dentro de la comprensión, así mismo se relaciona con la optimización del tiempo, puesto que en los casos que no se llega a comprender algo, bien sea a nivel conceptual o procedimental, se genera falta de atención y al mismo tiempo el desaprovechamiento del tiempo.

Comprensión: ocupa un lugar predominante ante la presencia de dificultades asociadas al aprendizaje del número entero desde dos miradas, en relación a la incomprensión del concepto matemático y en lo que corresponde a la comprensión de lo que se debe hacer, aspectos que se identifican a través del desarrollo de actividad matemática y se soportan por medio de la verbalización. Así mismo, se establece una complementariedad entre ambos aspectos, asumiendo que es tan necesaria la comprensión del qué como la comprensión del hacer, y si se falla en ambos o al menos en uno de ellos, se estará ante una posible dificultad, ya que al no comprender algo se va a requerir la inversión de mayor cantidad de tiempo y por lo tanto se afecta directamente el aprendizaje del número entero. Lo anterior se sustenta a partir de lo establecido en los lineamientos curriculares (1998) y los EBC en matemáticas (2006), pero también con fundamento en Godino, et al (2003) en relación a la competencia y la comprensión, ya que de acuerdo con ellos la primera atiende al componente práctico, mientras que la comprensión al componente teórico del conocimiento" (pág. 58), es decir, la competencia es al conocimiento procedimental como la comprensión es al conocimiento conceptual, ambos complementados entre sí.

De esta manera, se asigna a la comprensión el atributo de relacionarse con las demás categorías pues, como ya se ha expuesto, se correlacionan internamente para explicar y comprender el fenómeno estudiado. Se observan entonces diferentes relaciones que permiten reconocer factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero, centrados en el estudiante, en todo caso cuando los participantes ya transitaron por procesos de enseñanza sobre dicho concepto, razón por la que el presente estudio se fundamentó, inicialmente, en verificar su aprendizaje.

5.2. Conclusiones

Este capítulo final, exhibe conclusiones que son producto del proceso investigativo que se logró consolidar en sus diferentes etapas, entre ellas, se hace referencia a los aportes propios del estudio al campo de la educación matemática, a través de las conclusiones derivadas de las categorías, subcategorías y su integración teórica, concretamente en lo referido al concepto de número entero y dificultades asociadas a su aprendizaje; al alcance y cumplimiento de los objetivos trazados al inicio de la investigación y, finalmente, algunas recomendaciones en relación al fenómeno objeto de estudio e implicaciones en el aula de clase.

5.2.1. Conclusiones finales respecto a los objetivos

El cumplimiento de los objetivos propuestos, confirma que la presente investigación aporta al campo de la educación matemática, puntualmente al estudio de dificultades asociadas al aprendizaje del número entero desde factores asociados a ellas, centrados en el estudiante, con los que se trazó el camino a seguir para lograrlo. De esta forma, se logra también una validación de los resultados obtenidos en referencia al rastreo documental y bibliográfico realizado.

Inicialmente, se propuso la identificación de dificultades asociadas al aprendizaje del número entero, en estudiantes de octavo grado de educación básica secundaria, proceso que implicó la elaboración previa del instrumento dispuesto para tal fin. Fue así como se retomaron los documentos rectores que orientan los procesos de enseñanza de las matemáticas en Colombia, se seleccionaron los estándares que tienen relación con el número entero, desde los EBC, y las evidencias de aprendizaje, asociadas a este mismo concepto, de los DBA, enfocados en los grados de 6º y 7º.

Con estos insumos, se procedió a la construcción de una matriz que permitiera encadenar cada uno de los ítems de la guía taller a ellos, partiendo de los pensamientos y procesos propios de las matemáticas y definidos en los documentos rectores. De esta manera, se logró la consolidación del primer instrumento en la medida que permitiría el desarrollo de actividad matemática referente al número entero, con el que se hizo posible, por medio de su aplicación y de manera escrita, el reconocimiento de posibles dificultades en su aprendizaje, puesto que los participantes debieron evidenciar y poner en práctica sus conocimientos en relación a él, dado que se encuentran en un ciclo posterior al estipulado para su enseñanza. Cabe aclarar que el instrumento fue sometido a procesos de validación por parte de expertos.

De los resultados obtenidos se puede concluir que dichas dificultades parten del tratamiento de los signos más y menos en operaciones básicas como la suma, la resta, la multiplicación y la división, es decir, estructuras aditiva y multiplicativa. En el caso de las operaciones de adición y sustracción, que no involucran paréntesis, los estudiantes aplican la ley de signos de forma arbitraria desconociendo el contexto en el que debe utilizarse para definir el signo del resultado. Así mismo, se infiere que asignan funciones procedimentales a ciertos signos (los que median entre dos términos) de manera arbitraria, para definir la operación a ejecutar. En este punto es importante señalar el significado que puede tener el símbolo $-$, dependiendo del contexto en el que se le ubique, ya que como lo señalan Aponte Bello y Rivera Martínez (2017), no necesariamente hace referencia a la operación resta, también puede indicar el signo de un número o el opuesto del mismo. Esta regularidad se cumple incluso con aquellos ejercicios en los que se ubican términos dentro de paréntesis, teniendo en cuenta el signo antecedente y consecuente en la operación, dado que los estudiantes probablemente priorizan ciertos signos, atendiendo a sus propias reglas, para definir el resultado, utilizando la ley de signos de manera arbitraria y sin tener claro, por ejemplo, el significado del símbolo $-$ dentro del ejercicio planteado.

Otra dificultad identificada se refiere a la comprensión ya que, aunque se dispusieron instrucciones para el desarrollo de los ejercicios propuestos, acompañadas de cuadros de texto explicativos en relación a dichos ejercicios, se observó que no se tuvieron en cuenta en la ejecución de los mismos. En este sentido, desde la teoría pero también con ejemplos se mostró el procedimiento para operar con números enteros, en las cuatro operaciones básicas propuestas, y teniendo en cuenta la diversidad de casos que se pudiesen presentar de acuerdo a los signos, pero a pesar de ello no hay correspondencia con las respuestas que dieron a la actividad planteada. También se evidencia la resistencia a modificación de concepciones previas sobre el número entero, toda vez que los procedimientos seguidos no cambian con la instrucción, concluyendo así la presencia de dificultades en su aprendizaje.

Incluso, una vez comprendidas las instrucciones, se concluye que existen deficiencias en la atención al momento de aplicarlas, relacionadas con el tratamiento conceptual y procedimental de los signos, en representaciones continuas y discontinuas de los ejercicios. Finalmente, otra dificultad encontrada en el aprendizaje del número entero y, que se relaciona íntimamente con las anteriores, es la que se refiere al uso poco eficiente del tiempo, en el sentido que se reconoce como un factor externo que obstaculiza los procesos de aprendizaje, en la medida que no se aprovecha el recurso tanto durante las explicaciones del profesor como durante el desarrollo de actividad matemática propuesta. De otro lado, esta dificultad se asocia también al sentido de inmediatez que por lo general se tiene sobre la resolución de ejercicios y problemas matemáticos, puesto que aún sin estar seguros de la validez de la respuesta, lo importante es tenerla.

Teniendo en cuenta también que el aprendizaje es inferencial (Schunk, 2012), el diseño e implementación de los dos instrumentos favoreció la identificación de posibles dificultades en el aprendizaje del número entero, ya que no es posible observarlas de manera directa. Con lo anterior, se logra la consecución del primer objetivo: identificar posibles dificultades en el aprendizaje del número entero, en estudiantes de octavo grado de educación básica secundaria.

