

UNIVERSIDAD METROPOLITANA DE EDUCACIÓN,
CIENCIA Y TECNOLOGÍA
Decreto Ejecutivo 575 del 21 de julio de 2004
Acreditada mediante Resolución N°15 del 31 de octubre de 2012

DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

ENTREVISTA SOCRÁTICA DINÁMICA PARA LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE PARÁBOLA-ESDpCP COMO LUGAR GEOMÉTRICO CON LA MEDIACIÓN DE GEOGEBRA EN EDUCACIÓN MEDIA

Trabajo de grado presentado ante el programa doctoral como requisito para optar al grado de Doctor en Ciencias de la Educación**.**

Autor: William Eduardo Calderón Gualdrón

Tutor: René Alejandro Londoño Cano

República de Panamá
2021

REDIUMECIT

Dedicatoria

A la memoria de mi Madre.

RED-UNEFCIT

Agradecimiento

Agradezco:

En primer lugar, a mi esposa Sonia y a mis hijos, Lara Alexandra y William Alejandro, quienes son el motor de mi vida y quienes me impulsaron a culminar este reto.

A mi familia que me ha apoyado desinteresadamente.

A mi tutor, René Alejandro Londoño Cano, por haberme orientado en todos los momentos que necesité su apoyo.

A todas aquellas personas y colegas que me han apoyado durante el proceso de investigación y redacción de este trabajo: *sin su ayuda este logro no hubiese sido posible.*

RED-UNEFCIT

Entrevista Socrática Dinámica para la Comprensión del Concepto de Parábola-ESDpCP como Lugar Geométrico con la Mediación de GeoGebra en Educación Media

Trabajo presentado como requisito para optar al grado de
Doctor en Ciencias de la Educación

Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación

República de Panamá, 2021

Resumen

El objetivo de esta investigación fue diseñar una entrevista de carácter socrático con software dinámico, que cumpliera con los criterios de validez y confiabilidad, para evaluar la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, en el marco del modelo de van Hiele, en estudiantes de décimo grado de la Institución Educativa Francisco de Paula Santander de la ciudad de Bucaramanga, Colombia.

Se trabajó desde la comprensión holística de la ciencia. El tipo de investigación fue proyectiva y se usó el método holopráxico, con un diseño de fuente mixta, transeccional univariable. Se analizaron los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas-EBCM y los Derechos Básicos de Aprendizaje, de los grados sexto a once de educación básica y media colombiana, en relación con el concepto de parábola como lugar geométrico. Se analizaron los objetos matemáticos contenidos en las unidades de aprendizaje en función de la caracterización del mismo concepto y los tipos de pensamiento. También se analizaron los objetos matemáticos contenidos en las unidades de aprendizaje seleccionadas con base en los niveles de razonamiento desarrollados en el modelo de van Hiele. En el marco de este, se formularon los descriptores necesarios para caracterizar el nivel de razonamiento alcanzado por los estudiantes, los cuales permitieron diseñar la versión inicial de la entrevista socrática, la cual tuvo su estudio de validez y confiabilidad con una muestra piloto de 75 estudiantes. Finalmente, se configuró la entrevista socrática definitiva que permite describir la comprensión del concepto en estudio, de manera pertinente, válida y confiable.

Palabras claves: Didáctica de las matemáticas, competencias en matemáticas, modelo van Hiele, niveles de razonamiento, entrevista socrática dinámica, concepto de parábola, GeoGebra.

PREPRINT

Abstract

Dynamic Socratic Interview for the Understanding of the Concept of Parabola-ESDpCP as a Geometric Place with GeoGebra Mediation
in Secondary Education
Work presented as a requirement for the degree of
D. in Educational Sciences

Faculty of Humanities and Educational Sciences

Republic of Panamá, 2021

The purpose of this research is to design a Socratic interview with a dynamic software, which will be able to accomplish validity and reliability criteria, in order to evaluate the understanding of the concept of parabola as a geometric locus, according to van Hiele model, in tenth-graders at Francisco de Paula Santander school, located in Bucaramanga, Colombia.

This work was based on a holistic understanding of science. The type of research was projective and a holopraxic method was used, with a univariate transectional mixed source design. Basic Standards of Mathematics competences and Basic Learning Rights were analyzed, from sixth to eleventh-graders in middle and high school, regarding the concept of parabola as a geometric locus. Then, the mathematical objects contained in the learning units were analyzed in terms of the characterization of the same concept and the types of thinking. Also, the mathematical objects contained in the selected learning units were also analyzed based on the levels of understanding developed in van Hiele model. The necessary descriptors were formulated in order to characterize the level of understanding reached by the students, within the framework of van Hiele model, which allowed designing the initial version of the Socratic interview, in which validity and reliability studies were carried out with a pilot sample of 75 students. Finally, the definitive Socratic interview which allows describing the understanding of the concept under study was configured in a pertinent, valid and reliable manner.

Key words: Didactics of mathematics, mathematical competences, van Hiele model, levels of reasoning, Dynamic Socratic Interview, concept of parabola, GeoGebra.

PREPRINT

Índice general

Resumen ..... **iv**

Abstract ..... **v**

Índice general ..... **vi**

Lista de figuras ..... **x**

Lista de tablas ..... **xii**

Introducción ..... **xv**

CAPÍTULO I. CONTEXTUALIZACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA ..... **xviii**

1.1 Descripción de la problemática **19**

1.2 Formulación de la pregunta de investigación **29**

1.3 Objetivos de la investigación **29**

1.3.1 Objetivo general 29

1.3.2 Objetivos específicos 30

1.4 Justificación e impacto **31**

CAPITULO II. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA DE LA INVESTIGACIÓN **36**

2.1. Bases teóricas, investigativas, conceptuales y legales **37**

2.1.1 Bases teóricas 37

2.1.2 Bases investigativas 39

2.1.3 Bases conceptuales 57

2.1.4 Bases legales 97

2.2 Definición conceptual y operacional de las variables **100**

2.2.1 Eventos de estudio del primer objetivo específico 100

PREPRINT

2.2.2 Eventos de estudio del segundo objetivo específico 102
2.2.3 Eventos de estudio del tercer objetivo específico 103
2.2.4 Eventos de estudio del cuarto objetivo específico 105
2.2.5 Eventos de estudio del quinto objetivo específico 106
2.3.6 Eventos de estudio del sexto objetivo específico 107
2.3.7 Eventos de estudio del séptimo objetivo específico 108

2.3. Operacionalización de las variables 109

CAPITULO III. DISEÑO METODOLÓGICO 117

3.1. Paradigma, método y enfoque de investigación 118
3.1.1 Enfoque 118
3.1.2 Método 121

3.2. Tipo de Investigación 127

3.3. Diseño de la Investigación 127

3.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos 129

3.5. Población, muestra y muestreo 130

3.6. Procedimiento de la investigación 131

3.7 Validez y confiabilidad de los instrumentos 135
3.7.1 Validez de los instrumentos 135
3.7.2 Confiabilidad de los instrumentos 138

3.8. Consideraciones éticas 139
3.8.1 Criterios de confidencialidad 139
3.8.2 Descripción de la obtención del consentimiento informado 140
3.8.3 Riesgos y beneficios conocidos y potenciales 140

CAPÍTULO IV. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS 142

REPOSITORIO

4.1. Técnicas de Análisis de datos o hallazgos 143

4.1.1 Análisis de los EBC en Matemáticas y los DBA, según el concepto de parábola como lugar geométrico 143

4.1.2 Análisis de los objetos matemáticos contenidos en las unidades de aprendizaje, en función del concepto de parábola y los tipos de pensamiento. 154

4.1.3 Análisis de los objetos matemáticos contenidos en las unidades de aprendizaje seleccionadas, según los niveles de razonamiento del modelo de van Hiele 158

4.2. Procesamiento de los datos 161

4.2.1 Descriptores de nivel de razonamiento del concepto de parábola como lugar geométrico, según el modelo van Hiele 161

4.2.2 Diseño de la versión inicial de la entrevista socrática, que permitirá describir la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, por parte de los estudiantes, en función del modelo de van Hiele. 170

4.2.3 Análisis de la entrevista socrática diseñada, en términos de los criterios de validez y confiabilidad 172

4.3. Discusión de los Resultados 195

CAPÍTULO V. CONSTRUCCIÓN TEÓRICA 205

5.1 Conclusiones 206

5.2 Recomendaciones 210

CAPÍTULO VI. PROPUESTA 213

6.1. Denominación de la propuesta 214

6.2 Descripción de la propuesta 214

6.3 Fundamentación 215

6.4 Objetivos de la propuesta 217

6.4.1 Objetivo general 217

6.4.2 Objetivos específicos del instrumento 217

REPOSITORIO

6.5 Beneficiarios de la propuesta 218

6.6 Localización 219

6.7 Configuración y características del instrumento 219

6.8 Método 236

6.8.1 Procedimiento de administración 236

6.8.2 Procedimiento de puntuación 243

6.8.3 Tabla de Baremos 245

6.8.4 Interpretación de resultados 254

6.9 Cronograma 254

6.10 Recursos y requerimientos para la aplicación 255

6.10.1 Requerimientos 255

6.10.2 Recursos 255

6.10.3 Personal: Preparación del evaluador 255

6.11. Productos derivados de la propuesta 256

BIBLIOGRAFÍA 258

ANEXOS 274

REDIUNEP

Lista de figuras

Pág.

Figura 1. Representación gráfica de una recta móvil que describe la superficie de un cono doble. 40
Figura 2. Representación de una superficie cónica con plano paralelo a la generatriz 41
Figura 3. La Parábola 43
Figura 4. Parábola horizontal 43
Figura 5. Parábola vertical 44
Figura 6. Parábola horizontal con vértice 46
Figura 7. Parábola vertical con vértice (h, k) 47
Figura 8. Configuración de la educación media 59
Figura 9. Ideas centrales del Modelo de van Hiele 75
Figura 10. Niveles de razonamiento del modelo van Hiele 78
Figura 11. Fases del modelo van Hiele 82
Figura 12. GeoGebra pantalla principal (zonas) 93
Figura 13. Clasificación de los eventos de estudio para el primer objetivo específico de la investigación 100
Figura 14. Configuración de los eventos de estudio para el segundo objetivo específico de la investigación 102
Figura 15. Configuración de los eventos de estudio para el tercer objetivo específico de la investigación 103
Figura 16. Configuración de los eventos de estudio para el cuarto objetivo específico de la investigación 105
Figura 17. Configuración de los eventos de estudio para el quinto objetivo específico de la investigación 106

PREPRINT

Figura 18. Configuración de los eventos de estudio para el sexto objetivo específico de la investigación..... 107
Figura 19. Configuración de los eventos de estudio para el séptimo objetivo específico de la investigación..... 108
Figura 20. La espiral holística de la investigación..... 122
Figura 21. Correspondencia entre las unidades de aprendizaje de los Estándares, los DBA y los aspectos del concepto de parábola, para sexto y séptimo 146
Figura 22. Correspondencia entre las unidades de aprendizaje de los Estándares, los DBA y los aspectos del concepto de parábola, para octavo y noveno..... 148
Figura 23. Correspondencia entre las unidades de aprendizaje de los Estándares, los DBA y los aspectos del concepto de parábola, para décimo y undécimo..... 149
Figura 24. Red 4. Correspondencia entre los distintos tipos de pensamiento, las unidades de aprendizaje de los Estándares, y los aspectos del concepto de parábola 156
Figura 25. Red 5 Unidades de aprendizaje asociadas a los niveles de razonamiento del modelo van Hiele en relación con el objeto matemático 159
Figura 26. Red 6 - Niveles de razonamiento según modelo de van Hiele y los descriptores asociados a ellos..... 163
Figura 27. Instrumento Entrevista Socrática para la Comprensión del Concepto de Parábola como Lugar Geométrico 236

REPOSITORIO

Lista de tablas

Pág.

Tabla 1. Eventos a operacionalizar 110
Tabla 2. Operacionalización del evento concepto de parábola como lugar geométrico 111
Tabla 3. Operacionalización del evento tipo de pensamiento 112
Tabla 4. Operacionalización del evento objetos matemáticos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico 113
Tabla 5. Operacionalización para el evento Niveles de razonamiento según van Hiele. 114
Tabla 6. Operacionalización del evento comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico 115
Tabla 7. Operacionalización de la validez y confiabilidad del instrumento 116
Tabla 8. Holopráxica de la investigación 125
Tabla 9. Categorías asociadas al concepto de parábola para todos los grados 144
Tabla 10. Unidades de aprendizaje de los Estándares, los DBA y los aspectos del concepto de parábola de sexto a undécimo grado 151
Tabla 11. Categorías asociadas al concepto de parábola según el tipo de pensamiento 154
Tabla 12. EBCM relacionados con las unidades de aprendizaje, los tipos de pensamiento y el concepto matemático 157
Tabla 13. Categorías asociadas a los niveles de razonamiento de van Hiele 158
Tabla 14. Unidades de aprendizaje asociadas a los niveles de razonamiento según el modelo de van Hiele en relación con el objeto matemático 160
Tabla 15. Categorías asociadas al concepto de parábola como lugar geométrico de acuerdo al modelo de van Hiele y los descriptores asociados 161
Tabla 16. Descriptores asociados a cada nivel de razonamiento 164

REPOSITORIO

Tabla 17. Operacionalización de constructo comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico 167
Tabla 18. Formato inicial de validación por jueces 175
Tabla 19. Formato final de validación por jueces 177
Tabla 20. Formato final de validación por jueces 180
Tabla 21. Validez estructural a partir de sinergias-total 184
Tabla 22. Matriz de componentes rotados 186
Tabla 23. Resultado de la confiabilidad global de la entrevista socrática 189
Tabla 24. Estadísticas de la confiabilidad total de elemento 190
Tabla 25. Confiabilidad de la sinergia correspondiente al nivel predescriptivo 191
Tabla 26. Correlaciones ítem-total para la sinergia Reconocimiento visual 192
Tabla 27. Confiabilidad de la sinergia Reconocimiento visual 192
Tabla 28. Correlaciones ítem-total para la sinergia Reconocimiento visual 193
Tabla 29. Confiabilidad de la sinergia de Nivel Análisis 193
Tabla 30. Correlaciones ítem-total para la sinergia Análisis 194
Tabla 31Confiabilidad de la sinergia Clasificación 194
Tabla 32. Confiabilidad de la sinergia Clasificación 195
Tabla 33. Códigos para las categorías de los eventos de estudio y demográficos 244
Tabla 34. Categorías de clasificación a las respuestas de los estudiantes a cada ítem 244
Tabla 35. Baremos Nivel Predescriptivo 246
Tabla 36. Baremos Nivel reconocimiento visual 247
Tabla 37. Baremos Nivel de análisis 250
Tabla 38. Baremos Nivel de clasificación 252
Tabla 39. Nivel de clasificación de acuerdo al puntaje obtenido 254
Tabla 40. Participación de Ponencias Internacionales 256

PRINT

Lista de anexos

Pág.

Anexo A. Matriz de análisis de los aspectos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico 275
Anexo B. Matriz de análisis tipo de pensamiento 276
Anexo C. Matriz de análisis de los aspectos referidos a los objetos matemáticos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico 277
Anexo D. Matriz de análisis de los niveles de razonamiento según el modelo de van Hiele 278
Anexo E. Matriz de análisis de los aspectos referidos a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico 279
Anexo F. Versión preliminar de la entrevista Socrática 280
Anexo G. Validación por expertos del instrumento aspectos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico 281
Anexo H. Validación por expertos de la Matriz de Análisis, tipo de pensamiento (geométrico, numércio, variacional y métrico) 286
Anexo I. Matriz de análisis de los aspectos referidos a los objetos matemáticos asociados al concpeto de parábola como lugar geométrico. 290
Anexo J. Validación por expertos de la Matriz de análisis de los niveles de razonamiento según el modelo de van Hiele 294
Anexo K. Matriz de análisis de los aspectos referidos a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico 298
Anexo L. Constancias de validación por expertos 302
Anexo M. Productos de la investigación 305

REPOSITORIO

Introducción

La educación constituye un factor esencial tanto para las personas como para la sociedad en general, por una parte, porque establece el comportamiento y, por otra, porque favorece la formación de la identidad cultural y del avance constante de la sociedad pero, si bien la educación en general es muy importante, debe prestarse especial atención a los desafíos propios de la Educación Matemática, por cuanto involucra fenómenos de naturaleza compleja que exigen estudios e investigaciones tanto teóricas como experimentales, que permitan analizar, por un lado, los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, por otro, el diseño y desarrollo de estrategias para que los profesores puedan identificar, caracterizar y mejorar los fenómenos educativos inmersos en la comprensión de los conceptos matemáticos.

Frente a conceptos de carácter abstracto que se usan en matemáticas, los estudiantes presentan dificultades en su comprensión debido a que los conceptos abstractos denotan que no son concretos, por lo tanto, sus propiedades son observables solo a través de modelos o constructos teóricos, lo que hace necesario centrar la atención en la conceptualización matemática y no solo limitar su enseñanza a cálculos, operaciones y procesos memorísticos.

En la presente investigación se analiza la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico por su particular utilidad en contextos tales como estructuras en obras, análisis de equilibrio, resistencia o estabilidad de construcciones, aplicaciones en el movimiento y trayectorias, usados en ingeniaría, industria, deporte entre otros. Para tal efecto, se hace uso del modelo van Hiele para explicar el razonamiento y la comprensión de los estudiantes frente al concepto y la manera en que el profesor puede propiciar el avance por los niveles que postula; así mismo, se hace uso de la entrevista socrática y del software de geometría dinámica GeoGebra, para configurar lo que se ha denominado *entrevista socrática dinámica*.

A continuación, se mencionan los capítulos que componen este informe de investigación, y sus respectivos contenidos.

En el primer capítulo se presenta la contextualización del problema, en la cual se explican las motivaciones que dieron lugar a este trabajo, y se aportan datos y evidencias relacionadas con la problemática de la educación, el logro de competencias matemáticas y la evaluación de la comprensión de conceptos abstractos, como es el caso de la parábola como lugar geométrico. Así mismo, se formulan la pregunta de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos, que son la base del presente trabajo.

En el segundo capítulo se establece la fundamentación teórica de la investigación examinando los antecedentes históricos y legales, y analizando la importancia del concepto de parábola, su utilidad y aplicaciones. Además, se trabajan los conceptos asociados al modelo van Hiele, las características de la entrevista socrática y las características del software GeoGebra, entre otros aspectos.

El tercer capítulo expone los criterios metodológicos, con el paradigma, método y enfoque de investigación. Se presenta, además, el tipo de estudio, el diseño de investigación para cada objetivo específico, las técnicas e instrumentos de recolección de datos, población, muestra, procedimiento de investigación, y consideraciones éticas con base en los criterios de confidencialidad.

En el cuarto capítulo se presenta el análisis e interpretación de resultados, a partir del análisis de un engranaje teórico y metodológico de los EBCM, los tipo de pensamiento matemático y los -DBA propuestos por el Ministerio de Educación Nacional-MEN de Colombia, en conjunto con los niveles de razonamiento que postula en modelo de van Hiele y los objetos matemáticos subyacentes al concepto de parábola como lugar geométrico, lo cual derivó en la consecución del objetivo general del presente estudio. De esta manera se presentan los descriptores que emergen de la

investigación para caracterizar el nivel de razonamiento de los estudiantes acerca del concepto de parábola como lugar geométrico. Por último, se muestra la versión inicial de la entrevista socrática dinámica y los análisis psicométricos finales, así como la discusión de resultados.

En el capítulo cinco se presenta la construcción teórica con las conclusiones y recomendaciones.

Por último, el capítulo seis contiene la propuesta con la denominación, descripción, fundamentación, objetivos, beneficios, localización, configuración y características de la última versión de la entrevista socrática dinámica como instrumento, el método, cronograma, recursos y requerimientos para, finalmente, dar a conocer los productos de esta investigación.

.

RED-UNEG

CAPÍTULO I.
CONTEXTUALIZACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA

REDI-UNEOT

1.1 Descripción de la problemática

El hombre es un ser en continuo crecimiento, crecer significa evolucionar, desarrollarse, integrarse, crear, construir. Este crecimiento se realiza gracias a un permanente intercambio con el medio y ese medio es eminentemente social, además, este intercambio entre los actores de la sociedad influye en el avance y perfeccionamiento de los individuos que la conforman, desarrolla la cultura, el espíritu, los valores y todo aquello que define al ser humano.

La educación es un fenómeno que concierne a todas las personas. Desde que nacen, experiencias educativas como los primeros cuidados maternos, las relaciones sociales dentro del seno familiar o con los grupos de amigos, la asistencia a la escuela, entre otras, van configurando de alguna forma su modo de ser.

La educación constituye un factor esencial tanto para las personas como para la sociedad en general, por una parte, porque establece el comportamiento y, por otra, porque favorece a la formación de la identidad cultural y del avance constante de la sociedad, y por ende del país. Esto exige la implementación de políticas públicas que procuren su accesibilidad, ya que una sociedad compuesta por ciudadanos alfabetizados y educados puede asegurar un mejor futuro económico, político, social y cultural.

Si bien la educación en general es muy importante, debe prestarse especial atención a la educación media. Es necesario recordar que la educación media es un requisito mínimo para una completa participación socioeconómica. Organizaciones como la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico, OCDE, (2016), insisten en la importancia de este nivel para consolidar y profundizar las competencias y habilidades necesarias para continuar en la educación superior y poder ingresar al mercado laboral. Según Acosta et al. (2017), una política de educación media requiere

acciones integrales que logren incidir en el acceso de la población, su permanencia en el sistema educativo, la pertinencia y la calidad de los procesos. Si se tiene en cuenta lo anterior, es necesario pensar en una educación media como un ejercicio que exige la integración de políticas entre el sector educativo y el productivo para garantizar que exista coherencia entre las especialidades de la media y la generación de empleos de calidad.

Dentro del conjunto de asignaturas que se trabajan en el proceso educativo, la asignatura de matemáticas es fundamental para el desarrollo intelectual de los jóvenes, puesto que les ayuda a ser lógicos, a razonar ordenadamente y a tener su mente preparada para la crítica, el pensamiento y la abstracción; tal y como lo argumenta Ruiz (2016), las matematicas generan unas actitudes y valores en los estudiantes ya que garantizan una solidez en sus fundamentos, seguridad en los procedimientos y confianza en los resultados obtenidos.

Todo lo anterior crea en los estudiantes una disposicion consciente y favorable para emprender acciones que conducen a la solución de los problemas a los que se enfrentan cada día, es importate que los estudiantes sean capaces de comprender las matemáticas ya que, de esta manera, encontrarán soluciones lógicas y razonadas a muchas situaciones de la vida.

Por otro lado, hay que tener en cuenta que las matemáticas contribuyen a la formación de valores en los estudiantes, y determinan sus actitudes y conductas. Queda claro que las matemáticas sirven para toda la vida y es indispensable su enseñanza desde temprana edad. El éxito en la vida comienza por el éxito en las matemáticas.

Por su parte, la Geometría Analítica hace parte de los contenidos matemáticos que deben ser trabajados en la educación media del sistema educativo colombiano; los conceptos de ésta se emplean a nivel universitario en distintas áreas como Topografía, Física, Ingenierías, Biomatemática, Arquitectura, entre otras. Algunos ejemplos de su

importancia se pueden apreciar en la construcción de puentes, donde la forma parabólica permite a las fuerzas de compresión transferirse a las torres y durante esta transferencia la función tiende a cambiar al ampliar la distancia de su lado recto momentáneamente. Así mismo, las antenas satelitales y los radiotelescopios aprovechan el principio que los rige, concentrando señales recibidas desde un emisor lejano en un receptor colocado en la posición del foco (la tangente refleja los rayos paralelos al eje de la parábola en dirección al foco).

En ingeniería automotriz la propiedad elemental de que la normal a una parábola es la bisectriz de la paralela al eje, y de la recta que le une al foco, es de importancia vital para el fabricante de faros de automóvil y, por supuesto, para el técnico que planifica su producción. Un objeto parabólico tiene la particularidad de que si se incide un sonido en su foco, éste lo refleja de acuerdo a líneas paralelas. Esto tiene una aplicación en los anfiteatros al aire libre en los que la concha detrás del escenario se diseña para reflejar los sonidos hacia el auditorio.

La importancia de las cónicas es tal, que están referidas en cuatro de los Estándares Básicos en Competencias Matemáticas, EBCM (MEN, 2006) del sistema educativo colombiano. Estos estándares están asociados al pensamiento espacial de décimo grado (estudiantes de 15 años, aproximadamente), y se describen a continuación:

- Identificar en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.

- Identificar características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas.

PREPRINT

- Usar argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.

- Reconocer y describir curvas y lugares geométricos

Es oportuno mencionar que los estudiantes en la comprensión de conceptos matemáticos y, en especial, del concepto de parábola, presentan dificultades al apoyar su trabajo en procesos algorítmicos y memorísticos que dejan de lado la comprensión analítica del mismo. Esto lo reafirman Hernán et al. (2014) cuando señalan que hay desconocimiento de los componentes de la párabola, lo que indica que no pueden relacionar sus elementos de manera analítica.

Por otro lado, estos autores muestran que uno de los problemas acerca de la comprensión del concepto de parábola consiste en que los estudiantes no reconocen la parábola a partir de sus componentes y, por lo tanto, no hay relación analítica de la ecuación con los elementos que la conforman, es decir, no logran integrar la relación que existe entre el vértice, la directriz y el foco, confunden la simetría con el eje focal y la orientación del objeto, y tienen dificultad para utilizar los sistemas de representación que facilitan la interpretación de la parábola, porque no asocian la ecuación con la gráfica. En la misma línea, estos autores plantean que el tratamiento gráfico que deben realizar los estudiantes, en la comprension geométrica de la parábola, es muy complejo por la síntesis que deben realizar en los modos de representación gráfico, algebraico y analítico.

La problemática antes descrita relacionada con la comprensión de las secciones cónicas, ha sido documentada por autores como Just & Carpenter (1985) quienes reportan que estudiantes que terminan sus estudios de educación media, identifican las figuras cónicas en un contexto usual, y las enuncian o reconocen a nivel gráfico, pero al requerir realizar algunas de sus representaciones o mencionar las características, propiedades y aplicaciones, hay evidentes diferencias en su comprensión e

interpretación; lo mismo ocurre cuando se les pide reconocer la aplicación de sus propiedades y los elementos que las componen.

En el diseño curricular de los cursos de matemáticas de grado décimo de la educación media colombiana, se introduce la geometría analítica con conceptos algebraicos que permiten resolver problemas de distancia entre puntos y puntos medios; de esta manera se presenta la relación entre el álgebra y la geometría por primera vez. Seguidamente, se introduce la recta y, luego, las secciones cónicas.

No obstante, Pérez (2012) señala que en las instituciones educativas de la ciudad de Villavicencio-Meta, el tratamiento para el estudio de las secciones cónicas en el grado décimo de Educación Media Técnica, se hace por medio del sistema de representación algebraico mediante las diferentes alternativas de las ecuaciones canónicas y algebraicas que determinan las curvas, para hallar los elementos, o a partir de los elementos hallar las ecuaciones. Este sistema de representación visual se utiliza para ubicar los elementos de las cónicas. Se ha observado que el profesor utiliza como estrategia la resolución de problemas, en los que el estudiante ejercita procedimientos algebraicos para el manejo de ecuaciones y para memorizar los contenidos. Este tipo de ejercicio se realiza de forma memorística y repetitiva, lo cual no favorece la comprensión de la parábola como lugar geométrico.

En este sentido, Gómez & Carulla (2000) aseguran que los estudiantes que aprenden de memoria las ecuaciones, no comprenden las propiedades ni hacen procesos de análisis, presentando dificultad para relacionar las diversas escrituras algebraicas de las secciones cónicas, no relacionan de forma lógica una representación algebraica y una geométrica, y no comprenden las cónicas como lugares geométricos. Este hecho indica que muchos estudiantes podrían estar saliendo preparados en la memorización de algoritmos, pero con poco dominio de la comprensión y el razonamiento. Cabe resaltar que aprender es interiorizar conceptos, métodos y explicar su uso e importancia mientras que memorizar es la capacidad de repetir de una manera

mecánica sin tener explicación para su existencia. Por otro lado, comprender es entender las cosas mientras que el razonamiento es una serie de conceptos encaminados a demostrar algo o persuadir a oyentes o lectores.

Así mismo, se ha observado que en el aprendizaje de esta área se presentan dificultades, en particular, en relación a las secciones cónicas que son reducidas a ecuaciones en donde los estudiantes desarrollan habilidades de tipo algorítmico que les permiten establecer las ecuaciones de las cónicas o determinar sus elementos principales, pero no llegan a comprender las curvas como lugares geométricos ni a reconocer sus aplicaciones en la vida cotidiana.

La forma como un estudiante aprende, o las dificultades que tiene durante la comprensión de los conceptos, suelen estar relacionadas con la manera como accede a ese conocimiento; según Godino (2016) la didáctica de las matemáticas nace como la disciplina que estudia e investiga los problemas que surgen en educación matemática y propone actuaciones para su transformación.

De este modo, la didáctica no se refiere solamente a cómo enseñar, sino a detectar los niveles de aprendizaje logrados, y a diseñar los correctivos cuando este aprendizaje no se logra. Por lo tanto, la evaluación es un componente fundamental de la didáctica. En este sentido, Aldana y Wagner (2012) proponen el estudio de la evaluación como parte del funcionamiento de la tríada, profesor-saber matemático-estudiante, es decir, que esas relaciones que se constituyen dentro del aula de clase, pueden mostrar diferencias entre unos y otros en los resultados. De otra parte, mencionan que la evaluación se ha convertido en un juicio de valor para quienes aprenden o para el objeto matemático del conocimiento que el estudiante debe adquirir. En ese sentido, es importante considerar el hecho de que la evaluación debe encargarse de mostrar el nivel en el que se encuentran las capacidades del estudiante respecto al desarrollo de los contenidos abordados por el profesor, este hecho, aparte de ser un proceso histórico, es

el mejor método para pasar a comprender la forma en cómo se establece la relación entre el estudiante y los contenidos.

De igual manera, la evaluación del aprendizaje en matemáticas siempre ha sido un proceso cuestionable porque se trata de buscar la objetividad dentro de un proceso subjetivo en muchos de los casos y se ha convertido en uno de los indicadores de calidad del sistema educativo; así lo plantea Herrera (2019), quien indica que la evaluación determina el aprendizaje de los estudiantes y no el currículo oficial.

Según Aldana y Wagner (2012), la evaluación del aprendizaje de las matemáticas vista desde el sujeto que aprende, pone en evidencia el fracaso escolar en este campo del conocimiento, el cual tiene que ver con las prácticas de evaluación que el maestro hace en el aula de clase. Al respecto, Báez et al. (2018) afirman que "no basta con que el profesor conozca en profundidad la asignatura, sino que consiga que el estudiante comprenda las ideas y los métodos que debe aprender" (p.67).

Los estudios expuestos indican la necesidad de llevar a cabo procesos que faciliten una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos. Es necesario aportar a la solución de las dificultades en la comprensión de la parábola como lugar geométrico en estudiantes de educación media, lo cual incide en la posibilidad de resolver las dificultades para llevar a cabo procesos de análisis y relacionar las diversas representaciones del objeto matemático de estudio.

Para ello, en este estudio se propone un diseño metodológico que contribuya a la comprensión de las secciones cónicas, en particular de la parábola, con la mediación de un software de geometría dinámica; esto permitirá documentar los niveles de razonamiento de los conceptos adquiridos por los estudiantes. Este diseño se fundamentará en el modelo van Hiele, el cual permite aportar en dos sentidos: el primero, al hallar descriptores de cada nivel del razonamiento de los estudiantes sobre el concepto de parábola a través de una entrevista socrática semiestructurada; el otro,

descriptores de cada nivel del razonamiento de los estudiantes asociados al uso de GeoGebra.

El problema de la comprensión en conexión con el aprendizaje de la geometría ha sido abordado desde antaño por van Hiele (1957), quien resaltan su importancia al afirmar que "la adquisición de comprensión es, con razón, uno de los objetivos de la enseñanza de las matemáticas" (p.10), para ello, el autor señala que se deben crear las condiciones bajo las cuales la comprensión se pueda dar, lo cual conduce a pensar que es, quizás, por la forma tradicional que se enseña que los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje y la comprensión de los conceptos matemáticos.

De acuerdo a lo anterior, Vargas & Gamboa (2013) establecen que son necesarias ciertas condiciones para que se dé la comprensión, una de ellas es dejar de lado la manera tradicional de enseñar. De manera similar, Santa y Jaramillo (2007), ponen de manifiesto el desconocimiento por parte de los estudiantes de la interfase bachillerato-universidad, de los componentes que integran la parábola, lo que indica que ellos no pueden relacionar sus elementos de manera analítica.