Posteriormente, se partió de los datos extraídos del segundo instrumento, la entrevista semiestructurada, cuyo diseño correspondió al investigador y que, al igual que el primer instrumento, también fue sometida a procesos de validación por parte de expertos, considerando que su aplicación proporcionó la información necesaria para complementar dichas dificultades a partir de factores asociadas a los mismos y centrados en el estudiante, además de favorecer su explicación, a través de la verbalización, por parte de los mismos participantes. Se concluyen así relaciones entre las dificultades partiendo de su conexión a condiciones necesarias para el aprendizaje, identificadas al mismo tiempo como regularidades, en tanto algunas de ellas se refieren a recursos internos y otras a recursos externos, esto dada su ausencia o aprovechamiento no esperado.

Inicialmente, las dificultades descritas se centran en el estudiante, reconociendo que requieren y dependen del grado de comprensión que se posea sobre el número entero, tanto a nivel conceptual como procedimental. De manera general, todas ellas se deben, en alguna medida, a recursos internos asociados al aprendizaje del número entero, entre los que se encuentran la inmersión, la imaginación, las habilidades intelectuales del lenguaje y la intuición, de acuerdo con Claxton (2001). En correspondencia con Shunk (2012), en relación a lo que es el aprendizaje y teniendo en cuenta dichas dificultades, su reconocimiento se da por medio de las habilidades mostradas, las estrategias, creencias, actitudes y conductas manifiestas por parte de los participantes a través de sus respuestas, la observación y del mismo modo la verbalización.

De otro lado, el tratamiento de los signos y la comprensión atienden a factores internos, de tal manera que los errores, traducidos en dificultades, se identifican en el uso y aplicación de los signos que derivan de la no comprensión, conceptual o procedimental, al momento de desarrollar actividad matemática que les involucra. Por su parte, la atención y el tiempo atienden tanto a recursos internos como externos para el aprendizaje, en la medida que no depende exclusivamente de quien aprende el control y aprovechamiento del tiempo y la atención.

Lo anterior se explica, por ejemplo, al concluir que la comprensión se asocia, directa o indirectamente a las demás dificultades encontradas, tanto a nivel conceptual como procedimental, influyendo así en el aprendizaje del número entero desde el tratamiento de los signos dada su incomprensión. Así mismo, desempeños positivos en la comprensión hacen que se requiera menor cantidad de tiempo tanto para el aprendizaje como para el desarrollo de actividad matemática y viceversa, de tal modo que el aprovechamiento inadecuado del tiempo influye en dichas dificultades, obstaculizando la comprensión, pero también la atención. Se concluye que este último factor, la atención, llega a determinar y favorecer la comprensión en algunos casos, así como la incomprensión desencadena en falta de atención.

Dicho relacionamiento se estableció con el tratamiento de los datos a través de la codificación mediada por Atlas.ti. En este sentido, se destaca la utilidad de este software durante dicho tratamiento, en cuanto favoreció considerablemente la desintegración e integración de los datos, ejercicios propios a los procesos de codificación descritos en la teoría fundamentada y que se correlacionan de manera directa con las funciones que dispone este software, pues como se describió en el capítulo 3, apoya la organización, análisis e interpretación de los datos, fundamentales para un estudio cualitativo como el desarrollado con la presente investigación.

En relación a lo anterior, se soporta y resalta el uso de Atlas.ti, además de recomendarlo para el desarrollo de estudios similares en cuanto a método y diseño investigativo, como lo hace también Varguillas (2006). En el reconocimiento de similitudes y diferencias entre los datos, este software fue de gran utilidad, pues de manera simultánea recopiló todos los códigos utilizados para su ordenamiento y visualización, tareas primordiales al momento de establecer relaciones entre ellos. Es importante aclarar que no fue una tarea fácil y se requirió de revisar en repetidas ocasiones, a la luz de los datos, los códigos asignados en un inicio, puesto que era necesario poseer suficiente claridad respecto a las propiedades y dimensiones de los mismos, volviendo así constantemente a las respuestas proporcionadas por los participantes en los dos instrumentos utilizados. Sin embargo, hubiese sido más complejo lograrlo sin la mediación de este software.
De esta forma, se da cumplimiento al segundo objetivo: reconocer similitudes o diferencias en las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje del número entero.

Así mismo, se retomaron las conexiones establecidas con el cumplimiento del objetivo anterior. En la tarea de establecer relaciones entre los datos, se configuraron y definieron cuatro categorías con sus respectivas subcategorías frente a factores asociados a dichas dificultades, cuyo análisis permitió el reconocimiento de factores asociados a ellas, es decir, factores que se le asocian, y para lograrlo fue aún más útil el software Atlas.ti, puesto que dentro de sus opciones, cuenta con la creación de redes, herramienta que a través de la visualización y ordenamiento favoreció el establecimiento de estos elementos con la disposición de esquemas iniciales, pasos conducentes al análisis de factores asociados a ellas, de tal manera que surgieron los primeros esquemas teóricos.

Se concluye así, posterior al tratamiento de los datos, codificación y análisis de los mismos, que dichas categorías corresponden a la consciencia de la dificultad, la comprensión, el uso de signos y manejo del tiempo. La primera de ellas, consciencia de la dificultad, presenta como como subcategorías factores asociados el dominio conceptual, procedimental y condiciones necesarias para el aprendizaje; la comprensión, por su parte, se explica bajo la incomprensión del concepto matemático, la verbalización y el factor procedimental; de otro lado, el uso de signos se conecta directamente con dos subcategorías, las cuales corresponden a dos estructuras: aditiva y multiplicativa y, para finalizar, se encuentra el manejo del tiempo en cuarto lugar, relacionada con el papel del estudiante, la falta de atención y la reflexión. Es de anotar que no se establece una jerarquía entre ellas, lo que no compromete el orden anteriormente descrito.

No es posible desconocer así las implicaciones que tuvo establecer esta categorización, en tanto que, se requirió la inmersión, una y otra vez, del investigador en los datos, volver a ellos para descubrir regularidades que les correspondían y así poder continuar con el proceso, modificando constantemente los esquemas hasta lograr aquellos que los relacionaran de acuerdo al proceso de análisis, llegando al reconocimiento de diversos factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero.

Con el establecimiento de categorías y subcategorías en referencia a factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero, en correspondencia con la teoría fundamentada y la mediación de Atlas.ti, se procedió al refinamiento de la teoría emergente de los datos, para ello se partió del ordenamiento e integración de los mismos por medio de un esquema de red, definido en el capítulo 3 y como otra de las herramientas que ofrece este software. Nuevamente se requirió la inmersión en los datos y en los procesos ya desarrollados, con lo que se logró configurar un esquema teórico, tras constantes revisiones y ajustes, que determina y explica relaciones de influencia entre el aprendizaje del número entero y las dificultades encontradas, favoreciendo la comprensión del fenómeno y que posibilita el alcance del cuarto objetivo: determinar posibles relaciones de influencia entre el aprendizaje de los números enteros y las dificultades manifestadas por estudiantes de octavo grado, con la mediación del software Atlas.ti.