Esta misma dificultad fue observada por Ruiz et al. (2013) quienes reportan que la enseñanza de la parábola, en una institución educativa colombiana, se da a la luz de la metodología tradicional en la cual el profesor da una explicación de forma expositiva, y da a los estudiantes las definiciones y fórmulas, estos las "memorizan", luego aplican estas fórmulas sin llevar a cabo procesos de pensamiento conscientes, lo que no permite a los estudiantes fortalecer las competencias argumentativa, interpretativa y propositiva.

Lo expuesto anteriormente llama la atención sobre la forma cómo se lleva el conocimiento matemático a las aulas de clase y, consecuentemente, sobre el conocimiento matemático de los profesores de matemáticas y el grado de experticia que tienen los profesors asociados a los contenidos lógicos-matemáticos.

Afortunadamente, los nuevos desarrollos tecnológicos en educación permiten llevar a cabo procesos de enseñanza más participativos, dinámicos, interactivos, donde es posible ilustrar los contenidos geométricos de manera más natural. En este sentido el software educativo GeoGebra constituye una herramienta potencial que podría facilitar la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico.

Al respecto, Lara (2018) llevó a cabo una investigación en la que abordó la parábola como lugar geométrico, en una actividad de formación continua de profesores de matemáticas, por medio de una secuencia de actividades con el uso de GeoGebra, y tomó como base teórica los registros de representación semiótica. Planteó como pregunta de investigación *¿Cómo profesores de matemática movilizan la noción de parábola como lugar geométrico cuando coordinan diferentes registros de representación semiótica?*, utilizó técnicas de análisis cualitativo, y los resultados de la investigación mostraron que los profesores coordinan representaciones figurales o dibujos de la geometría, de lenguaje natural, gráfico y algebraico, sin embargo, consiguieron de manera parcial movilizar estos registros al resolver el problema planteado en la última actividad propuesta en GeoGebra, por otro lado, el uso del software GeoGebra favoreció la movilización y la coordinación de los registros mencionados anteriormente.

Del mismo modo, resulta importante considerar el trabajo llevado a cabo por León (2016), quien hizo una investigación con profesors de matemáticas de una universidad privada de Lima. El objetivo era analizar cómo la condición geométrica de la parábola se transforma en instrumento cuando los sujetos dirigen sus acciones a la resolución de los problemas con actividades geométricas, y cómo dichas acciones contribuyen con el proceso de aprendizaje de algunos contenidos geométricos al hacer uso de GeoGebra, el cual fue utilizado como herramienta mediadora. La investigación de León mostró como el desempeño del estudiante se vio impactado, debido al aumento de la motivación en los estudiantes, lo que fortaleció el desarrollo de las unidades

académicas, además la mayoría de los estudiantes llegaron a sentirse mucho más implicados en el aprendizaje y con mayores oportunidades de aprobar la asignatura.

Por otro lado, Moncayo et al. (2014) argumentan que la enseñanza de la parábola suele restringirse al enfoque de la geometría analítica. Hicieron un estudio que consistió en una propuesta didáctica para acercar a los estudiantes a la comprensión del significado de parábola como lugar geométrico mediante el diseño e implementación de una estrategia didáctica basada en el uso de GeoGebra. En su diseño, puesta en práctica y sistematización, se consideraron fases tales como análisis preliminares, planeación del estudio, diseño de actividades y análisis de resultados. La investigación retrató el clima percibido en las clases y permitió constatar que el progreso en el desempeño matemático de los estudiantes de secundaria se hace factible con la mediación de GeoGebra a partir de actividades didácticas diseñadas en el software.

De igual manera, De la Rosa (2014), en una investigación, abordó el concepto de parábola en diversas formas, y realizó conexiones entre las diferentes maneras de introducir el concepto en estudiantes de bachillerato; mostró que a partir de una metodología similar, se pueden estudiar las secciones cónicas. Primero, se construyó la definición geométricamente, después se reconocieron los elementos básicos de la parábola y, finalmente, se relacionaron las construcciones con estos mismos conceptos en el lenguaje de la geometría analítica. De la Rosa estableció una metodología para abordar el aprendizaje de las cónicas y lo ejemplificó con el caso de la parábola. Se utilizó el software de geometria dinámica GeoGebra para apoyar la realización de las actividades propuestas.

Ahora bien, todas estas investigaciones solo muestran el hecho de que GeoGebra puede ser una herramienta de mucha utilidad en la didáctica de la geometría, y en particular, en la enseñanza de la parábola como lugar geométrico. Además, los estudios expuestos indican la necesidad de llevar a cabo procesos que faciliten una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos. Se analizaron las dificultades de la

comprensión de la parábola como lugar geométrico en estudiantes de décimo grado de la Institución Educativa Francisco de Paula Santander, lo cual incide en dificultades para hacer procesos de análisis y relacionar las diversas representaciones del objeto matemático de estudio.

1.2 Formulación de la pregunta de investigación

A partir de las dificultades halladas en los estudiantes al abordar el tema de las secciones cónicas, y en el caso particular de la parábola, se ha planteado la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo configurar una entrevista socrática con software dinámico, que cumpla con los criterios de validez y confiabilidad, y que permita evaluar la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, a partir del modelo de van Hiele, en estudiantes de décimo grado de la Institución Educativa Francisco de Paula Santander de la ciudad de Bucaramanga, Colombia?

1.3 Objetivos de la investigación

1.3.1 Objetivo general

Diseñar una entrevista de carácter socrático con software dinámico, que cumpla con los criterios de validez y confiabilidad, para evaluar la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, a partir del modelo de van Hiele, en estudiantes de décimo grado de la Institución Educativa Francisco de Paula Santander de la ciudad de Bucaramanga, Colombia.

REPOSITORIO

1.3.2 Objetivos específicos

- Analizar los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (EBCM, en adelante) y los Derechos Básicos de Aprendizajes (DBA, en adelante), de los grados sexto a once de educación básica y media, en relación con el concepto de parábola como lugar geométrico.

- Analizar los objetos matemáticos contenidos en las unidades de aprendizaje de los EBCM en función de la caracterización del concepto de parábola como lugar geométrico, y los tipos de pensamiento.

- Analizar los objetos matemáticos contenidos en las unidades de aprendizaje seleccionadas con base en los niveles del razonamiento desarrollados en el modelo de van Hiele.

- Formular los descriptores necesarios para caracterizar el nivel de razonamiento del concepto de parábola como lugar geométrico, alcanzado por los estudiantes, con base en el modelo van Hiele.

- Diseñar la versión inicial de la entrevista socrática dinámica, que permita describir la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, por parte de los estudiantes, en función del modelo de van Hiele.

- Analizar la entrevista socrática diseñada, en términos de los criterios de validez y confiabilidad a fin de hacer mejoras en su contenido, su estructura, y su consistencia interna, a partir de las pruebas piloto realizadas con los estudiantes.

- Configurar la entrevista socrática definitiva, dirigida a detectar el nivel de razonamiento acerca del concepto de parábola como lugar geométrico, en el cual se encuentra un estudiante, según el modelo de van Hiele.

REPOSITORIO

1.4 Justificación e impacto

Todo proceso de formación académica tiene por objetivo generar una dinámica de preparación y educación que se ajuste a las necesidades latentes en el entorno de aprendizaje; ahora bien, con el objetivo de generar un acercamiento más plausible a lo que sería el concepto de educación, habrá que considerar lo dicho por Zabalza (2017) quien argumenta el hecho de que la educación supone a todas luces la facilitación del aprendizaje, así como también la obtención de los saberes, habilidades, valores y hábitos, que se necesitan en un grupo determinado, todo ello de la mano de otras personas mucho más instruidas en las temáticas, como resultado de la implementación de una amplia variedad de técnicas pedagógicas.

Así las cosas, todo aquel que cumpla con un manejo idóneo de las temáticas y además de ello, conozca cómo llegar a difundir la teoría y la práctica por medio de herramientas pedagógicas y didácticas, contará con la posibilidad de llegar a generar educación en comunidades específicas; al partir de esta premisa, lo que se busca es llegar a dotar de herramientas al profesor para que consiga acentuar los métodos de enseñanza, así como también que el estudiante llegue a generar una mayor comprensión de los temas y con ello consolidar con un mayor grado de efectividad los procesos desarrollados en el aula de clase.

La enseñanza de las matemáticas ha supuesto uno de los grandes retos de la educación, puesto que su dificultad radica en lograr que los estudiantes experimenten un aprendizaje verdaderamente significativo en lo científico, aun cuando constantemente muestran desmotivación para el aprendizaje de esta materia.

Los procesos de formación asociados a las matemáticas terminan por estar seriamente comprometidos, a tal punto que el estudiante promedio desiste de comprender las temáticas abordadas dentro del aula de clase; así lo dejarían ver Guevara et ál., (2017) cuando mencionan que el desarrollo lógico matemático en los

estudiantes ha presentado un detrimento, y cada vez son más los estudiantes que presentan serias dificultades académicas en esta área del conocimiento. Un número elevado de estudiantes de un grado promedio tienden a verse comprometidos en el desarrollo de las unidades conceptuales.

Por ende, se selecciona la parábola como lugar geométrico en los estudiantes de décimo grado de la Institución Educativa Francisco de Paula Santander, puesto que es en estos grados en los cuales se presenta dificultad para la comprensión de la misma, por lo que se considera que GeoGebra es una herramienta clave para la comprensión de la misma y superación de las falencias en los estudiantes.

La problemática de la comprensión de ciertos contenidos matemáticos bien podría llegar a estar asociada con la poca efectividad con la que influyen las herramientas tecnológicas como tablero y tiza, en la integración de los contenidos. Si bien es cierto que con estas herramientas se llegaron a formar una gran variedad de generaciones, los estudiantes de este siglo piensan y actúan muy diferente, por lo tanto, para poder generar un adecuado acercamiento a los procesos de formación, los profesors deben adaptarse a los estudiantes y a las herramientas educativas del siglo XXI, puesto que no se pueden formar estudiantes de este siglo, con las mismas formas de enseñanza del siglo XX. Esto lo ratifican Quintero & Jerez (2019) cuando mencionan que los estudiantes de esta época son nativos digitales y tienen muchas más facilidades que los profesors para hacer uso de los medios tecnológicos como elementos mediadores en los procesos de formación.

En ese sentido, la forma de educar ha ido presentando una serie de modificaciones cuyo fin último sería abrir la oportunidad de que cada vez sea más fácil para el estudiante incorporar la tecnología, y con ello, los contenidos académicos; en ese sentido, sería desde el mismo gobierno de Colombia a través de la Ley TIC 1341 (Congreso de Colombia, 2009) que se establece de manera paulatina la asociación de las diversas herramientas tecnológicas en los ámbitos de enseñanza.

Por otra parte, es de resaltar que la incursión de las TIC en la educación se tiene como una de las principales herramientas en el aula de hoy para incentivar el aprendizaje en los estudiantes. Esta no supone la desaparición del profesor como actor primordial en los procesos de enseñanza-aprendizaje, aunque obliga a establecer un nuevo equilibrio en sus funciones. En este entorno, las TIC se involucran como herramientas de apoyo a la metodología tradicional, y el profesor dejará de ser siempre el emisor para también convertirse en orientador para la construcción de conocimiento de forma autónoma y grupal.

En consecuencia, se destaca que la integración de las TIC puede promover el aprendizaje significativo de las matemáticas de forma innovadora e interesante para los estudiantes debido a que, por medio del software GeoGebra, dotarán de movimiento sus construcciones. Así mismo, se resalta que con el software GeoGebra, el profesor podrá contrastar en la pantalla la parte gráfica y algebraica de cualquier función. Adicionalmente, la propuesta se presenta como una solución no sólo para mejorar el rendimiento académico de los estudiantes en cuanto a la comprensión de la parábola como lugar geométrico, sino como una metodología que logre desarrollar capacidades y competencias conceptuales, procedimentales y actitudinales, al mejorar el trabajo colaborativo y la convivencia escolar.

Las Instituciones pretenden que la educación sea más competitiva, por lo tanto, para lograrlo, deben integrar las herramientas educativas tradicionales con las herramientas tecnológicas, para permitir al estudiante analizar, discernir y razonar situaciones reales en entornos virtuales.

En definitiva, esta investigación se realiza con el fin de beneficiar a los estudiantes de décimo grado de la Institución Educativa Francisco de Paula Santander y así influir en la educación en general. Además, pretende también ofrecer un aporte a la investigación en educación para complementar la construcción de la academia de manera que se amplíe el diálogo frente a las prácticas académicas y las intervenciones

en el aula, esto con el objetivo de contribuir, principalmente, en las mejoras académicas de la institución donde se lleva a cabo la investigación y, posteriormente, a la educación nacional, en general.

Si bien la tecnología es fundamental, no es suficiente por sí sola. Es necesario apoyarse en herramientas didácticas que fomenten el mayor aprovechamiento de la tecnología, con una concepción diferente de los procesos educativos y de evaluación.

Al respecto, van Hiele ofrece un modelo de enseñanza aprendizaje que, de acuerdo a Jaime y Gutiérrez (1990) se constituye en una excelente guía para los profesores, ya que muestra cómo debe comunicarse el profesor con los estudiantes, para presentarles nuevos conceptos de manera que se fomente la comprensión de las matemáticas.

Diversas tesis doctorales como las de Llorens (1995), De la Torre (2003), Esteban (2003), Navarro (2012) y Prat, (2015) han mostrado que un buen diseño de entrevista de carácter socrático en el contexto de van Hiele, permite detectar el nivel de razonamiento en que se encuentra un estudiante frente a un concepto matemático determinado.

Por otro lado, la entrevista de carácter socrático ha ganado un importante lugar en la educación, ya que facilita el ambiente para construir conocimiento bajo una característica especial: el profesor, quien dirige el diálogo, asume una actitud de humildad que permite a los estudiantes sentirse cómodos en un nivel en el cual pueden participar abiertamente; en vez de decir qué o cómo hay que pensar, permite el descubrimiento del conocimiento por parte del estudiante.

De acuerdo a lo anterior, el propósito del método socrático no es definir ni afirmar lo que es determinado tema o concepto, sino aumentar la comprensión sobre este, para lo cual se emplean las propias palabras del aprendiz para convencerlo de que sabe

menos de lo que pensaba, con lo cual se ve obligado a abrir su mente a nuevas posibilidades que no había considerado antes (Copeland, 2010).

Es así, como a través de la presente investigación se busca, por medio del diseño de una entrevista socrática basada en el modelo de van Hiele, y apoyada por la tecnología del siglo XXI, ofrecer una herramienta innovadora, dinámica y atractiva para que los estudiantes favorezcan la construcción de su propio conocimiento, a partir de una estructura interactiva que facilite el aprendizaje de la parábola como lugar geométrico, por medio de la instrucción y la práctica, y además permita determinar el nivel de razonamiento que tienen los estudiantes sobre esta temática.

.

RED-UNICIT

CAPÍTULO II.
FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA DE LA INVESTIGACIÓN

REDI-UMECIT

2.1. Bases teóricas, investigativas, conceptuales y legales

2.1.1 Bases teóricas

Los modelos didácticos son planes estructurados que se usan para configurar un currículo ya sea para diseñar materiales o para orientar la enseñanza (García, 2000). Entre los modelos didácticos están el tradicional, tecnológico, alternativo, escuela nueva, entre otros. El modelo tradicional se centra en el profesor y los contenidos que los estudiantes deben asimilar; el modelo tecnológico se concentra en transmisión de conocimiento a los estudiantes, pero mediante el desarrollo de metodologías que implican su participación; el modelo espontáneo activista hace énfasis en el proceso de aprendizaje en donde se consideran sus intereses y experiencias para observar, investigar y descubrir.

Por otra parte, el modelo alternativo, integrador o de investigación de escuela hace énfasis en la investigación educativa en donde el profesor es guía para la construcción del conocimiento y hace uso de situaciones problemáticas para abordar los contenidos. Como ejemplo, está el modelo activo situado, que incluye el aprendizaje para el dominio, el aprendizaje contextual y el aprendizaje colaborativo.

En cuanto a los nuevos modelos de enseñanza de las matemáticas se tiene que la teoría pedagógica constructivista resalta que el conocimiento se construye a través de la integración entre los conocimientos previos que posee cada individuo. En este sentido, cuando se asocia el constructivismo con el quehacer docente, no quiere decir que el profesor se aleje del proceso de aprendizaje de los estudiantes sino, al contrario, el profesor debe proporcionar los insumos para que el estudiante trabaje con el material propuesto y llegue a sus conclusiones al permitir que él construya su conocimiento.

Las teorías del aprendizaje constructivista mencionan los procesos experimentales acerca de cómo aprende el hombre y cómo se enseña desde diferentes

puntos de vista y argumentos explicativos. El constructivismo argumenta que las teorías del aprendizaje son importantes en la educación porque generan una visión sistémica del proceso de aprendizaje, lo que permite la toma de decisiones a la sociedad sobre cómo conducir el proceso educativo, además, el constructivismo crea un proceso explicativo de cómo aprende el ser humano, lo que permite generar métodos que desarrollen el aprendizaje en función del modelo. Giraldo y Rodríguez (2009), recomiendan presentar modelos reales a los estudiantes de las formas geométricas asociadas a las superficies cónicas, de manera que las puedan tocar y sentir.

Es de anotar que en el constructivismo, las personas que aprenden son constructoras de su propio conocimiento, aprender es construir; todo conocimiento que un estudiante adquiere es producto de un proceso constructivo; por lo tanto, entre sus principios están la individualización, la actividad intelectual del estudiante, la autonomía, atención a los conocimientos previos, formulación preguntas, establecimiento de relaciones entre los contenidos, crear clima de empatía, respeto y aceptación mutua, planificación, control y reformulación de objetivos, posibilidad de generar y transferir conocimientos a otros contextos (Castillo, 2008).

De acuerdo a los anteriores principios, se puede establecer que las implicaciones del constructivismo en matemáticas tienen que ver con la idea de que el conocimiento matemático es construido a través del proceso de abstracción reflexiva; existen estructuras cognitivas que se activan en los procesos de construcción, y estas estructuras cognitivas están en desarrollo continuo (Castillo, 2008).

En el constructivismo se deben construir los conceptos a través de la interacción que tienen los objetivos y los sujetos inmersos en un problema y no en un ejercicio para generar la construcción del conocimiento. En el contexto de esta investigación se tienen en cuenta el modelo de van Hiele, que incluye el diálogo socrático basado en la dinámica de preguntas y respuestas.

2.1.2 Bases investigativas

2.1.2.1. Antecedentes históricos

La educación es un elemento que hace parte de la construcción individual y general de cualquier sociedad, esto si se toma en cuenta el hecho de que este proceso radica en la edificación de los saberes a partir de la integración de diversos elementos metodológicos y pedagógicos que se emplean en diversos centros de educación.

El derecho a la educación está contemplado en el artículo 23 de la Declaración Universal de los Derechos Humanos, y establece su obligatoriedad; así mismo está consagrado este derecho en el Pacto Internacional de los Derechos Económicos, Sociales y Culturales y en la Convención sobre los derechos del niño. La educación como derecho fundamental es esencial para el ejercicio de los demás derechos. Las Naciones Unidas (s. f.) establecen que la educación contribuye a disminuir la desigualdad económica, la materialización de los derechos humanos, la igualdad de género y empoderamiento.

Así mismo, la Organización de las Naciones Unidas (s. f.) a través de su organismo para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, s. f.) ha diseñado la Agenda de Educación Mundial, que pretende implementar hasta el año 2030, y en la cual se abordan temas como el acceso a la educación, la cobertura, las herramientas y su calidad en el mundo.

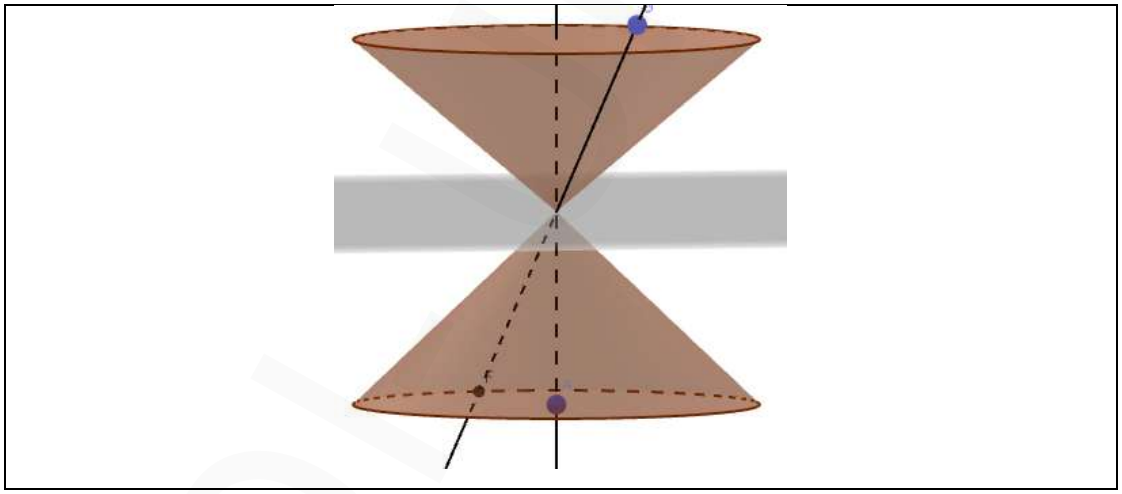
2.1.2.2 La parábola como lugar geométrico

La parábola como lugar geométrico ha tenido dos momentos de oro en la historia de la matemática, sus inicios se dieron con los trabajos de Menecmo, Arquímedes y Apolonio, en los siglos 375 a 190 a.c. para, posteriormente, ser retomada por Newton, Galileo y Descartes en el siglo XVII (Sarton, 1980).

Para referirse a las secciones cónicas, Apolonio (como se citó en González, 1992) mostraba como primera medida la definición de cono circular recto tal como se conoce en la actualidad. La definición de cono según Apolonio era la siguiente:

> Si una línea recta de longitud "y" que pasa siempre por un punto fijo se hace mover sobre la circunferencia de un círculo que no está en el mismo plano que el punto dado, de tal manera que pase sucesivamente por todos los puntos de dicha circunferencia, entonces la recta móvil describirá la superficie de un cono doble (p. 359).

Para ilustrar el concepto de cono de Apolonio, descrito anteriormente, se presenta en la Figura 1.



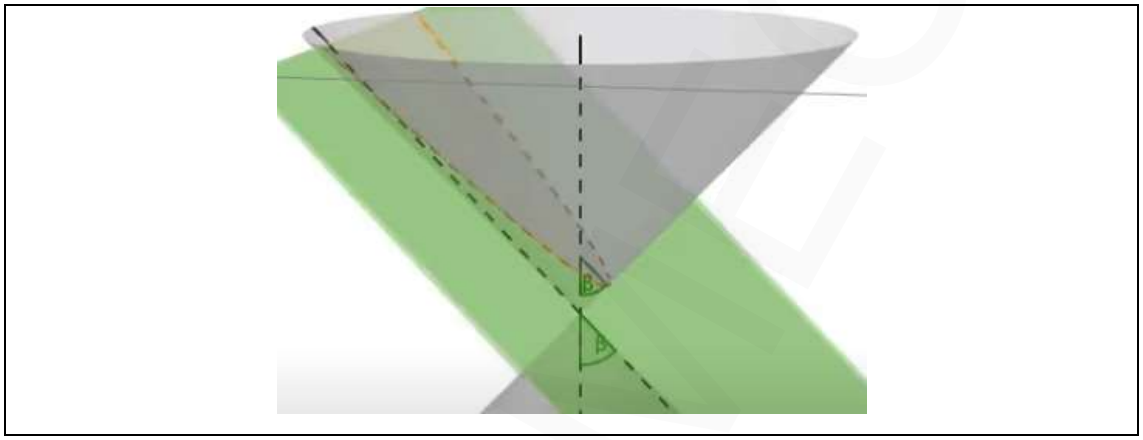
Fuente: Elaboración propia

Figura 1. Representación gráfica de una recta móvil que describe la superficie de un cono doble.

Apolonio basa la teoría de las tres secciones cónicas en secciones de un mismo cono circular, recto u oblicuo al seguir a Arquímedes, que introdujo los nombres de elipse, parábola e hipérbola, en conexión con las secciones de un cono cortado por un plano como lo establece Boyer (1987).

Una superficie cónica se obtiene cuando se hace girar una recta llamada generatriz alrededor de otra recta fija llamada eje. Como lo establece Ruiz (2013), el

punto de corte es el vértice, una sección cónica es la curva que se obtiene en la intersección y cuando el plano es paralelo a la generatriz resulta la parábola (véase la Figura 2).



Fuente: Elaboración propia

Figura 2. Representación de una superficie cónica con plano paralelo a la generatriz

Por otra parte, desde el punto de vista de la física con trabajos como el de Aristóteles, Galileo y Euclides con conceptos como perpendicular, ángulo recto, distancia y altura, se lograron nuevos avances. Galileo (citado en Ruiz, 2013) estableció que la parábola era un punto en movimiento.

Para Galileo Galilei (como se citó en Sánchez, 2015), la parábola es una representación de un fenómeno en movimiento de tipo cuadrático, ya que cuando habla de los incrementos de la parábola, afirma que éstos corresponden a la progresión de los números impares, es decir un crecimiento lineal de la forma $y = 2m + 1$.

Por otra parte, Descartes (citado en Sánchez, 2015) dice que la parábola no se puede construir con regla y compás, si no punto a punto y se debe, por tanto, utilizar la ecuación para dibujar la curva exactamente.

La parábola como objeto matemático presenta diversas perspectivas de estudio como:

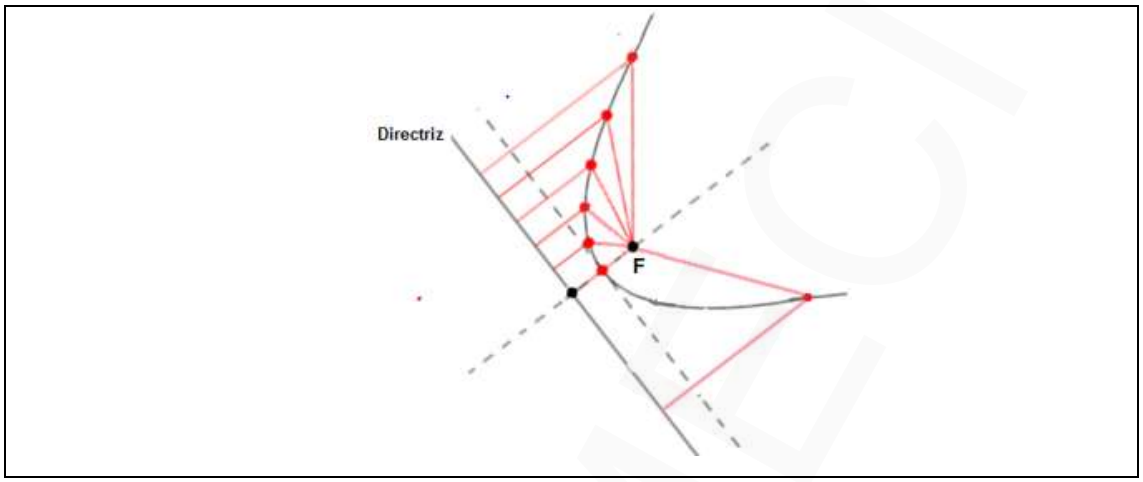
- Función cuadrática o desde el punto de vista de la geometría analítica.
- Un corte seccional que se hace a un objeto de revolución y determina a partir de allí su origen.
- Cónica: relacionada con la distancia del foco y cualquier punto que siempre es igual a la distancia de ese punto con la directriz.
- Como lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado foco y de una recta fija del mismo plano llamada directriz.

Para efectos de este trabajo, la parábola es el lugar geométrico de los puntos P que equidistan de un punto fijo F llamado foco y de una recta fija d, llamada directriz. La recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco es el eje de la parábola (Del Rio, 2018).

Una parábola puede considerarse como horizontal cuando su eje de simetría es paralelo al eje *x* y vertical si su eje de simetría es paralelo al eje *y*, y oblicua cuando no es paralela a ningún eje (Vargas, 2013). De acuerdo con Rivera et al. (2017) la parábola es un lugar geométrico cuya relación de distancias a un punto y una recta fijos es constante. La parábola presenta una característica muy especial relacionada con la distancia del foco, y cualquier punto que siempre es igual a la distancia de ese punto con la directriz.

Lehmann (1989) define una parábola como el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano que no pertenece a la recta. A continuación, se presenta la gráfica de la parábola en la Figura 3:

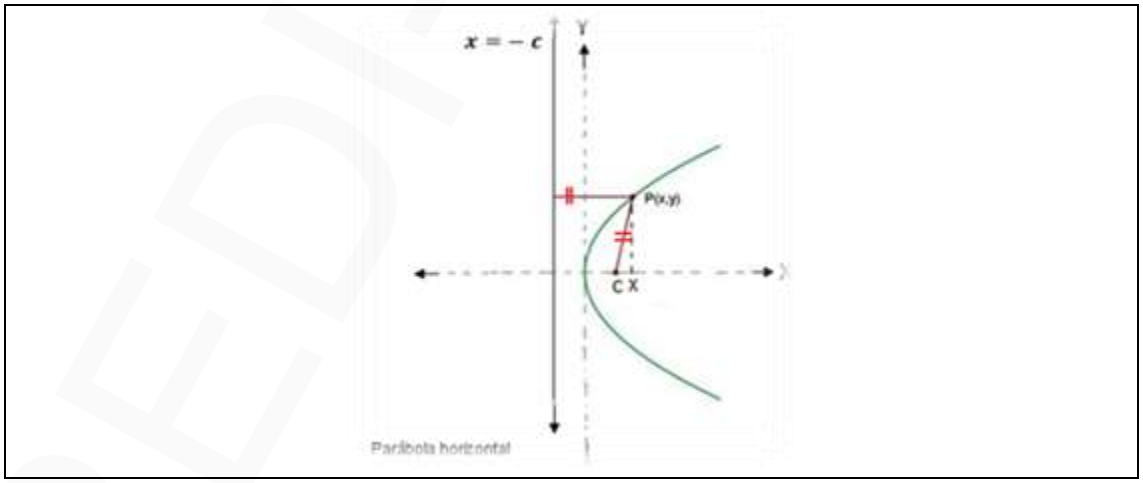
PREPRINT



Fuente: Calderón (2013)

Figura 3. La Parábola

Para Puerta et al. (2006), las ecuaciones canónicas de la parábola son de la forma: $x = \left[\frac{1}{4c}\right] y^2$ donde la directriz tiene por ecuación $x = -c = \frac{-a^2}{c}$, la excentricidad es $\varepsilon = \frac{c}{a} = 1$ *y* el foco es *(c, 0)*. A este tipo de parábola se llamará *parábola horizontal.* En la gráfica 8 se observa que el foco se encuentra sobre el eje de las abscisas, de donde la ecuación será $x = 4cy^2$, las coordenadas del foco se localizan en *(c, 0)* y la recta directriz $x = -c$**.** (Véase la Figura 4).



Fuente: (Calderón, 2013)

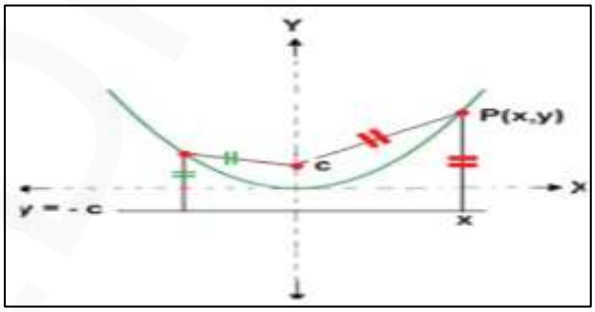
Figura 4. Parábola horizontal

A continuación se prueba la ecuación $x = \left[\frac{1}{4c}\right] y^2$ al utilizar la definición que proporciona (Lehmann, 1989)

> De acuerdo con las coordenadas del punto P(x,y) y las coordenadas del foco que se localizan el eje de las equis (c,0) y la ecuación de la directriz x = −c, se tiene que
>
> $|PF| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$
>
> $|PL| = |x + c|$
>
> Por la definición se tiene que $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = |x + c|$
>
> Finalmente ... $(x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2$
>
> Luego de simplificaciones
>
> $$\therefore \frac{y^2}{4c} = x$$

En este caso se llamará *parábola horizontal.*

Puerta et al. (2006) presentan el caso $y = \left[\frac{1}{4c}\right] x^2$ donde la directriz tiene por ecuación $y = -c$, la excentricidad es $\varepsilon = \frac{c}{a} = 1$, es decir c = a, y el foco es (0, c), lo cual corresponde a la *parábola vertical* como se puede apreciar en la Figura 5.