En este orden de ideas, se llega hasta la identificación y descripción de dichos factores, de manera tal que se reafirma el papel que desempeña la comprensión dada la presencia de dificultades asociadas al aprendizaje del número entero, es decir, se reconoce su influencia en las dificultades encontradas. El establecimiento de esta categoría, permitió asociarla, en mayor o menor medida, con las demás, ya que en todos los casos hay asociaciones entre ellas, como se ha referenciado antes. En correspondencia con los resultados obtenidos, se logra la consecución del tercer objetivo: identificar factores asociados a dificultades relacionadas con el aprendizaje del número entero.

Cada una de estas etapas aportó al análisis de los factores asociados a dificultades relacionadas con el aprendizaje del número entero, proceso en el que se establecieron cuatro categorías: comprensión, consciencia de la dificultad, uso de signos y manejo del tiempo, para explicar los factores asociados y que se esconden tras dichas dificultades, hecho que se considera como un aporte valioso para el campo de la educación matemática, al determinar relaciones de influencia entre ellas y las dificultades presentes, al mismo tiempo que se establecen relaciones internas entre cada categoría para explicar y comprender el fenómeno.

5.2.2. Conclusiones finales respecto a la categorización

5.2.2.1. Manejo del tiempo

En relación a esta categoría, se considera como un aporte novedoso para el estudio de dificultades asociadas al aprendizaje de las matemáticas, en especial del número entero, en tanto no se identificaron estudios previos referentes a este factor. Si se parte del establecimiento de relaciones directas con la presencia de dificultades en el aprendizaje del número entero, con base en los resultados de esta investigación, se concluye que su uso deriva, principalmente, en falta de atención que a la vez genera poca concentración, del mismo modo que se relaciona con la reflexión, lo cual implica un incipiente manejo de recursos internos para el aprendizaje.

De esta manera, se establecen relaciones entre recursos internos y externos al partir de los resultados obtenidos, al conectar por ejemplo a la comprensión con el tiempo, dado que un correcto aprovechamiento de este último tiende a favorecer la comprensión, y al lograr la comprensión, conceptual o procedimental, puede lograrse una mayor optimización de este recurso. También se concluye que esta categoría, en algunos casos, llega a convertirse en factor generador de presión que influye en los procesos de aprendizaje y verificación del mismo en relación al número entero, bien sea por el desaprovechamiento del mismo o la no disposición adecuada u oportuna de este recurso.

5.2.2.2. Uso de signos

Se define al uso de signos como uno de los principales factores que determina la presencia de dificultades en el aprendizaje del número entero, relacionado directamente con las estructuras aditiva y multiplicativa, situación que deriva del proceso de codificación y análisis realizado. De un lado, por las manifestaciones dadas directamente por los participantes, es decir, en la medida que son conscientes que el uso de signos con números enteros les genera dificultades que obstaculizan su proceso de aprendizaje, pero en otros casos, aunque no existe ese nivel de reconocimiento, igualmente se identifica dicha relación.

De manera simultánea, se establece que, durante el abordaje de esta categoría, ella logra desencadenar en la incomprensión del concepto matemático, evidenciable en las conexiones establecidas a partir del esquema teórico configurado en la codificación selectiva. Además de lo anterior, se concluye también que puede generar confusiones tanto desde el campo de aplicación conceptual como desde lo procedimental, situaciones que se convierten en barreras para el aprendizaje.

Se concluye, además, a partir de los resultados, que el no poseer claridad respecto a las propiedades en el uso de los signos más y menos con números enteros, genera dificultades en su aprendizaje, de la misma forma que lo hace el transferir propiedades de una estructura a la otra, en el caso de las estructuras aditiva y multiplicativa, es decir, en el momento que se multiplican signos cuando no hay que hacerlo, incluso cuando se debe hacer pero no se aplica correctamente, profundizando así en el estudio y comprensión de esta categoría y del fenómeno en general.

5.2.2.3. Consciencia de la dificultad

Respecto a esta categoría, con el presente estudio se complementa los trabajos realizados por Sepúlveda et al. (2016) e Inostroza (2018), en la medida que ellos reconocen, entre las principales causas de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, a las originadas por el estudiante, pero sin ahondar en ellas.

En este caso, se profundiza en la comprensión de dificultades asociadas al aprendizaje del número entero con estudiantes de octavo grado, sentido en el que se llega al reconocimiento de factores asociados a estas dificultades y que parten, principalmente, del dominio conceptual y procedimental del mismo, además de la ausencia de condiciones necesarias para el aprendizaje. De esta forma, se concluye que en algunos casos se da el reconocimiento de dicha dificultad por parte de quien aprende, pero también es posible que dada su presencia no haya consciencia sobre ella, de tal manera que se establecen relaciones entre esta categoría y la comprensión, dado que se identifican dificultades a partir de la comprensión conceptual pero también de la comprensión procedimental respecto al número entero, esto al enfrentarse al desarrollo de actividad matemática.

Respecto a las condiciones necesarias para el aprendizaje, se reconoce que ellas atienden a dos líneas: de un lado, las que dependen y se relacionan a factores internos de quien aprende, en este caso se refiere la memoria, la inmersión, la reflexión, la atención y la resistencia y, de otro lado, se identificaron factores externos que se asocian a estas dificultades, entre los que se ubica al tiempo, la empatía maestro-estudiante, la dependencia del otro y la distracción, está última generada por situaciones ajenas al estudiante pero que influyen directamente en la generación de barreras y de las cuales se puede llegar a ser consciente, retomando propuestas como la de Claxton (2001) en relación a los recursos para el aprendizaje.

5.2.2.4. Comprensión

En el proceso de identificar factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero, y partiendo de los hallazgos del presente estudio, se concluye que la comprensión desempeña un papel fundamental dado el reconocimiento de su presencia. En este orden de ideas, y en correspondencia tanto a los EBC en matemáticas como al tratamiento de los datos, se define en dos líneas, la comprensión conceptual y la comprensión procedimental, lo anterior con sustento en el análisis realizado a partir de los instrumentos aplicados, puesto que se reconoce la presencia de dificultades en los participantes a partir de estas líneas al notar, en algunos casos la incomprensión acerca del número entero y en otros, la incomprensión del hacer en referencia al mismo conocimiento matemático.

De manera similar, se vincula a la comprensión con la verbalización, en el sentido que permite reconocer qué tanto se ha comprendido, o qué tanto no, en relación al ámbito conceptual pero también a lo procedimental, puesto que por medio de ella se exponen los argumentos y constructos que se elaboran respecto a este conocimiento y, como se evidencia en los datos, los silencios y dudas también hacen parte de la verbalización en la medida que muestran niveles de incomprensión.

Sobre esta misma categoría, se concluyen vínculos con el manejo del tiempo, bien sea en relación a la comprensión del concepto o a la comprensión de lo que se debe hacer, ya que se evidencia que en ambos casos se requiere la inversión de mayor cantidad de tiempo y por lo tanto afecta directamente el aprendizaje del número entero. De otro lado, es probable que esta categoría esté asociada también a la comprensión y dominio que poseen los docentes, en tanto se requiere que “tengan claro qué es lo que están enseñando, cómo lo están enseñando y para qué lo están enseñando”, como lo señala Pozo (2002, citado en Maca Díaz, 2016, pág. 196), puesto que si tiene falencias en este sentido, así mismo le pueden ser transmitidas a los estudiantes, aunque este no haya sido punto de atención de la investigación.

Partiendo de las conclusiones obtenidas en cada categoría, se deducen y establecen asociaciones entre la comprensión y las demás (uso de signos, consciencia de la dificultad y manejo del tiempo), en razón de que se evidencian conexiones, directas o indirectas tanto desde lo conceptual como lo procedimental, ambos elementos asociados, como se ha expuesto, a dichas categorías. En este sentido, aporta a la integración, pero al mismo tiempo a la comprensión de este fenómeno, como se propuso desde un inicio, en la tarea de establecer factores asociados a dificultades en el aprendizaje del número entero.