Fuente: Calderón (2013)

Figura 5. Parábola vertical

La prueba se puede realizar de dos formas distintas, como primera medida, si se usa la definición que proporciona Puerta et al. (2006). Un punto P*(x,y)* pertenece a la parábola si satisface:

$$\frac{distancia\ de\ (x,y) al\ punto\ fijo(0,c)}{distancia\ de\ (x,y)\ a\ la\ recta\ y=-c} = e = 1$$

$$\frac{\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2}}{\sqrt{(x-x)^2+(y-(-c))^2}} = 1$$

$$\sqrt{x^2+(y-c)^2} = \sqrt{(0)^2+(y+c)^2}$$

$$x^2+(y-c)^2 = (0)^2+(y+c)^2$$

$$x^2+y^2-2yc+c^2 = y^2+2yc+c^2$$

$$x^2 = 4yc$$

De acuerdo con Lehmann (1989):

> De acuerdo a las coordenadas del punto P(x,y), las coordenadas del foco que se localizan sobre de las equis (c,0) y la ecuación de la directriz $x = -c$ se tiene que $|PF| = \sqrt{(x+0)^2+(y-c)^2}$
>
> $|PL| = |y+c|$, por definición se tiene
>
> $\sqrt{x^2+(y-c)^2} = |y+c|$
>
> Luego de simplificaciones
>
> $x^2 - 4yc = 0$
>
> $\therefore x^2 = 4cy$

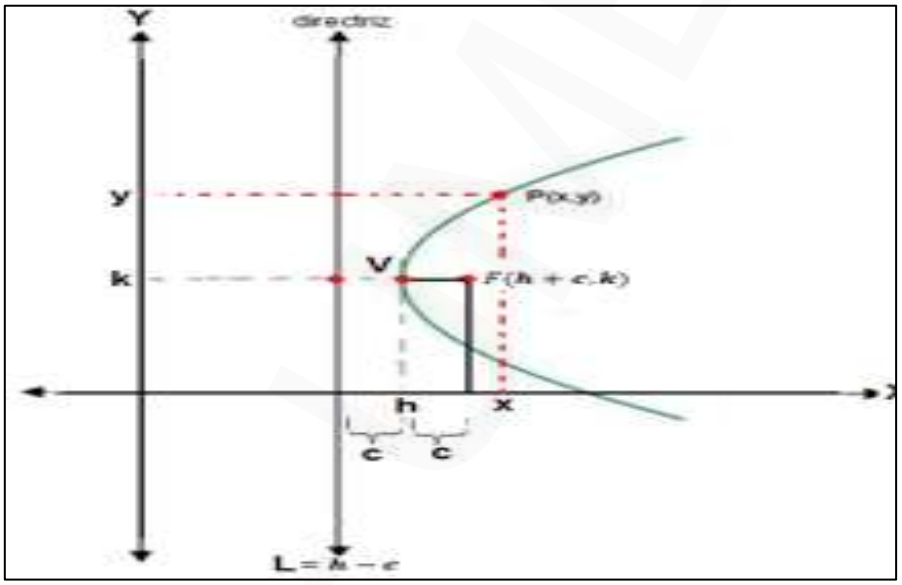
Una de las variantes de las posiciones de la parábola es cuando el vértice de la parábola no se encuentra en el origen de coordenadas si no en un punto (h,k):

PREPRINT

$$(\boldsymbol{x-h})^{\boldsymbol{2}}=\boldsymbol{4c(y-k)}$$
$$(\boldsymbol{y-k})^{\boldsymbol{2}}=\boldsymbol{4c(x-h)}$$

Al aplicar la definición de Lehmann (1989).

Para el caso $\boldsymbol{(x-h)^2=4c(y-k)}$**,** llamada parábola horizontal con vértice en el punto V$(\mathbf{h},\mathbf{k})$ **y** foco en F$(\mathbf{h+c},\mathbf{k})$ (véase la Figura 6):



Fuente: Calderón (2013)

Figura 6. Parábola horizontal con vértice (h, k)

Se parte de que

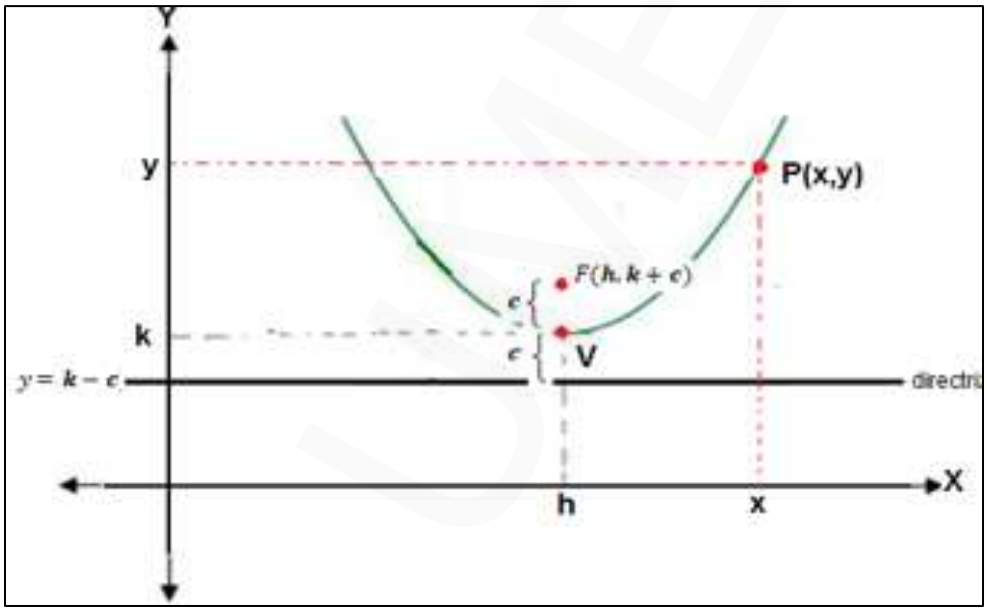
$$\sqrt{(x-(h+c)^2+(y-k)^2}=|x-(h-c)|$$
$$(x-(h+c)^2+(y-k)^2=(x-(h-c)^2$$
$$x^2-2x(c+h)+(h+c)^2+(y-k)^2=x^2-2x(h-c)+(h-c)^2$$
$$x^2-2xc-2xh+(h+c)^2+(y-k)^2=x^2-2xh+2xc+h^2-2hc+c^2$$

Al simplificar se obtiene:

$$-2xc+2hc+(y-k)^2=2xc-2hc$$

$$(y-k)^2 = 2xc - 2hc + 2xc - 2hc$$
$$(y-k)^2 = 4xc - 4hc$$
$$\therefore (y-k)^2 = 4c(x-h)$$

Para el caso de la Figura 7, la ecuación corresponde a $(y-k)^2 = 4c(x-h)$ con vértice en el punto $V(h,k)$ y foco $F(h,k-c)$, que es la llamada parábola vertical**.**



Fuente: Calderón (2013)

Figura 7. Parábola vertical con vértice (h, k)

De acuerdo con Lehmann, (1989):

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} = |y-(k-c)|$$
$$(x-h)^2 + (y-(k+c)^2 = (y-(k-c))^2$$
$$(x-h)^2 + y^2 - 2y(k+c) + (k+c)^2 = y^2 - 2y(k-c) + (k-c)^2$$
$$(x-h)^2 + y^2 - 2yk - 2yc + k^2 + 2kc + c^2 = y^2 - 2yk + 2yc + k^2 - 2kc + c^2$$

Al simplificar se obtiene:

$$(x-h)^2 = 2yc - 2kc + 2yc - 2kc$$
$$(x-h)^2 = 4yc - 4kc$$
$$\therefore (x-h)^2 = 4c(y-k)$$

Una vez fijados una recta y un punto se puede construir una parábola que los tenga por directriz y foco, respectivamente. La parábola presenta algunas características que la hacen única, entre estas están:

- **Foco:** es el punto fijo F
- **Directriz:** es la recta fija d
- **Parámetro:** distancia del foco a la recta directriz
- **Eje:** recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco
- **Vértice:** punto de intersección de la parábola con su eje.
- **Cuerda focal:** segmento que une dos puntos de la parábola y pasa por su foco (Del Rio, 2018).

Por otra parte, al hablar de la excentricidad de la parábola, es siempre 1 (Rivera et al., 2017).

En matemática y geometría la excentricidad, ε (épsilon) es un parámetro que determina el grado de desviación de una sección cónica con respecto a una circunferencia. Este es un parámetro importante en la definición de elipse, hipérbola y parábola: para cualquier punto perteneciente a una sección cónica, la razón de su

distancia a un punto fijo F (foco) y a una recta fija l (directriz) es siempre igual a una constante positiva llamada excentricidad (Rivera et al., 2017).

Se establece que, mediante los conceptos, los estudiantes obtienen una representación simplificada y generalizada de la realidad, que lleva a una comunicación interpersonal (Ausubel, 1980).

2.1.2.2. Antecedentes investigativos

Como lo establecen Martínez, Murillo y Martínez (2017) la finalidad de la educación es infundir sabiduría, la cual consiste en saber usar bien los conocimientos y habilidades. Por otra parte, Filmus (2016), dice que se educa para tener una identidad nacional, se educa para lograr una integración social, para la democracia, para la productividad. Para las Naciones Unidas (s. f.) educar, es erradicar la pobreza, porque la educación empodera y transforma.

De acuerdo con Morales (2018), la educación es un proceso que se lleva durante toda la vida para obtener conocimientos, valores, desarrollar entre otros hábitos, habilidades y formas de actuar. La importancia de la educación radica en que los conocimientos adquiridos ya sea con los padres, familias y escuela, permiten la formación de manera integral y saber cómo actuar bajo cualquier circunstancia

Por otra parte, entre los objetivos de la educación está la formación integral de los seres humanos, incentivar el razonamiento lógico y crítico, fomentar la investigación, la creatividad, promover la inclusión, comunicación, integración social y cultural, entre otras.

En la educación se puede ver una puerta que lleva al desarrollo, motivo por el cual son necesarias las políticas del Estado para promover y velar por una educación

que prepare al ser humano y a la sociedad a enfrentar cambios; por lo tanto, la importancia de la educación radica, entre otras cosas, en la capacidad de transmitir valores que ayudan a construir una sociedad más justa, igualitaria, dinámica y diversa.

La educación es importante, además, porque permite mejorar la calidad de vida de las personas, al tiempo que permite generar nuevos métodos y diseños para crear aún más conocimiento con base en lo ya aprendido. El ser humano se encuentra en una búsqueda constante de elementos que le posibilitan adentrarse en temáticas específicas, cada vez más profundas, es decir, tiene la oportunidad de fortalecerse mucho más, y con el tiempo llegar a su propia postura teórica acerca de las relaciones entre los diferentes componentes de las situaciones que intenta explicar.

Si bien la educación es un factor determinante en cualquier sociedad, lo cierto es que en esta época confronta una serie de retos, que exigen importantes cambios. Estos retos tienen que ver con la globalización, la internacionalización, la virtualización, la cobertura, la pertinencia y la calidad.

De acuerdo con González (2016) en el sector rural de la región Centro Oriental colombiana, se presentan deserciones por condiciones de salud, cambios de domicilio a otras regiones, estrategias inadecuadas pedagógicas, bajos ingresos, extraedad y el nivel educativo de los padres son considerados como factores de deserción.

Por otra parte, en la región Caribe la deserción en el área rural se da, con más frecuencia, porque los estudiantes no ingresan a tiempo al sistema escolar, deben trabajar, les falta recursos, útiles escolares y, además, las escuelas no cuentan con la infraestructura suficiente. En la región Antioquia la deserción se presenta por bajas expectativas de educación, falta de motivación, altas tasas de maternidad o paternidad y dificultades económicas. En la región Pacífica se presenta deserción por ingreso extraedad al sistema escolar, largas distancias entre la escuela y el lugar de residencia, salud, y falta de estructura institucional (González, 2016).

Si se identifican los factores causales de la deserción, según diferentes aspectos, se pueden clasificar en personales, pedagógicos, sociales, económicos y políticos, entre otros. En cuanto a las condiciones personales que afectan la permanencia en la escuela, en general, se pueden mencionar: la salud de los estudiantes, el ingreso al colegio con extraedad, estudiantes que deben trabajar, falta de útiles, falta de expectativas educativas, y un proyecto de vida, entre otras (González, 2016).

Con relación a las condiciones pedagógicas que pueden propiciar la deserción escolar, está la infraestructura escolar inadecuada, la escasez de profesores, y el bajo nivel de calidad de los colegios públicos. Hay falta de capacitación de profesores en cuanto a métodos y estrategias (González, 2016).

Con respecto a las condiciones sociales vinculadas a la deserción escolar, algunas tienen que ver con el subsistema social, como el bajo capital social, la pobreza, la corrupción, la violencia, el narcotráfico, el desplazamiento, además del ingreso de niños y jóvenes, grupos militares y dispersión de familias. Así mismo, se incluyen entre estos factores la descomposición social, el atraso científico y tecnológico, y la débil identidad nacional (González, 2016). Algunas condiciones económicas que afectan la permanencia de los estudiantes en la educación formal son la concentración del ingreso, falta de ahorro, escasa competitividad, falta de infraestructura, desempleo, entre otros (González, 2016). Por último, como condiciones políticas que pueden contribuir a la deserción escolar, están la concentración de poder, falta de democracia, visión a largo plazo, falta de presencia del Estado, debilidad de política exterior e impunidad (González, 2016).

Como se puede ver, la problemática educativa relacionada con la prosecución de estudios, y en consecuencia con los niveles educativos de la población es muy compleja e involucra diferentes componentes de la sociedad.

PREPRINT

En cuanto a las dificultades en el aprendizaje del concepto de parábola se encuentran los siguientes estudios:

En cuanto a los obstáculos del estudiante frente al concepto de parábola se encuentra que para su construcción es necesario tener en cuenta los conceptos previos (Font, 2001). Gómez & Carulla (2000) muestran que el análisis gráfico que realizan los estudiantes en la comprensión geométrica de la parábola es muy complejo, por la síntesis que deben hacer. Los autores manifiestan que los estudiantes aprenden de memoria las ecuaciones, sin llegar al análisis o relaciones de representaciones algebraicas y geométricas.

López & Aldana (2013) sintetizan otras dificultades de los estudiantes en relación a la parábola, como el hecho de que no reconocen la parábola a partir de sus componentes, y no encuentran la relación analítica de la ecuación con los elementos que la conforman, no se integra la razón entre el vértice, la directriz y el foco, por lo que se confunde la simetría, el eje focal y la orientación del objeto. Los estudiantes no utilizan sistemas de representación que faciliten la interpretación de la parábola ya que no logran una asociación entre la ecuación y la gráfica.

Lo anterior es complementado con los resultados del estudio de Fernández (2010), quien aporta otro aspecto que dificulta la comprensión del concepto de lugar geométrico: las concepciones erróneas de los estudiantes. Por ejemplo, no tienen en cuenta las propiedades métricas, ni la noción de lugar geométrico. Así mismo, el autor señala que los estudiantes afirman que esta cónica (y las demás) se pueden dibujar perfectamente al emplear sólo la regla y el compás y que “Una parábola (y, en general, cualquier curva) no es un objeto geométrico independiente del sistema de referencia; por el contrario, primero existe el sistema de referencia como algo dado a priori y después la curva completamente encadenada a él” (p. 80).

REPOSITORIO

Otras dificultades de la comprensión de la parábola, están vinculadas con las representaciones propias de los estudiantes con respecto al contenido, así lo afirman Gaitán et al. (2014) al realizar un estudio sobre la comprensión de este objeto matemático con estudiantes de undécimo grado. La percepción y las representaciones propias de los estudiantes influyen en el razonamiento y la comprensión de los contenidos abordados durante las clases (Ancochea, 2011).

Por otra parte, Santa & Jaramillo (2007) hacen referencia al desconocimiento de los componentes que integran la parábola por parte de los estudiantes, lo que conlleva a que no puedan relacionar sus elementos de manera analítica. Los niveles de razonamiento de los estudiantes están vinculados a las diversas experiencias en el medio, al permitir entrelazar imágenes como representaciones cognitivas o conceptuales a modelos del conocimiento matemático, pero estas vinculaciones no se dan.

De acuerdo con Ancochea (2011), los estudiantes proponen soluciones a problemas sobre parábola, basados en la comparación con problemas resueltos anteriormente por otros autores, con base en la repetición, sin realizar interrogantes o esquemas gráficos. Entre otros problemas, está la falta de atención por parte de los estudiantes durante las clases debido a que se confunden conceptos relacionados con la parábola o por desconocimiento (Ancochea, 2011).

Rivera et al. (2017) señala algunas dificultades en el aprendizaje del concepto de parábola por parte de los estudiantes como el sumar, restar, multiplicar y dividir, uso de signos, resolución de ecuaciones con diferentes variables, identidades trigonométricas y graficación de funciones, trazo de directrices, falta de dominio de fórmulas, ubicación de puntos entre otros.