5.3. Recomendaciones

Para futuras investigaciones, se recomienda prestar especial atención al factor tiempo, en tanto se considera como influyente ante la presencia de dificultades en el aprendizaje, en este caso del número entero, así mismo la sugerencia para que los maestros atiendan a su identificación durante los procesos de clase, reconociendo no sólo productos o resultados de aprendizaje, sino los procesos que se desarrollan con el transcurrir del tiempo, para obtener una visión más amplia y objetiva sobre los procesos de aprendizaje que lleva a cabo el estudiante.

Se concluye, de igual manera, en la necesidad e importancia de trascender en las formas de evaluar. Esto, en el sentido que al permitirse el conocimiento de lo que se esconde tras una respuesta, por lo general escrita, se favorece el reconocimiento de los procesos que internamente pueden ejecutar los estudiantes, más aún cuando se hace referencia a dificultades en el aprendizaje del número entero. No es suficiente con reconocer su presencia.

El software Atlas.ti, facilitó la construcción de un esquema de red en correspondencia con los propósitos investigativos, el cual permitió no sólo mostrar la red establecida entre los datos sino también un análisis y revisión de las regularidades entre los mismos datos, proceso que favoreció no sólo el análisis de los datos sino también la consolidación de un esquema teórico. Por tal motivo, se considera que la utilización de este software fue muy apropiada en la realización de este estudio y por lo tanto se invita a su utilización para fortalecer los procesos de codificación y análisis.

El abordaje metodológico y análisis logrado, a partir de la teoría fundamentada y el uso del software Atlas.ti, vislumbra una estructura que puede ser tenida en cuenta para el desarrollo de futuras investigaciones, que busquen analizar y describir procesos en relación a dificultades de aprendizaje en el campo de las matemáticas u otros procesos que considere el investigador.

Los resultados de esta investigación favorecen la comprensión del fenómeno estudiado, como ya se ha expuesto, pero también se abren las puertas para continuar con nuevos estudios, especialmente en lo referido a lo comprensión, tal como se ha sugerido de igual manera en repetidas ocasiones.

Aunque la investigación no se centró en el papel que desempeña el maestro de matemáticas, si se hace un llamado a revisar el nivel de comprensión que se posee respecto al concepto del número entero para así evitar la transmisión de errores o generación de dificultades al respecto en los estudiantes.

Por último, pero no menos importante, se considera necesario, por parte del docente, tener presente el proceso histórico y evolutivo por el que ha transitado el concepto de número entero, dada su complejidad como objeto matemático. En este sentido, reconocer la precensia de obstáculos, errores y dificultades durante los procesos de enseñanza y aprendizaje, atendiendo a las estructuras que se asocian a dicho concepto, en especial la aditiva y la multiplicativa.

Referencias bibliográficas

Aponte Bello, P. A., y Rivera Martínez, M. A. (2017). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del número entero presentadas en un objeto virtual de aprendizaje.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Recuperado de: https://repository.udistrital.edu.co/bitstream/handle/11349/12897/AponteBelloPaulaAndrea2018.pdf?sequence=2&isAllowed=y

Ausubel, D. (1983). *Teoría del Aprendizaje Significativo.* Fascículos de CEIF.

Becerra, O., Buitrago, M., Calderón, S., Cañadas, M., & Gómez, p. (2016). Adición y sustracción de números enteros. Universidad de los Andes. Recuperado de: https://core.ac.uk/download/pdf/43009358.pdf

Bell, A. (1986). Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. Enseñanza de las ciencias , 199 - 208.

Blakemore, S. J., y Frith, U. (2008). *Cómo aprende el cerebro. Las claves para la educación.* Barcelona: Ariel.

Campos Arenas, A. (2005). *Mapas conceptuales, mapas mentales y otras formas de representación del conocimiento.* Bogotá: Editorial Magisterio. Recuperado de: https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=pVW0_6H8ZK8C&oi=fnd&pg=PA9&dq=Mapas+conceptuales,+mapas+mentales+y+otras+formas+de+representaci%C3%B3n+del+conocimiento&ots=8wqZwMJvNP&sig=9QuJizhwvdBL_8kz6Dm6NrO6qfo#v=onepage&q=Mapas%20conceptuales%2C%20mapas%20mentales%20y%20otras%20formas%20de%20representaci%C3%B3n%20del%20conocimiento&f=false

Cid Castro, M. E. (2016). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. Zaragoza: Universidad de Zaragoza. Recuperado de: https://zaguan.unizar.es/record/112529/files/TESIS-2022-085.pdf

Claxton, G. (2001). *Aprender. El reto del aprendizaje continuo.* España: Editorial Paidós.

Dehaene, S. (2016). *El cerebro matemático: Cómo nacen, viven y a veces mueren los números en nuestra mente.* Argentina: Siglo Veintiuno Editores. Recuperado de:

Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En R. Duval, y A. Sáenz-Ludlow, *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (págs. 61 - 94). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Recuperado de: https://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/comprension_y_aprendizaje_en_matematicas_perspectivas_semioticas_seleccionadas.pdf

Fernández Carreira, C. (2013). *Principales dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. Pautas para maestros de Educación Primaria.* Barcelona: Universidad Internacional de la Rioja. Recuperado de: https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/1588/2013_02_04_TFM_ESTUDIO_DEL_TRABAJO.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Flores, P. (2003). Aprendizaje en matemáticas. *Extraído de: http://www. ugr. es/~ pflores/textos/cLASES/CAP/APRENDI. pdf.* Recuperado de: https://www.ugr.es/~pflores/textos/cLASES/CAP/APRENDI.pdf

Fonseca Tamayo, F., López Tamayo, P., y Massagué Martínez, L. (2019). La discalculia un trastorno específico del aprendizaje de la matemática. *Revista CientíficoEducacional de la provincia de Granma*, 212 - 224. Recuperado de:

https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6840450

Gallardo, A., & Basurto, E. (2010). La negatividad matemática: antesala histórica de los números enteros. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME,* 255 - 268. Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/335/33558827002.pdf

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Granada: Universidad de Granada. Recuperado de: http://repositorio.minedu.gob.pe/bitstream/handle/20.500.12799/4829/Fundamentos%20de%20la%20ense%c3%b1anza%20y%20el%20aprendizaje%20de%20las%20matem%c3

%a1ticas%20para%20maestros.pdf?sequence=1&isAllowed=y

González, J. L., Iriarte, M. D., Jimeno, M., Ortíz, A., Ortíz, A., Sanz, E., & Vargas-Machuca, I. (1990). *Números enteros.* España: Síntesis S. A.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., y Baptista Lucio, P. (2010). *Metodología de la Investigación (5ta. ed.).* México D. F.: Mc Graw Hill.

Hudson, D. (2017). *Dificultades específicas de aprendizaje y otros trastornos.* Madrid: Narcea.

Inostroza-Inostroza, F. A. (2018). Creencias pedagógicas respecto de las dificultades específicas del aprendizaje de las matemáticas desde la perspectiva de las educadoras diferenciales en una escuela pública de Chile. *Revista Electrónica Educare*, 265-286. Recuperado de: https://www.scielo.sa.cr/pdf/ree/v22n3/1409-4258-ree-22-03265.pdf

Iriarte Bustos, M. D., Jimeno Pérez, M., & Vargas-Machuca de Alva, I. (1991). Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros. Suma, 13 - 18.