Por otro lado, la existencia de dificultades con respecto a la comprensión de la parábola como lugar geométrico podría ser resultado de la forma como se enseña. Un

PREPRINT

hallazgo importante que reportan los autores es que los profesores utilizan pocas estrategias para la enseñanza y comprensión de la parábola como lugar geométrico, lo que dificulta su razonamiento. También se puede anotar como problema que el énfasis de los profesores está en la representación algebraica, geométrica y verbal, y no en la parábola como lugar geométrico, lo que conlleva a que los estudiantes no puedan utilizar la parábola para modelar matemáticamente fenómenos de la realidad. Otra consecuencia es la escritura incorrecta de expresiones matemáticas al modelar una situación.

Frente a los factores que pueden afectar la adquisición del concepto de parábola se tiene que pueden originar las dificultades de los estudiantes en cuanto a la comprensión de la parábola como lugar geométrico. En cuanto a los factores que pueden afectar la adquisición del concepto, se tiene:

- Desmotivación de los estudiantes. Las explicaciones, demostraciones y teoremas matemáticos desmotivan a los estudiantes, pues se ven forzados a pensar de manera formal en determinados niveles de enseñanza-aprendizaje. Es necesario inicialmente el uso de estrategias concretas, además de la atención, entendimiento, concentración y análisis.

- Desvinculación de los contenidos con el entorno (didáctica). Se explican conceptos matemáticos de manera superficial, que conllevan a aprendizajes memorísticos sin la comprensión de conceptos. Es necesario enfatizar en actitudes y estrategias adecuadas tanto para formar a los estudiantes como para contar con una didáctica que permita construir teorías y modelos.

- No se hace énfasis en la aplicación del concepto de parábola en contextos de la vida diaria. El no uso de ejemplos prácticos lleva a que el estudiante no se motive por su aprendizaje.

PREPRINT

- No se dan a conocer aplicaciones o programas que faciliten la resolución de ejercicios. Es necesario dar a conocer programas para graficar parábolas, como GeoGebra, para de esta manera incentivar su uso y aprendizaje.

- No se dejan actividades a realizar para la casa. Es necesario dejar tareas de forma novedosa para promover la autonomía.

- El concepto de parábola se deja para el último período y los profesores no concluyen de forma adecuada los contenidos, lo cual genera debilidades y poca asimilación de su concepto.

- Las actividades que realizan los profesores no son suficientes para abarcar el concepto de parábola. Faltan estrategias para lograr la apropiación del concepto (Álvarez & Morales, s.f.).

- El bajo nivel de abstracción que poseen los estudiantes.

En cuanto a la didáctica como factor importante en la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico se tienen los siguientes estudios:

La didáctica se puede ver como el arte de enseñar, abarca la actividad misma de enseñanza, y el arte de preparar y producir los recursos para esta actividad. La didáctica está relacionada con el verbo enseñar, instruir, exponer con claridad. Según Ferrández (1995), la didáctica se puede ver de acuerdo a cuatro elementos esenciales:

- Como carácter: Es una disciplina subordinada de la pedagogía, teoría, práctica, ciencia y arte.

- Como objeto: Se refiere al proceso de enseñanza-aprendizaje, instrucción, formación.

- Como contenido: Alude a norma, comunicación, metodología.

REPOSITORIO

- Como finalidad: hace referencia a la formación intelectual, optimización del aprendizaje, integración de la cultura, desarrollo personal.

Por otra parte, entre las finalidades de la didáctica se pueden establecer la finalidad teórica y la finalidad práctica para la formación intelectual. El interés por la didáctica radica en las técnicas específicas de las nociones que se enseñan, y las técnicas compatibles con las concepciones educativas y pedagógicas; por ejemplo, la preparación de clases, problemas, ejercicios, materiales para enseñar, textos, instrumentos de gestión, objetivos y medios de evaluación, y los programas que se usan para cada grado.

En la didáctica están involucrados diferentes aspectos, como los objetivos y resultados a alcanzar, los contenidos o la materia objeto de aprendizaje, los métodos y estrategias (formas de lograr el aprendizaje), el ambiente o contexto de trabajo, y los actores directos (profesores y estudiantes).

Es de anotar que la enseñanza y la comprensión de las matemáticas requieren concebir la planificación didáctica con base en las necesidades de los estudiantes; por lo tanto, es necesario realizar actividades de mediación según las características de los estudiantes. Se debe estimular el razonamiento matemático para evitar memorizaciones y lograr la comprensión, ya que lo importante no es la respuesta sino el procedimiento que conduce a la solución.

De acuerdo con Godino et al. (2004), los estudiantes aprenden matemáticas cuando las comprenden, y construyen nuevos conocimientos; de ahí la importancia de la planificación de la enseñanza en las matemática para llevar a cabo prácticas pedagógicas con diferentes métodos que incorporen valores, destrezas y actitudes para que los estudiantes se vinculen de una manera efectiva al proceso de aprendizaje. Se puede establecer que la planificación didáctica permite la reflexión, la crítica y la posibilidad de plantear modificaciones y transformaciones en la acción profesor.

2.1.3 Bases conceptuales

2.1.3.1 La educación media en Colombia

Si bien todas las etapas de la educación son importantes, la educación media merece especial atención. Es de anotar que tener población que ha culminado educación media aporta al desarrollo del país, ya que la economía mundial se basa cada vez más en el uso del conocimiento, ya sea de profesionales o de técnicos.

En Colombia la Ley 115 del 8 de febrero de 1994 (MEN, 2019), por la cual se expide la Ley General de Educación, en su Artículo 27, expresa que la educación media constituye la culminación, consolidación y avance en el logro de los niveles anteriores y comprende dos grados, décimo y undécimo. Este nivel educativo tiene como fin la comprensión de las ideas y los valores universales y la preparación para el ingreso del educando a la educación superior y al trabajo. Así mismo, la Ley 115 define, en otros de sus artículos, el carácter y los criterios de la educación media a tener en cuenta en su aplicación. La educación media puede ser académica, técnica o normal.

La importancia de la educación media técnica radica en que prepara tempranamente a los estudiantes para el desempeño laboral en uno de los sectores de la producción y de los servicios, y también los prepara para continuar en la educación superior, en caso de que así lo deseen.

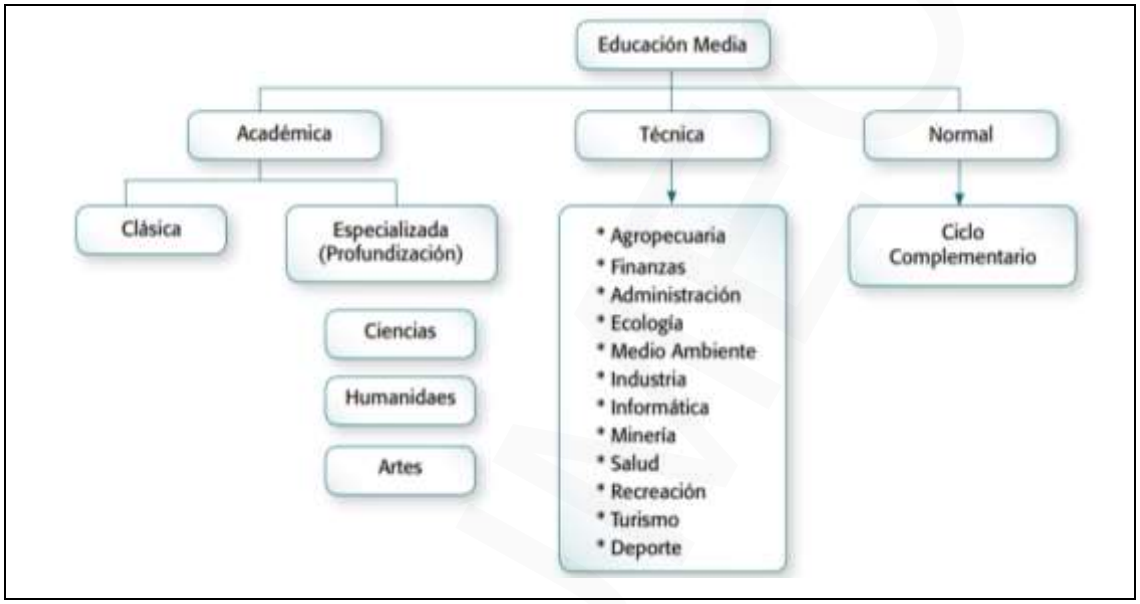
A pesar de su importancia, la educación media también confronta una serie de problemas, especialmente en Colombia. A continuación se mencionan algunos de los señalados por Gaona (2009):

- La educación media no se garantiza como derecho constitucional, por lo que falta inversión y una responsabilidad del Estado para desarrollar fines de la educación media y por la ausencia de políticas.

- La inoperancia de algunos centros educativos.
- La falta de articulación entre la educación media y la educación superior.
- La baja cobertura a nivel nacional sobre todo en sectores socioeconómicos de menores ingresos de municipios y regiones.
- La imposición de un modelo homogéneo con bajo valor ocupacional centrado en la memorización de conceptos, lo cual ocasiona que los estudiantes no logren las competencias requeridas para acceder a los pocos cupos que la universidad pública ofrece.
- Los planes de estudio y actividades curriculares que están enfocados en lograr buenos resultados en los exámenes de Estado y dejan de lado saberes y competencias de alto valor en el proceso formativo.
- El hecho de que no se contemplan opciones laborales para los estudiantes, con el grado obtenido después de finalizada la educación media, y falta educación complementaria para el trabajo.
- La alta demanda para el ingreso a la educación superior y los escasos cupos en las universidades públicas.
- La falta de capacitación profesor, para la cuales, las instituciones asignan a profesionales para ser profesores en especialidades diferentes a su área de formación profesional, lo que está en contra de la calidad de la educación.

La educación media en Colombia tiene la opción de egresar con dos títulos: como *bachiller académico* o como *bachiller técnico* (véase la Figura 8). Como bachiller académico puede ser clasificado con especialización o con profundización en ciencias, humanidades y artes. Como bachiller técnico existen las opciones de énfasis agropecuario, finanzas, administración, ecología, medio ambiente, industria,

informática, minería, salud, recreación, turismo y deporte y los contenidos del área normal que son definidos como complementarios (Gaona, 2009).



Fuente: Gaona (2009).

Figura 8. Configuración de la educación media

2.1.3.2 Las matemáticas en la educación media

Las competencias matemáticas que se desarrollan en la educación media son relevantes ya que determinan en gran medida el futuro del estudiante al escoger el programa académico para su nivel profesional, y así mismo el campo laboral en el cual se va a desempeñar el estudiante al concluir su educación. Algunas de las habilidades matemáticas que todo profesional necesita para desempeñarse en su campo laboral son: el razonamiento creativo, la resolución de problemas de tipo matemático, pensar matemáticamente, el plantear y solucionar problemas matemáticos, modelar matemáticamente o analizar y construir modelos, razonar matemáticamente, representar identidades matemáticas, manipular símbolos matemáticos, entre otras.

Uno los fines a los que conduce la enseñanza de las matemáticas es el formativo, ya que es una ciencia que disciplina la inteligencia; por ejemplo, el tipo de

razonamiento que se usa, la simplicidad de su estructura, la precisión de sus razonamientos y la exactitud de sus resultados. Por otro lado, las matemáticas tienen un amplio número de beneficios para el estudiante: permiten desarrollar la imaginación, ejercitar la abstracción y la generalización, razonar con claridad y exactitud, y contribuyen a formar valores morales. Otro fin es el instrumental ya que es necesaria para el estudio de otras disciplinas y para la solución de problemas que se presentan a diario, como lo señala Toranzos (1965).

Así mismo, plantear la resolución de problemas obliga a tener el pensamiento de lo abstracto de las fórmulas, teorías y principios a lo concreto de las condiciones de un problema, al estimular la imaginación y la intuición. Para Toranzos (1965) la matemática debe ser enseñada, al tener en cuenta su estructura lógica por medio de métodos de demostración, y no de manera memorística ni por medio de la ejercitación mecánica.

2.1.3.3 EBCM

Los estándares curriculares son descriptores del logro alcanzado por cada estudiante al concluir un período escolar. En ellos se sintetizan los aprendizajes esperados, y están organizados por asignaturas y grados. En cuanto a los estándares de matemáticas, éstos presentan una visión de una población que sabe utilizar los conocimientos matemáticos y comprende el conjunto de aprendizajes que se espera que los estudiantes logren.

Los estándares curriculares en Colombia surgen del análisis establecido por la Comisión Internacional sobre Educación, Equidad y Competitividad Económica en América Latina y el Caribe. En el informe, quedándonos atrás publicado en 2001 (como se citó en MEN, 2004), esta Comisión, al referirse a los problemas fundamentales que generan brechas en la educación en América Latina, ubicó en primer lugar la ausencia de estándares curriculares. Por esta razón, y con base en los resultados de las diversas

evaluaciones, el MEN decidió desarrollar una propuesta de estándares curriculares, para diferentes áreas. Para ello, reunió a un grupo de profesores de las áreas de lengua castellana, ciencias naturales y educación ambiental, coordinados por Corpoeducación y a un grupo de matemáticas coordinado directamente por el MEN para trabajar con profesores en ejercicio de las respectivas áreas de colegios públicos y privados, con el fin de formular la propuesta, la cual se tradujo en tres documentos de estudio. Cada uno de ellos presenta, grado por grado, unos estándares; es decir, las expectativas de lo que se aspira que los estudiantes sepan y puedan hacer con lo que saben en cada una de esas áreas, en preescolar, básica y media. El punto de partida fueron los Lineamientos Curriculares del MEN (MEN, 2004).

Un estándar en educación específica lo mínimo que el estudiante debe saber y ser capaz de hacer para el ejercicio de la ciudadanía, el trabajo y la realización personal. El estándar es una meta y una medida; es una descripción de lo que el estudiante debe lograr en una determinada área, grado o nivel; expresa lo que debe hacerse y lo bien que debe hacerse (MEN, 2004).

En cuanto a los beneficios de los estándares curriculares, se puede establecer que son el punto de partida para que las instituciones escolares, los municipios, las localidades y regiones definan su propio marco de trabajo curricular. Los estándares aseguran que todas las escuelas ofrezcan educación similar y de alta calidad, lo que permite la igualdad de oportunidades educativas para todos los estudiantes. Permiten especificar requisitos para la promoción a grados y niveles siguientes, así como para la graduación en la finalización de la educación básica o media. Contribuyen al diseño de pruebas de logros académicos estandarizadas y comparables y son la base para diseñar estrategias y programas de formación y capacitación de profesores, a partir de criterios y expectativas compartidas (MEN, 2002).

Los estándares de matemáticas están organizados en función de cinco tipos de pensamiento: Pensamiento numérico y sistemas numéricos, Pensamiento espacial y

sistemas geométricos, Pensamiento métrico y sistemas de medidas, Pensamiento aleatorio y sistemas de datos, y Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Los estándares curriculares de matemáticas para grados décimo y undécimo de educación media, establecidos por el MEN (2006), se enuncian a continuación:

a. Estándares asociados al pensamiento numérico y sistemas numéricos. Están concebidos para que los estudiantes avancen hacia la construcción del número, su representación, relaciones entre ellos y las operaciones que se realizan en los sistemas numéricos. Éstos se refieren a las habilidades (MEN, 2004) para:

- Analizar representaciones decimales de números reales diferenciando entre racionales e irracionales.

- Reconocer la densidad de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos.

- Comparar y contrastar las propiedades de los números.

- Utilizar argumentos de la teoría de números para justificar relaciones.

- Establecer relaciones y diferencias entre notaciones de números reales.

b. Estándares asociados al pensamiento espacial y sistemas geométricos. Es el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, transformaciones y representaciones. Estos estándares implican (MEN, 2004):

- Identificar en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas.

- Identificar características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana.

- Resolver problemas en los que se usen las propiedades geométricas

- Usar argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos

- Describir y modelar fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.

- Reconocer y describir curvas y o lugares geométricos.

c. Estándares asociados al pensamiento métrico y sistemas de medidas. Presentan y caracterizan curricularmente una serie de situaciones de enseñanza que de forma significativa movilizan conocimiento y habilidades métricas. Éstos se refieren a las habilidades (MEN, 2004) para:

- Diseñar estrategias para abordar situaciones de medición

- Resolver y formular problemas que involucren magnitudes

- Justificar resultados obtenidos mediante procesos de aproximación.

d. Estándares asociados al pensamiento aleatorio y sistemas de datos. Estos estándares implican (MEN, 2004):

- Interpretar y comparar resultados de estudios con información estadística.

- Justificar o refutar inferencias basadas en razonamientos estadísticos.

- Diseñar experimentos aleatorios

- Proponer inferencias

REPOSITORIO

e. Estándares referidos al pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Se refieren a la percepción, identificación y caracterización de variables y el cambio en diferentes contextos, así como su descripción, modelación y representación en distintos sistemas. Estos estándares implican (MEN, 2004):

- Utilizar las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.