Kilpatrick, J., Gómez, P., y Rico, L. (1998). *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia.* Bogotá: Universidad de los Andes. Recuperado de: https://repositorio.uniandes.edu.co/bitstream/handle/1992/40582/Educacionmatematica.pdf?sequence=2&isAllowed=y

Maca Díaz, A. J., & Patiño Giraldo, L. E. (2016). La enseñanza de los números enteros un asunto sin resolver en las aulas. Plumilla educativa, 194 - 210.

Minayo, M. C. (2010). Los conceptos estructurantes de la investigación cualitativa.

Salud colectiva, 251-261. Recuperado de: https://www.scielosp.org/article/ssm/content/raw/?resource_ssm_path=/media/assets/scol/v6n3/v6n3a02.pdf

Nacional, M. d. (1998). *Lineamientos curriculares Matemáticas.* Bogotá: MEN. Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Nacional, M. d. (2006). *Estándares Básicos de Competencias Matemáticas.* Bogotá: MEN. Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Ñancupil Poblete, J. C., Carneiro, R. F., & Flores Martínez, P. (2013). La reflexión sobre la práctica del profesor de matemática: el caso de la enseñanza de las operaciones con números enteros. Unión - Revista Iberoamericana de educación matemática, 37 - 46. Recuperado de: http://www.revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/788/499

Palencia Mendoza, G. E. (2019). *Estudio sobre referentes conceptuales en prácticas evaluativas que posicionan a estudiantes con dificultades de aprendizaje en matemática.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional. Recuperado de: http://upnblib.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/10893/TO-23603.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Parra, C. (1994). *Didáctica de las matemáticas.* Madrid: Ministerio de Educación. Recuperado de: https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=6EQbCgAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA3&dq=Did%C3%A1ctica+de+las+matem%C3%A1ticas&ots=JX2RjPBQBc&sig=HWJPR0TLecEmjBFiymgOG_snAro#v=onepage&q=Did%C3%A1ctica%20de%20las%20matem%C

3%A1ticas&f=false

Pérez Serrano, I., Alcalde Esteban, M., & Lorenzo Valentín, G. (2014). *Los números enteros y racionales, las magnitudes y la medida en el aula de primaria.* Universitat Jaume I. Servei de Comunicació i Publicacions. Recuperado de: https://core.ac.uk/download/pdf/61445048.pdf

Ramírez R., M., Acosta, M. L., Romero Roa, J. d., Gamboa Sulvara, J. G., Celi Rojas, V., Chappe Chappe, A., . . . de Armas Costa, R. (2013). *Los Caminos del Saber Matemáticas 7.* Bogotá: Santillana S.A.

Ramos Galarza, C. (2020). Los alcances de una investigación. *Revista de divulgación científica de la Universidad Tecnológica Indoamérica*, 1 - 5. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7746475

Rodríguez Arias, R. E. (2018). El estructuralismo como modelo epistémico que busca explicar la realidad social. *Revista venezolana de análisis de coyuntura*, 147 - 156. Recuperado de: https://www.redalyc.org/journal/364/36461095018/36461095018.pdf

Rojas Gómez, J. A., & Ariza Daza, A. A. (2013). Propuesta didáctica para la enseñanza de los números enteros. Revista científica, 542 - 545.

Romero Pérez, J. F. (2004). *Dificultades en el Aprendizaje: Unificación de Criterios Diagnósticos.* España: Junta de Andalucía. Recuperado de: https://cmapspublic.ihmc.us/rid=1NHQ6NB5W-2C6NP31-2B5W/R-Dificultades%20de%20Aprendizaje.pdf

Ruíz Ramírez, D. M. (2021). Enseñanza de los números enteros a través de los números relativos. Bogotá: Universidad Externado de Colombia. Recuperado de: https://bdigital.uexternado.edu.co/server/api/core/bitstreams/01ebabd1-aee4-4a6a-b210-304925c1a083/content

San Martin Cantero, D. (2014). Teoría fundamentada y Atlas.ti: recursos metodológicos para la investigación educativa. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 104 - 122. Recuperado de: https://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1607-40412014000100008&script=sci_abstract&tlng=pt

Schunk, D. H. (2012). *Teorías del aprendizaje. Una perspectiva educativa.* México: Pearson Educación.

Sepúlveda, A. O.-L. (2016). ¿A qué atribuyen los estudiantes de educación básica la dificultad de aprender matemática? *Revista de Orientación Educacional*, 105-119. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/8687/1/144-342-1-PB.pdf

Silva Bastidas, O. (2022). *Proceso de enseñanza-aprendizaje de números enteros y fracciones en estudiantes de octavo grado a través de modelización matemática como innovación pedagógica.* Valledupar: Universidad Santo Tomás. Recuperado de: https://repository.usta.edu.co/bitstream/handle/11634/44079/2022OmarisSilva.pdf?sequence=6&isAllowed=y

Socas Robayna, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. Horsori, 125 - 154.

Strauss, A., y Corbin, J. (2016). *Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada.* Colombia: Universidad de Antioquia. Recuperado de: https://play.google.com/books/reader?id=0JPGDwAAQBAJ&pg=GBS.PA235&hl=es&lr=&printsec=frontcover

Tabares Cano, D. E. (2021). La enseñanza de los números enteros desde la mirada de la teoría APOE, modalidades y métodos de enseñanza. Medellín: Universidad Nacional de Colombia. Recuperado de: https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/79829/1032327968.2021.pdf?sequence=2&isAllowed=y

Tamayo, F. F. (2019). La discalculia un trastorno específico del aprendizaje de la matemática (Revisión). *Roca: Revista Científico-Educaciones de la provincia de Granma*, 212-224. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6840450

Torres Ninahuanca, C. (2000). *Números enteros: origen e historia.* Lima: Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Recuperado de: http://www2.udec.cl/~patsalas/index_archivos/enteros_anexo.pdf

Trindade, V. A. (2016). Entrevistando en investigación cualitativa y los imprevistos en el trabajo de campo: de la entrevista semiestructurada a la entrevista no estructurada. En *Técnicas y estrategias en la investigación cualitativa* (págs. 18 - 34). Recuperado de: https://web.archive.org/web/20190511171034id_/http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/53686/Documento_completo__.pdf?sequence=1#page=18

Tussy, A. S., & Koenig, D. R. (2020). *Matemáticas básicas.* México: Cengage

Learning Editores S.A.

Varguillas, C. (2006). El uso de Atlas.Ti y la creatividad del investigador en el análisis cualitativo de contenido upel. Instituto pedagógico rural el mácaro. *Laurus,* 72 - 87. Recuperado de: https://www.redalyc.org/pdf/761/76109905.pdf

Vílchez Marín, M. (2014). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de E.S.O. respecto al concepto de número entero. Estudio exploratorio.* Granada: Universidad de Granada. Recuperado de: https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/TFM%20M.Vilchez.pdf

ANEXOS

Estándares Básicos de Competencias en matemáticas, grados 6º y 7º

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS	PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS	PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS
1. Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las medidas. 2. Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones. 3. Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos. 4 Justifico la elección de métodos e instrumentos de cálculo en la resolución de problemas.	5. Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos. 6. Identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.	7. Resuelvo y formulo problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas). 8. Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud.

Derechos Básicos de Aprendizaje en matemáticas, grados 6º y 7º

DBA 6º	Evidencia
a. (1) Interpreta los números (enteros, fraccionarios y decimales) con sus operaciones en diferentes contextos al resolver problemas de variación, repartos, particiones, estimaciones, etc., y reconoce y establece diferentes relaciones (orden y equivalencia) y los utiliza para argumentar procedimientos sencillos.	Resuelve problemas en los que intervienen cantidades positivas y negativas en procesos de comparación, transformación y representación. Propone y justifica diferentes estrategias para resolver problemas con números enteros, fraccionarios y decimales en contextos escolares y extraescolares. Representa en la recta numérica la posición de un número utilizando diferentes estrategias. Interpreta y justifica cálculos numéricos al solucionar problemas.
b. (2) Utiliza las propiedades de los números (enteros, fraccionarios y decimales) y las propiedades de sus operaciones para proponer estrategias y procedimientos de cálculo en la solución de problemas.	Propone y utiliza diferentes procedimientos para realizar operaciones con números enteros, fraccionarios y decimales.
c. (7) Reconoce el plano cartesiano como un sistema	Localiza, describe y representa la posición de un objeto en un plano cartesiano.

bidimensional que permite ubicar puntos como sistema de referencia gráfico o trayectorias como sistema geográfico.	

DBA 7º	Evidencia
d. (1) Establece e identifica las operaciones (suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación) en el conjunto de los números racionales para resolver problemas en contextos escolares y extraescolares.	Describe situaciones en las que los números enteros y racionales y sus operaciones están presentes. Utiliza los signos “positivo” y “negativo” para describir cantidades relativas con números enteros y racionales.

e. (2)Describe y utiliza diferentes algoritmos, convencionales y no convencionales, al realizar operaciones entre números racionales en sus diferentes representaciones (fracciones, números decimales, números mixtos) y los emplea con sentido en la solución de problemas.	Representa los números enteros y racionales en una recta numérica. Construye representaciones geométricas y pictóricas para ilustrar relaciones entre cantidades. Describe procedimientos para calcular el valor de una operación (suma, resta, multiplicación y división) entre números enteros y racionales.

f. (4) Utiliza escalas apropiadas para representar e interpretar planos, mapas y maquetas con diferentes unidades.	Expresa la misma medida con diferentes unidades según el contexto. Representa e interpreta situaciones de ampliación y reducción en contextos diversos.

Consentimiento informado a padres para

recolección y

tratamiento de datos investigativos

Ciudad,

Yo, ____, identificado (a) con cc ____________________ expedida en ________________ como titular de la información manifiesto que he sido invitado (a) a representar a ______________________________ para que participe dentro de la investigación ____, adelantada por la Universidad Metropolitana de Educación, Ciencia y Tecnología (UMECIT) de Panamá, como encargada y responsable del manejo de la información que entregaré y que se regirá por las siguientes condiciones:

PRIMERA – OBJETIVO: La investigación tiene como objetivo formular categorías en dificultades de aprendizaje del número entero, teniendo en cuenta factores asociados a las mismas con estudiantes de octavo grado de la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Jericó Antioquia. **SEGUNDA – USO Y TRANSFERENCIA DE LA INFORMACIÓN:** 1. El uso de la información está bajo reserva y custodia de la UMECIT, como encargada y responsable de la información. 2. Que el manejo y transferencia de datos a terceros es responsabilidad en su transmisión y protección por parte de la UMECIT. 3. La manifestación de la autorización del manejo de la información está en manos del titular o en sus ausencias sus causahabientes o el representante legal del titular. 4. Y lo que establezca la ley 1581 de 2012. **TERCERA – RIESGOS Y BENEFICIOS:** Las encuestas o entrevistas y la obtención de la información sobre la caracterización de dificultades en el aprendizaje no implican riesgo alguno. Es pertinente aclarar que el titular no recibirá ningún tipo de remuneración en dinero. **CUARTA – CONFIDENCIALIDAD:** La identidad del titular será resguardada porque se utilizarán pseudónimos en vez de sus nombres. Durante la investigación el titular puede sentirse en libertad de responder o no las preguntas; así como también puede el titular retirarse del estudio en caso de que no desee continuar en él. El estudio cuenta con la aprobación del Comité de Ética de la UMECIT y no implicará daños previsibles para usted, ni tampoco para la Institución Educativa.
QUINTA – DERECHOS DEL TITULAR DE LA INFORMACIÓN: El titular de la información tiene como derechos: 1. Acceder, conocer, actualizar y ratificar sus datos personales frente a la UMECIT en su condición de encargado y responsable del tratamiento. 2. Ser informado por la UMECIT, previa solicitud, respecto del uso que se les ha dado a sus datos personales. 3. Revocar la autorización y/o solicitar la supresión del dato cuando en el tratamiento no se respeten

los principios, derechos y garantías constitucionales y legales. **SEXTA – DEBERES DEL ENCARGADO Y RESPONSABLE DE LA INFORMACIÓN:** 1. Garantizar a la persona titular en todo tiempo, el pleno y efectivo ejercicio del derecho del hábeas data. 2. Solicitar y conservar, copia de la respectiva autorización otorgada por el titular para el tratamiento de datos personales. 3. Informar debidamente al titular sobre la finalidad de la recolección y los derechos que le asisten en virtud de la autorización otorgada. 4. Conservar la información bajo las condiciones de seguridad necesarias para impedir su adulteración, pérdida, consulta, uso o acceso no autorizado o fraudulento. 5. Garantizar que la información sea veraz, completa, exacta, actualizada, comprobable y comprensible. 6. Actualizar oportunamente la información, atendiendo de esta forma todas las novedades respecto de los datos del titular. Adicionalmente, se deberán implementar todas las medidas necesarias para que la información se mantenga actualizada. 7. Rectificar la información cuando sea incorrecta y comunicar lo pertinente. 8. Respetar las condiciones de seguridad y privacidad de la información del titular. 9. Tramitar las consultas y reclamos formulados en los términos señalados por la ley.

Declaro que he leído o me fue leído este documento en su totalidad y que entendí su contenido e igualmente, que pude formular las preguntas que consideré necesarias y que estas me fueron resueltas satisfactoriamente. Por lo tanto, decido participar DE MANERA LIBRE Y VOLUNTARIA en esta investigación. Por lo anterior autorizo a Diego Alejandro Cruz Echeverri, estudiante del programa de Doctorado en Ciencias de la Educación, para realizar los anteriores procedimientos.

____

_ Firma CC:
Fecha:

Instrumento 1: Guía - Taller

El presente instrumento tiene el propósito de recolectar datos en el desarrollo de la investigación titulada: ***Naturaleza de dificultades asociadas al aprendizaje de los números enteros, en estudiantes de grado octavo de educación básica secundaria.*** Amablemente, se solicita dar

respuesta a cada uno de los ejercicios propuestos de manera independiente y de acuerdo a los conocimientos que posea sobre el tema.
No se preocupe por los resultados, sólo trata de hacerlo a conciencia y con ayuda únicamente de la información proporcionada en el documento.