- Interpretar la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva, desarrollando métodos para hallar las derivadas.

- Analizar las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.

Los cinco tipos de pensamiento descritos anteriormente tienen elementos conceptuales comunes que permiten el diseño de situaciones de aprendizaje –y en particular de situaciones problema– que integren los diferentes pensamientos y que, a la vez, posibiliten que los procesos de aprendizaje de las matemáticas se den a partir de la construcción de formas generales y articuladas de esos mismos tipos de pensamiento matemático (MEN, 2004).

Los estándares curriculares de matemáticas están organizados para el desarrollo de las competencias matemáticas de manera que involucren procesos para que los estudiantes sean matemáticamente competentes. Así mismo, deben entenderse en términos de procesos de desarrollo de competencias, los cuales se trabajan de manera gradual e integral, con el fin de superar niveles de complejidad creciente en el desarrollo de las competencias a lo largo del proceso educativo.

Sin embargo, aunque la concepción curricular de las matemáticas basada en estándares es novedosa, y para el desarrollo de la labor pedagógica los estándares son

un referente necesario en cada una de las disciplinas del conocimiento, debido a que están dirigidos a alcanzar mayores logros de aprendizaje, todavía hay mucha dificultad en la educación media para desprenderse de las antiguas formas de trabajar, como se puede ver en la problemática que se describe a continuación.

2.1.3.4 Problemática del aprendizaje de las matemáticas en la educación media.

En cuanto a la problemática del aprendizaje de las matemáticas en la educación media, se establece que el bajo desempeño en matemáticas por parte de los estudiantes en educación media dificulta el avance en su desarrollo académico. Por otra parte, la promoción automática establecida por el MEN, Decreto 230 del 15 de febrero de 2002, que en su artículo noveno dice: "los establecimientos educativos tienen que garantizar un mínimo de producción del 95% del total de los estudiantes que finalicen el año escolar en la institución educativa", implicó que desde la primaria haya estudiantes con falencias aritméticas que no les permitan tener una base fundamental para la educación media. De acuerdo con Carrillo (2009), se presenten las siguientes dificultades:

a. Dificultades de corte académico

- Los estudiante están acostumbrados a una matemática demostrativa, de ejemplificación, y casi ningún profesor le enseña la matemática demostrativa, de razonamiento formal, que más tarde deben usar en la universidad (Perry et al., 2006)

- Los estudiantes no usan diferentes formas de representación en el planteamiento y solución de una situación problema, no argumentan soluciones halladas ni estrategias utilizadas, no dominan procedimientos (aritméticos, algebraicos, estocásticos y geométricos). Se identifica baja capacidad de los estudiantes para abstraer, argumentar y resolver situaciones problema, motivo por el cual los profesores pueden profundizar poco en sus clases debido al nivel que tienen los estudiantes (Penalva et al., 2010).

- Falta de interiorización de los conocimientos en grados anteriores ya que el aprendizaje matemático constituye una cadena de conocimientos en donde se deben interiorizar los conocimientos anteriores para asimilar los nuevos.

- Desconocimiento de conceptos y poco manejo de estructuras. Dificultades semánticas: recuperación de hechos numéricos. Dificultades procedimentales (Fernández, 2013).

b. Dificultades de orden personal

- Baja motivación: los estudiantes se sienten desmotivados por la metodología que se basa en explicaciones del proceso aritmético y luego en ejecución de una serie de ejercicios similares (Fernández, 2013). Para que el estudiante interiorice el aprendizaje matemático con facilidad es necesario ver la utilidad, de esta manera no se perderá el interés y se hará una conexión de los contenidos matemáticos; por lo general, los contenidos matemáticos no se relacionan con el entorno en que se desenvuelven los estudiantes por lo que no tienen sentido (Caballero & Espínola, 2016).

- Déficit de atención, poca memoria de orientación espacio-temporal, escasa comprensión lectora y dificultades de razonamiento lógico (Fernández, 2013).

- Características cognitivas y psicológicas de los estudiantes. Dificultad de comprensión de conceptos matemáticos, manejo de reglas, uso de terminología matemática, falta de organización espacial de los cálculos, alineación de números, inserción de decimales y símbolos durante el cálculo. Escasa comprensión de textos. Trastornos del aprendizaje como acalculia, discalculia, entre otros. En particular, la discalculia se caracteriza por la “dificultad para manejar números, operaciones y conceptos matemáticos, sin la existencia de una causa que lo justifique” (Aparicio, 2012; Carrillo, 2009).

REPOSITORIO

- Escaso desarrollo del pensamiento. Los estudiantes no saben resolver problemas, tienen un bajo desarrollo del pensamiento variacional y del razonamiento covariacional (Aparicio, 2012).

- Falta de compromiso: por la edad de los estudiantes, algunos de ellos toman el estudio sin el compromiso debido (Carrillo, 2009).

- Creencias negativas de los estudiantes con respecto a las matemáticas, tales como "es difícil", "no todos tienen competencias matemáticas"… (Carrillo, 2009).

Las causas de las dificultades de los estudiantes en el área de las matemáticas son muy variadas. A continuación, se mencionan algunas:

- Diversidad de estudiantes en un solo salón, que provienen de diferentes colegios en donde se manejan contenidos matemáticos distintos, y en muchas Instituciones se ha eliminado lo que se ha llamado matemática moderna, teoría de conjuntos, operaciones y relaciones (Carrillo, 2009).

- Sobrecarga de materias a los estudiantes, por parte de las instituciones educativas (Caballero & Espínola, 2016).

- Carencia de herramientas informáticas, lo que los coloca en desigualdad de condiciones con respecto a otros estudiantes y al contexto en general.

- La falta de concordancia entre los contenidos y los procesos de pensamiento correspondientes a la edad. Algunos estudiantes conocen la mecánica de los algoritmos, pero no han desarrollado los conceptos, o no han alcanzado la etapa de pensamiento formal, y aún se encuentran en la etapa de pensamiento concreto (Carrillo, 2009).

- Currículum y didáctica inapropiados: Los objetivos y métodos de enseñanza no están pensados para los estudiantes a quienes van dirigidos, y no consideran los

diferentes ritmos de aprendizaje, los conocimientos previos, ni el nivel de abstracción (Carrillo, 2009). También existen dificultades debidas a la organización y metodología de las matemáticas. La metodología utilizada por el profesor muchas veces predispone el interés de los estudiantes hacia la materia. Esto tiene que ver con la forma en que se exponen los contenidos, las formas de evaluación, y la preparación de los profesores (Carrillo, 2009).

- Dificultades por la naturaleza de las matemáticas: los contenidos matemáticos requieren un alto nivel de abstracción para comprender los conceptos que se imparten (Carrillo, 2009).

Esta última causa de la dificultades del aprendizaje de las matemáticas es muy importante porque el desarrollo del pensamiento lógico abstracto es clave para mejorar la inteligencia matemática para entender conceptos en diferentes áreas del conocimiento; al aplicar procesos lógico-abstractos los estudiantes razonan de manera rápida, crean sus nuevos pensamientos de manera significativa y son gestores al plantear y desarrollar problemas de fácil entendimiento para mejorar procesos cognitivos en la práctica educativa. El pensamiento abstracto permite identificar la esencia de los contenidos cuya particularidad es que luego de señalar los atributos relevantes de un texto se pueda identificar exclusivamente la esencia de las cosas, fortaleciéndose conceptos, juicios de valor y saberes de aprendizaje.

2.1.3.5 Dificultades en el aprendizaje de conceptos abstractos

Los conceptos son uno de los componentes clave de la estructura de la Matemática; ellos tienen un carácter abstracto y se refieren, generalmente, a realidades teóricas que son construidas a través de un proceso de matematización (González, 2005).

Un concepto abstracto denota que no es concreto, no se pueden observar sus propiedades sino con constructos teóricos, como por ejemplo, los conceptos de número

real, línea, círculo (González, 2005). Los abstractos tienen atributos que son poco perceptibles, por lo cual son difíciles de aprehender.

Ahora bien, un concepto matemático establece generalizaciones a partir de datos y, si el estudiante no lo domina o no lo consolida en la mente, se limita a los cálculos y operaciones mentales.

De acuerdo con Toranzos (1965), los conceptos matemáticos son abstractos desprovistos de contenidos. Es de anotar que la abstracción, como lo establece Vergnaud (1991), tiene tres puntos: la invarianza de esquemas o uso del esquema mental; la dialéctica del objeto-herramienta que se refiere al uso que se le da para abstraer propiedades y el papel de los símbolos que conceptualizan los objetos sin importar el contexto.

Toranzos (1965) distingue en todo concepto matemático la extensión formada por propiedades, lo que constituye la comprensión. Entre las dificultades para el proceso de adquisición de conceptos abstractos, asociados con las matemáticas están, de acuerdo con González (2005), las siguientes:

- Experiencias y conocimientos previos. Depende del conjunto de datos sensoriales que posea el estudiante (Van Engen, 1953). Es decir que sin una experiencia relacionada no se pueden formar los conceptos. Es necesario haber alcanzado la etapa de desarrollo necesaria para asimilar los conceptos. Cada estudiante interpreta y analiza en función de su sistema individual de conocimientos y actitudes previamente adquiridos.

- Heterogeneidad de contextos. El aprendizaje en varios contextos facilita la abstracción de rasgos comunes y se incrementa la generalidad y transferibilidad del concepto estudiado (Ausubel, 1980).

PREPRINT

- Tipos de ejemplos que se emplean para identificar atributos que definen el concepto. Son necesarias las experiencias con ejemplos para identificar rasgos esenciales, como lo establece Carroll (1964). En relación al uso de ejemplos, es importante considerar la información que se incluye para ejemplificar el concepto, la forma como se organizan estos ejemplos, y la cantidad de ejemplos a utilizar.

- La utilización práctica del concepto abstracto. Los conceptos son aprendidos más fácil cuando se usan en aprendizajes de nuevos contenidos. El uso de los conceptos cumple dos finalidades, por un lado, sirve para juzgar si el estudiante lo ha dominado realmente y, por otro, propicia una mayor comprensión del concepto (González, 2005).

- Reforzamiento de respuestas correctas. El refuerzo se debe hacer de manera frecuente ya que es un factor importante en el aprendizaje. Se deben determinar las condiciones para dominar un concepto. Para usar un concepto de manera correcta se deben conocer las propiedades esenciales, así como posibles variaciones y cuándo varían. De esta manera se debe separar lo esencial de lo no esencial y contrastar (González, 2005).

Ahora bien, cuando un estudiante adquiere un concepto defectuosamente, el uso de ese concepto tiene implicaciones para la organización de experiencias de enseñanza – aprendizaje, motivo por el cual es importante realizar actividades de aprendizaje para la adquisición del concepto (González, 2005). Por ejemplo, uno de los errores es sobreestimar los rasgos no esenciales, por lo tanto se requiere presentar bajo diferentes aspectos los conceptos nuevos que deben ser aprendidos como lo establece Shardakov (1968). Por ello se hace necesaria la realización de ejercicios que exijan el empleo de los conocimientos conceptuales adquiridos y la resolución de problemas novedosos sobre el mismo tema.

PREPRINT

Otro error de los estudiantes es la excesiva generalización, por lo que se necesita una diferenciación; para esto se debe hacer uso de ejemplos, problemas y diferentes ejercicios al recurrir a comparaciones y contrastes como lo establece González (2005).

En este sentido, Osborne y Gilbert (1979) plantean la necesidad de incluir en las situaciones instruccionales, relativas a la enseñanza de conceptos, abundantes ejemplos, con el fin de mostrar a los aprendices las dimensiones y fronteras de la extensión del concepto.

2.1.3.6 El concepto de parábola, utilidad y aplicaciones.

El concepto de parábola se usa en arquitectura para las construcciones como herramienta de cálculo, por ejemplo, para determinar la estructura y forma de una obra arquitectónica a la hora de estudiar el equilibrio, resistencia o estabilidad de un edificio, puente u otra construcción, o para determinar condiciones de luminosidad, temperatura o acústica. Así mismo se usa como fuente de inspiración para desarrollar la creatividad e imaginación a la hora de construir grandes obras.

Se hace uso de las parábolas en las antenas parabólicas que llevan un reflector parabólico para ser transmisoras, receptoras o dúplex para frecuencias altas, que reflejan ondas electromagnéticas generadas por un dispositivo que se encuentra ubicado en el foco del paraboloide.

Las parábolas se usan también para la construcción de puentes, conchas acústicas, cubiertas de bóvedas, arcos, monumentos; así mismo es usada para los satélites, chorros de agua, cocinas solares, faros de vehículos, trayectorias de objetos celestes y deportes como, por ejemplo, lanzamiento de pelotas (fútbol, baloncesto, jabalina) e iluminación.

La siguiente propiedad de una parábola es muy utilizada: si una fuente de luz se sitúa en el foco de un espejo parabólico, entonces todos los rayos forman, al reflejarse

en la superficie del espejo, concepto usado para el uso de faros, antenas para captar emisiones (Rivera et al., 2017).

Una de las aplicaciones físicas más importantes de la parábola es el movimiento parabólico, este movimiento se caracteriza porque una partícula o cuerpo sólido lanzado en un campo gravitatorio recorre una trayectoria parabólica. Las trayectorias de cualquier cuerpo (bola, pelota, chorro de agua, etc.) que cae atraído por la tierra, también son parábolas (Rivera et al., 2017).

En cuanto a las aplicaciones del movimiento parabólico, éste describe un desplazamiento del cuerpo, el cual es disparado con cierta velocidad inicial que a su vez forma un ángulo con el plano horizontal del cuerpo, en consecuencia la velocidad inicial experimenta componentes en la horizontal (*Vox*) y en la vertical (*Voy*), la primera de ellas obliga al cuerpo a moverse en forma perpendicular con respecto a la gravedad, el componente vertical fuerza al cuerpo a subir, el resultado es la trayectoria curvilínea o parabólica que le da nombre al movimiento.

El movimiento parabólico se usa en ingeniería, industria, deporte y vida cotidiana, por ejemplo, para el lanzamiento de proyectiles, disparo de un proyectil militar, trayectorias de balones de fútbol, pelotas de golf, chorro de agua de una manguera, chorro de agua de aspersores giratorios, lanzamiento de una piedra, saque de voleibol, lanzamiento de un misil, lanzamiento de un disco, rebote de una piedra en la superficie del agua, entre otros.

2.1.3.7 Modelo van Hiele

Desde su experiencia, los van Hiele elaboraron un modelo para explicar el razonamiento de los estudiantes, la forma en que desarrollan el pensamiento

geométrico y cómo el profesor puede propiciar el avance por los niveles de razonamiento superior (Calderón, 2013).

Desde la difusión inicial de los trabajos de los van Hiele, a mediados de los años 70's, han sido numerosos los investigadores que han trabajado con el modelo de van Hiele (Jurado & Londoño, 2005).

Jurado & Londoño (2005) señalan que el común denominador de los estudios acerca de los planteamientos de van Hiele, es la insistencia en aplicarlo a cuestiones geométricas de niveles educativos elementales o medios, aunque De la Torre (2003) y Fiallo (2011), prefieren extenderlo a la aritmética, al análisis matemático y la trigonometría. Por otra parte, Jaime y Gutiérrez (1990) señalan que el modelo de van Hiele es una excelente guía para los profesores ya que fomenta la comprensión matemática.

Pierre van Hiele y Dina van Hiele Geldof, como profesores de matemáticas, idearon una forma que pudiera mejorar el nivel de razonamiento de los estudiantes en geometría pues, a partir de sus observaciones y reflexiones en el aula, notaron que, a diferencia de Piaget, los estudiantes no tienen el mismo nivel de pensamiento en cualquier edad; para ellos cada nivel supone una forma de comprensión, un modo de pensamiento particular, de manera que un estudiante solo puede comprender y razonar sobre los conceptos matemáticos adecuados a su nivel de razonamiento (Jurado & Londoño, 2005).

Jaime y Gutiérrez (1990) señalan que el modelo de van Hiele está conformado por dos aspectos:

- Los niveles de razonamiento: hacen alusión a la parte descriptiva del modelo y presentan una secuencia continua de tipos de razonamientos mediante los cuales progresa la capacidad de razonamiento matemático de los individuos, desde que empiezan su aprendizaje hasta que alcanzan su máximo grado de desarrollo. Para

reconocer el nivel de razonamiento del estudiante a partir de su actividad matemática, los van Hiele diseñaron unos descriptores de nivel, que son las principales características que permiten reconocer o detectar, a partir de la actividad del estudiante, cada uno de esos niveles de razonamiento matemático, los cuales tienen unas propiedades específicas (secuencialidad fija, adyacencia, distinción, separación, cada nivel tiene su lenguaje y consecución).

a) El segundo, llamado "fases de aprendizaje", conforman la parte prescriptiva, la cual está orientada a los profesores y les brinda directrices para ayudarlos a encaminar a sus estudiantes hacia un nivel superior de razonamiento.