Nombre: ____
Institución Educativa: ____
Grado: ______________________ Fecha: ____

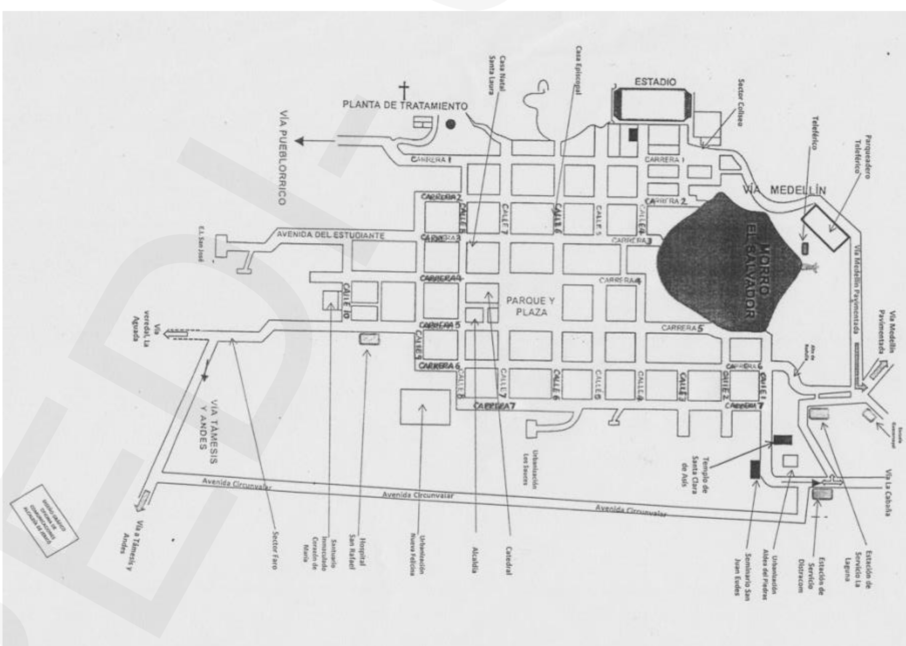
<u>Para tener en cuenta:</u>

Los **números naturales (N)** se utilizan básicamente para **contar** y para expresar cantidades enteras. Pero no son suficientes para expresar, por ejemplo, deudas o temperaturas bajo cero, por eso, es necesario recurrir a los **números negativos**.
Los números naturales, sus inversos negativos y el cero forman el conjunto de los números **enteros (Z).**

$$Z = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$$

El cero no es positivo ni negativo.

1. En la siguiente imagen se muestra la zona urbana de Jericó, con sus calles y carreras y la ubicación de algunos lugares importantes del mismo.



De acuerdo con lo observado, por ejemplo, si una persona se encuentra ubicada en el hospital del municipio y desea llegar a la casa natal Santa Laura, puede desplazarse 2 cuadras en sentido occidente (derecha) y desde ahí, 2 cuadras más en sentido norte (arriba).

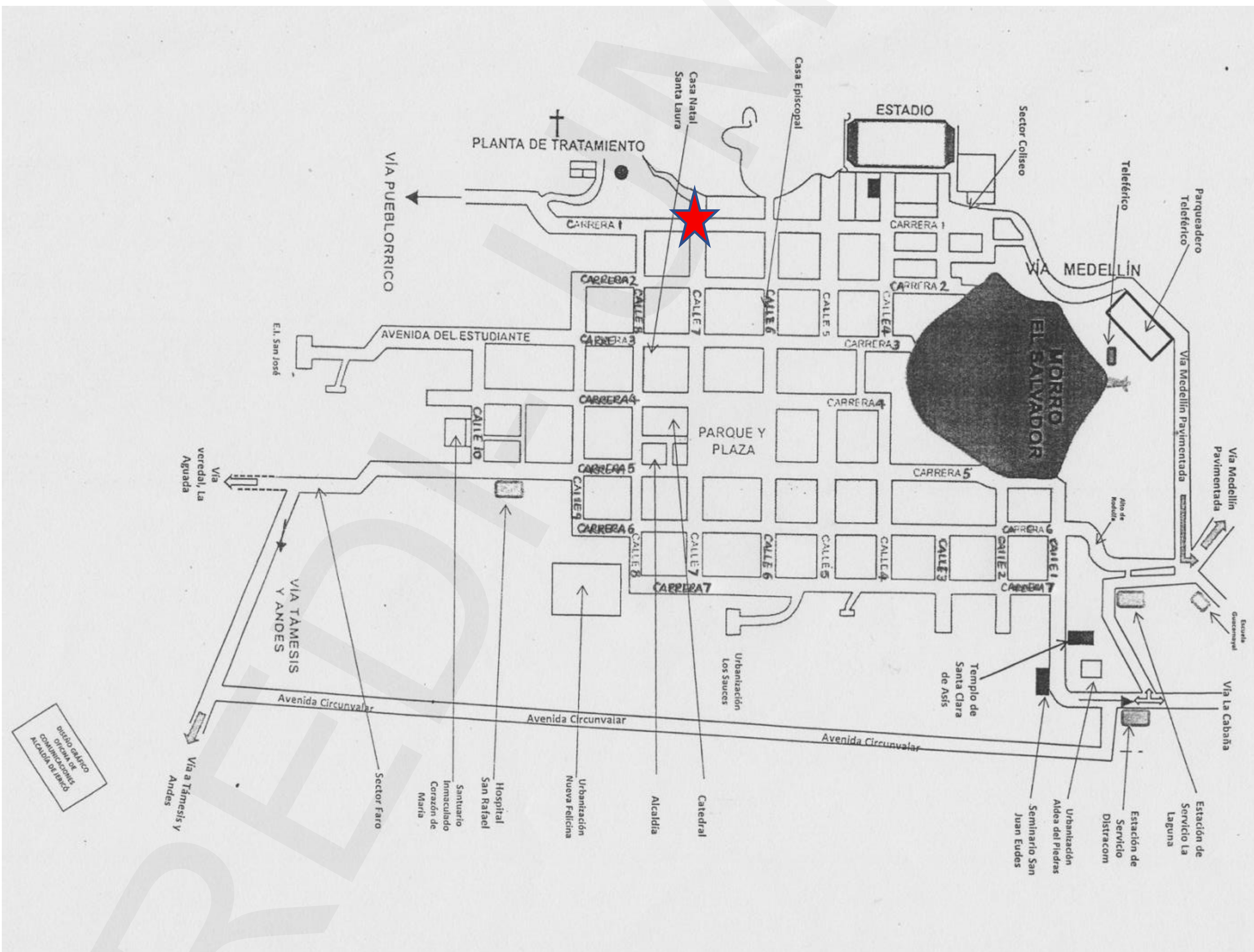
a) Pensando en la situación anterior, ¿qué indicaciones le darías a una persona que está en el Estadio y también quiere llegar hasta a la casa natal Santa Laura?

____
____
____

b) Ahora, si tuvieses que dar las mismas indicaciones utilizando sólo números, ¿de qué manera lo harías?

____
____
____

c) Observa el lugar señalado en el mapa con una estrella:



Si te desplazas desde allí siguiendo la dirección que indican las flechas, teniendo en cuenta que cada flecha representa el desplazamiento de una cuadra,

↓→→↑→↓↓←←←↓↓

¿a qué lugar del municipio llegarías? ____ Si debes indicarle el mismo recorrido a otra persona usando sólo números, ¿cómo lo harías?
____
____

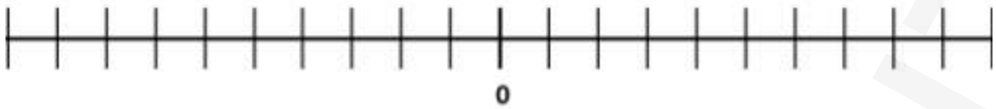
2. Escribe el número entero que corresponde frente a cada situación:

Situación	**Número entero**
Diego tiene una deuda de $65.200	
La altura del monte Everest sobre el nivel del mar es 8.884 m	
Ganó 20 puntos	
La temperatura anoche era de 1ºC bajo cero	
Laura apostó con su hermano y ha perdido $50.000	
El municipio de Bello está ubicado a 5 km al norte de Medellín	
El lago Victoria en África, tiene una profundidad de 82 m	

Para tener en cuenta:

Para ubicar números enteros en la **recta numérica**, se toma el cero como punto de referencia. A su **derecha,** se ubican los **números positivos**; a su **izquierda**, los **negativos**. La distancia entre dos números consecutivos debe ser igual en toda la recta.
Los números enteros se ordenan según su ubicación en la recta numérica. Cualquier número es **mayor** que los ubicados a su izquierda y **menor** que los ubicados a su derecha.
En consecuencia, cualquier número positivo es siempre mayor que cualquier número negativo; cualquier número negativo es siempre menor que cualquier número positivo; el cero es mayor que cualquier número negativo y menor que cualquier número positivo.

3. Ubica los siguientes números en la recta numérica: 1, -1, 5, 7, -5, 2, -3



4. Ordene los siguientes animales según la altura en la que habitan respecto al nivel del mar, de menor a mayor.

Animal	Habita en promedio sobre el nivel del mar
Abisal	- 5.500 m
Cóndor de los Andes	5.000 m
Gorrión	1.500 m
Oso de anteojos	3.800
Palometa	-400 m
Pez payaso	-50 m

____
____
____

5. Escribir los signos $>, <$ ó $=$, según corresponda:

a) -5 ________ -9
b) 19 ________ -12
c) -21 ________ -21
d) -72 ________ 37
e) -12 ________ 12
f) 0 ________ -1

<u>Para tener en cuenta:</u>

Para sumar y restar números enteros, se realizan los siguientes procedimientos:
$+6 + 15 = +21$ → Si ambos son **positivos**, se **suman** y el resultado es **positivo.**
$-3 + 21 = +18$

$+10 - 14 = -4$ → Si tienen **diferente signo**, al de **mayor valor absoluto** se le **resta** el de **menor valor absoluto**; el **resultado** lleva el **signo** del número de **mayor valor absoluto**.
$-9 - 6 = -15$ → Si ambos son **negativos**, se **suman** y el **resultado** es **negativo**.

6. Completar las siguientes tablas escribiendo el número que corresponde en cada espacio de acuerdo a la operación indicada, teniendo en cuenta que al ubicarte en cada casilla en blanco debes operar con los valores que se encuentran en ella, tanto hacia arriba como a su izquierda, como indican las flechas.

+	**17**	**-4**	**-12**
32	49		
-25			
0			

-	**10**	**-7**
16		
-4		
-20		

x	**4**	**0**	**-9**
8			
-15			
1			

Recuerda que para **multiplicar** o **dividir** dos números enteros, se aplica la **ley de los signos**.

Signo del primer factor o dividendo	**Signo del segundo factor o divisor**	**Signo del producto o cociente**

+	+	+
+	−	−
−	+	−
−	−	+

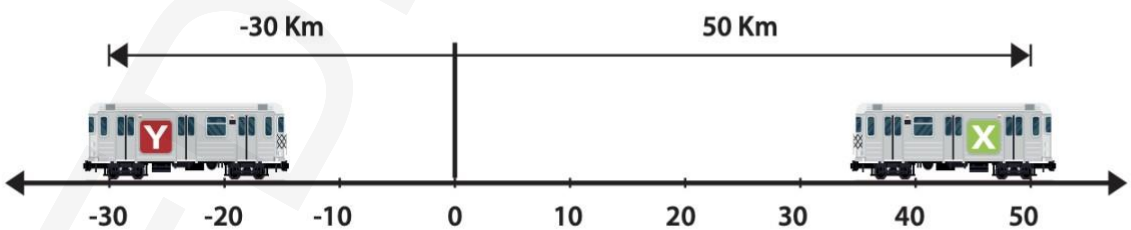
7. Resolver teniendo en cuenta la ley de signos para la división:

a) $(-60) \div (+5) =$ ________________________
b) $(+10) \div (2) \ \ =$ ________________________
c) $(32) \div (-4) \ \ =$ ________________________
d) $(-48) \div (-8) =$ ________________________
e) $(-60) \div (+5) =$ ________________________
f) $(144) \div (-12) =$ ______________________
g) $(-7 + 9) \div (2) =$ ______________________

8. Resuelve las siguientes situaciones problema, realizando las operaciones que te permitan llegar a la respuesta.

a) La temperatura en una habitación era de 21°C. Si la temperatura disminuye 3°C cada minuto, ¿al cabo de cuántos minutos la temperatura será de 0°C?

b) Dos trenes parten desde un mismo punto, pero en sentidos opuestos por una carrilera recta, como lo ilustra la gráfica. Si al cabo de cierto tiempo, el tren X ha recorrido 50 Km y el tren Y ha recorrido 30 Km, determine la distancia a la que se encuentran en ese momento.



c) Lucía lleva $25.000 en el bolsillo y hace un retiro en el cajero por valor de $50.000. Compra 2 litros de jugo a $1.500 cada uno y 5 manzanas a $2.000 cada una. Además, va al supermercado y compra productos de aseo por un total de $35.000. ¿Cuánto dinero tendrá al final?

d) Un caracol se encuentra en el fondo de un pozo de 6 metros de profundidad. Cada día recorre 2 metros hacia arriba y por la noche desciende un metro. ¿Cuántos días tardará en llegar a la superficie?

Instrumento 2: Entrevista semiestructurada

Tesis doctoral: ***Naturaleza de dificultades asociadas al aprendizaje de las matemáticas: números enteros, en estudiantes de grado octavo de educación básica secundaria.***

Nombre: ____

Institución educativa: ____ Grado: ______________________ Fecha: ____

La presente entrevista tiene el propósito de indagar, frente a posibles dificultades en el aprendizaje del número entero, las condiciones que las originan y pueden manifestarse de diversas formas. Al ser preguntas abiertas, es importante que no limites tus respuestas. Si no entiendes alguna pregunta, puedes solicitar aclaración para una mejor comprensión de la misma.

1. Describe por favor todo lo que hiciste momentos antes de desarrollar el instrumento número uno.
2. Describe, en general, cómo son tus clases de matemáticas.
3. ¿Sabes para qué te pueden servir los números enteros en la vida cotidiana?
4. ¿Qué crees que se necesita para aprender matemáticas?
5. De acuerdo con la respuesta anterior, ¿Consideras que tienes los elementos necesarios para aprender matemáticas?
6. ¿Crees que tienes alguna dificultad para aprender matemáticas? ¿Has sido diagnosticado con alguna dificultad de aprendizaje? En caso afirmativo, ¿cuál?
7. ¿Crees que tus familiares utilizan adecuadamente las matemáticas, o presentan dificultades para el uso de ellas?
8. Comenta alguna experiencia que hayas tenido con las matemáticas, positiva o no tan buena.
9. ¿Consideras que tu profesor de matemáticas facilita la comunicación, atiende preguntas e inquietudes y se esfuerza para que aprendas matemáticas?
10. ¿Puedes explicarme cómo respondiste la pregunta ***X***, por favor?
11. ¿Por qué crees que no respondiste correctamente la pregunta ***X***?
12. ¿Cómo te sientes cuando no respondes correctamente en clase de matemáticas?