- Un tercer elemento es considerado por Jurado & Londoño (2005): la *percepción-Insight* (algunos autores la traducen como "comprensión"; aunque Jaime y Gutiérrez (1990) señalan que este es el fin del modelo).

Van-Hiele señala que un estudiante adquiere *percepción-Insight* si:

- Es capaz de actuar en una situación no familiar.
- Ejecuta de forma competente (correcta y adecuadamente) las acciones requeridas por la situación y emplea intencionalmente (de manera deliberada y consciente) un método que resuelve la situación.
- Los estudiantes comprenden lo que hacen, por qué lo hacen y cuándo lo hacen; además, pueden aplicar su conocimiento a la resolución de nuevos problemas no rutinarios".

Según Jaime & Gutiérrez (1990), y como se ilustra en la Figura 9, entre las características centrales del modelo de van Hiele se pueden mencionar los diferentes niveles de razonamiento; el estudiante sólo comprende lo que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento. Es necesario esperar que los

estudiantes alcancen un nivel de razonamiento superior si la relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual y no se puede enseñar a un estudiante a razonar de una forma determinada, pero si se le puede ayudar a que adquiera la experiencia para razonar.

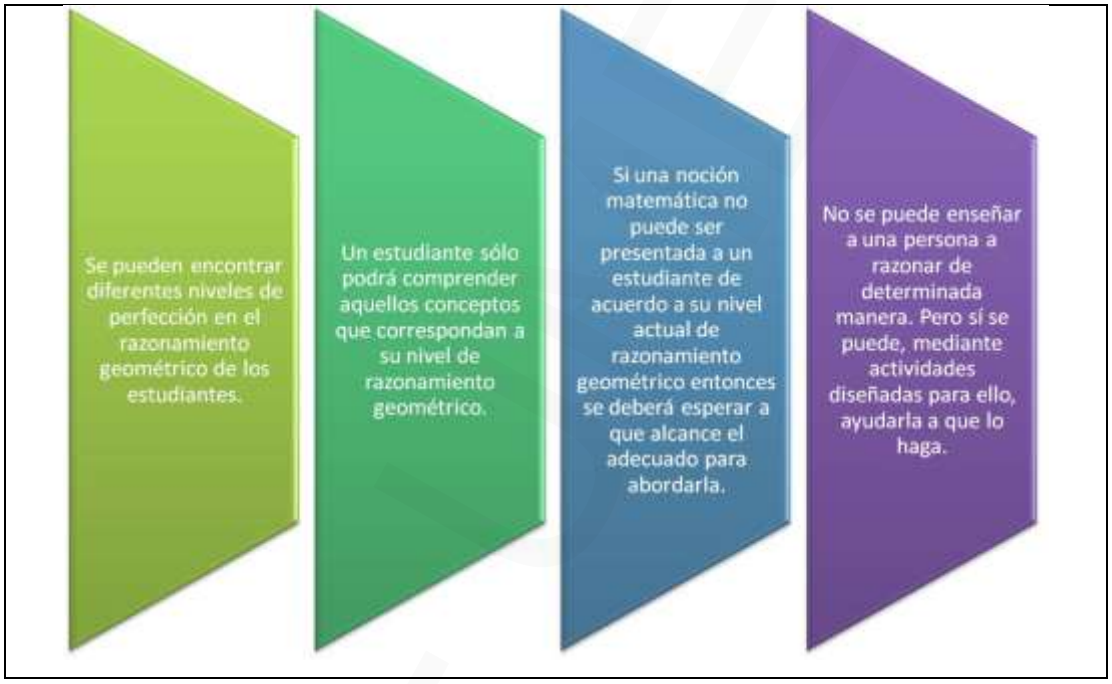


Figura 9. Ideas centrales del Modelo de Van Hiele

Corberán (1996) usa el modelo de van Hiele en un estudio que aporta a la comprensión del concepto de área en estudiantes de 15 y 16 años; si bien el concepto no está asociado con el objeto matemático de esta investigación, su trabajo llama la atención porque la autora diseñó 33 actividades que constituyeron una unidad de enseñanza a partir de las fases del modelo, en especial en lo que se refiere al papel del profesor en los diferentes momentos del trabajo en grupo de los estudiantes.

De manera similar, Fiallo (2011) empleó las fases del modelo de van Hiele para diseñar una unidad de enseñanza de Trigonometría, a saber: (1) Información, (2) Orientación dirigida, (3) Explicitación, (4) Orientación Libre, e (5) Integración. Dado

que el estudio tenía por objetivo aportar información para mejorar la comprensión, el autor desarrolló implícita, continua y transversalmente la fase tres en el transcurso de las discusiones de los grupos entre sí y de las discusiones de los grupos con el profesor y con el investigador.

Gaitán et al. (2014) abordan las fases de explicitación y orientación libre desde una perspectiva de instrucción matemática para la comprensión, con el propósito de evidenciar algunas dificultades de los estudiantes en la comprensión de la parábola. Así mismo, la estructura de las fases de aprendizaje y las características propias de cada fase se corresponden bien con los principios didácticos generales del aprendizaje por descubrimiento en sus formulaciones más recientes.

Como se evidencia, el modelo de van Hiele es una herramienta didáctica muy útil para facilitar la acción profesor en lo referido a la renovación de la estrategia didáctica que permita a los estudiantes entender la geometría (Barrantes & Blanco, 2004). La anterior investigación da importancia a la interacción en el aula y al papel del profesor; asimismo da cuenta que, en su modelo, "enseñar" no se refiere al significado tradicional de enseñar una serie de definiciones, conceptos y propiedades del objeto matemático; "su centro de atención no es el aprendizaje de hechos y destrezas, sino la comprensión de conceptos y el perfeccionamiento de las formas de razonamiento" (Corberán, 1996).

De la literatura revisada, también queda clara la necesidad de enmarcar teóricamente el diseño del material que se emplea para este propósito, por lo que en el Modelo de van Hiele se encuentran elementos importantes (y ya validados) que permiten cumplir con esta exigencia y que, además, conducen inherentemente a profundizar en la parábola como lugar geométrico para lograr el diseño que se pretende. Este esfuerzo pedagógico y didáctico resulta importante según van Hiele (1986) porque:

PREPRINT

> […] incluso en las circunstancias actuales vale la pena que un profesor concienciado dedique su esfuerzo a la consecución de comprensión. En los dos primeros cursos tendrá que dedicarse a mejorar la disposición de sus estudiantes. Habrá de resignarse a que parte del resultado se vuelva a perder bajo la influencia del examen final. Hará bien en enfrentarse con firmeza a aquellos que valoran más las apariencias que los progresos efectivos. Pero pese a todos los impedimentos y trabas, se habrá fortalecido por la idea de que sus clases tienen sentido y que realmente ha hecho todo lo posible en las condiciones actuales (p. 100).

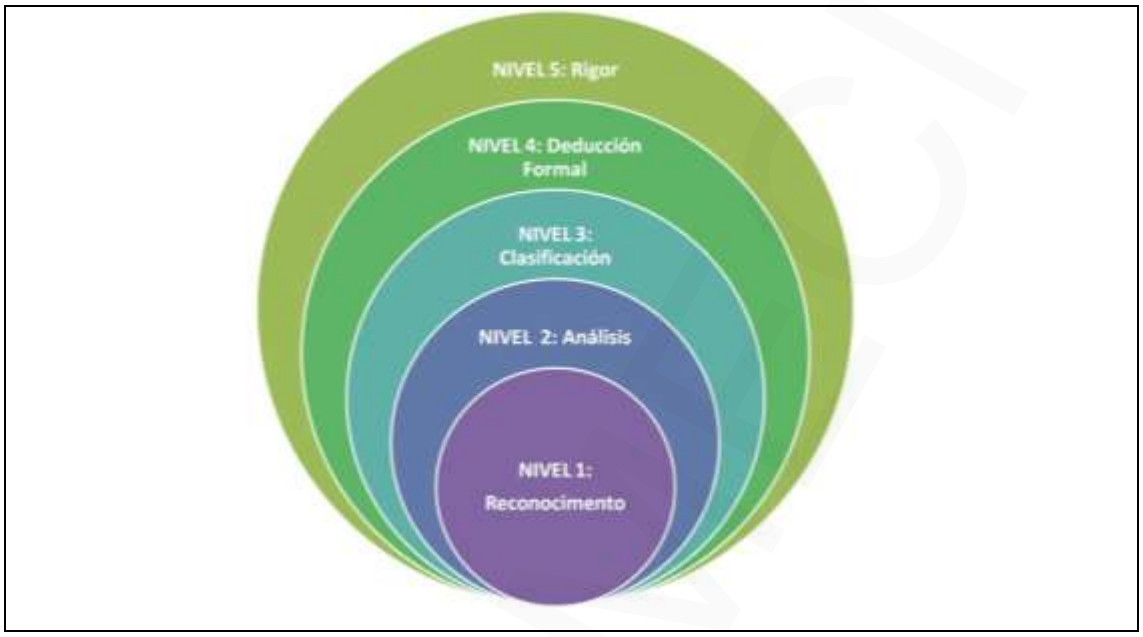
Los resultados anteriores son pertinentes para este estudio, por cuanto dan cuenta de algunas de las dificultades que han sido reportadas en relación al aprendizaje (y la enseñanza) de la parábola como lugar geométrico, los cuales enfatizan la necesidad de crear ambientes en los que se propenda por la comprensión, pese a que lo común sean los métodos de cálculo y los algoritmos (van Hiele, 1986).

> Ahora es importante saber cómo se puede conseguir que los estudiantes quieran adquirir comprensión. Muchos estudiantes se han acostumbrado en la escuela básica a dominar la materia exclusivamente mediante métodos de cálculo. Por ello, la tarea del profesor será, en primer lugar, convencer a los estudiantes de que la comprensión es mucho mejor. La práctica demuestra que las fuerzas que empujan hacia las técnicas de cálculo son tan fuertes que el profesor tiene que pelear durante todo el bachillerato para demostrar que la comprensión, a la larga, vence (van Hiele, 1986. p.91).

Niveles de razonamiento según van Hiele

Los niveles de razonamiento son etapas de desarrollo intelectual y cognoscitivo (Calderón, 2013); estos se ilustran en la Figura 10 que sigue:

REPOSITORIO



Fuente: Calderón (2013).

Figura 10. Niveles de razonamiento del modelo van Hiele

De acuerdo con el modelo se determina el nivel y la forma como razona el estudiante (Calderón, 2013). A continuación, se presentan los niveles y las características:

Nivel 1: De visualización o reconocimiento (Calderón, 2013; Jaime & Gutiérrez, 1990)

Perciben las figuras geométricas en su totalidad, de manera global, como unidades, al generar en ocasiones características que no corresponden a las descripciones que hacen.

- Hacen referencia a prototipos externos para describir las figuras; por ejemplo, dicen que un cuadrado es como una ventana.

- Usan propiedades imprecisas para ordenar, comparar, describir o identificar figuras geométricas; por ejemplo, dicen que los triángulos tienen tres puntas.

- Perciben las figuras como objetos individuales, es decir no son capaces de ver las características de una figura a otra de su misma clase.

- Sólo describen el aspecto físico de las figuras; el reconocerlas diferenciarlas, o clasificarlas se basa sólo en semejanzas o diferencias físicas globales entre ellas.

- La mayoría de veces al describir las figuras se basan en su semejanza con otros objetos (no necesariamente geométricos) que conocen, y comúnmente utilizan frases como “se parece a…”, “tiene forma de…”.

- No reconocen claramente las partes que componen las figuras, ni sus propiedades geométricas o matemáticas.

Este nivel no es exclusivo de los estudiantes de corta edad, en él se clasifican todos aquellos que sólo poseen conceptos nuevos y es por esto que es el nivel de menor estancia de los estudiantes.

Nivel 2: De análisis (Calderón, 2013; Jaime & Gutiérrez, 1990)

Las figuras geométricas están formadas por elementos los cuales describen y dan propiedades informalmente.

- Los estudiantes en este nivel no son capaces de elaborar definiciones, porque muchas definiciones en Geometría se elaboran a partir de propiedades.

- Al observar las figuras pueden reconocer algunas propiedades y, al experimentar con ellas, pueden generalizar.

- No hacen clasificaciones formales, sólo relacionan unas propiedades con otras, a partir de algunas partes o elementos de las figuras.

- Manejan un vocabulario más formal que en el nivel anterior.

PREPRINT

- Consideran que la geometría es experimental y, por lo tanto, observan una variedad de figuras, miden, prueban y concluyen a partir de sus experiencias.

Nivel 3: de Ordenación o clasificación (Calderón, 2013; Jaime & Gutiérrez, 1990)

Se cambia la forma de percibir las figuras geométricas, se ven como conjunto de elementos que cumplen algunas propiedades para el razonamiento matemático.

- Son capaces de reconocer que unas propiedades se deducen de otras, pero no se hacen demostraciones.
- Pueden entender una demostración explicada pero no pueden construirla por sí mismos.
- Pueden realizar razonamientos deductivos informales.
- Usan representaciones gráficas para justificar deducciones.
- Pueden identificar propiedades
- Identifican conjuntos mínimos de propiedades que caracterizan a una familia de figuras.
- Hacen uso de definiciones.

Los estudiantes han adquirido la habilidad de conectar lógicamente diversas propiedades, pero no logran la demostración de un teorema.

Nivel 4: De deducción formal (Calderón, 2013; Jaime & Gutiérrez, 1990)

Los estudiantes pueden hacer demostraciones formales, descubrir y probar nuevas propiedades más complejas.

- Las demostraciones sirven para verificar tesis.

REPOSITORIO

- Realizan conjeturas
- Construyen demostraciones
- Aceptan la existencia de definiciones equivalentes
- Dan argumentos deductivos formales.
- Pueden comprender la estructura axiomática de las matemáticas.
- Buscan justificaciones y elaboran criterios, argumentos y razones.

Alto nivel de razonamiento lógico, y visión globalizadora de las Matemáticas.

Nivel 5: De rigor (Calderón, 2013; Jaime & Gutiérrez, 1990)

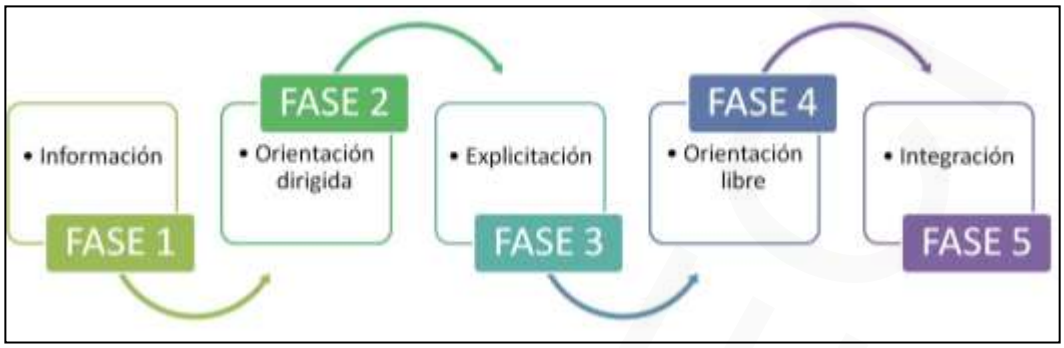
Es el último nivel, y a pesar que se ha hecho hincapié de que los niveles no están relacionados con la edad, se asume que es un nivel propio del nivel universitario o profesional:

- Puede prescindir de cualquier soporte gráfico o concreto para lograr la deducción.
- Puede utilizar más de un sistema axiomático, analizarlo y compararlo.
- Puede pasar de una geometría a otra.

En sus trabajos los van Hiele enfatizan en que el paso de niveles depende de la enseñanza recibida y los materiales usados.

Fases del modelo van Hiele. Es importante tener en cuenta que las fases del modelo de van Hiele las desarrolla el profesor con el estudiante para que capte la información. Según Las fases modelo van Hiele (como se citó en Jaime y Gutiérrez, 1990), son: información, orientación dirigida, orientación libre e integración, y se pueden observar en la figura 11.

REPOSITORIO UT



Fuente: (Jaime & Gutiérrez, 1990)

Figura 11. Fases del modelo van Hiele

Las características principales de cada una de las fases de van Hiele, según Jaime y Gutiérrez (1990), se describen a continuación:

Fase 1: Preguntas/información. Fase oral y mediante preguntas. Se determina el punto de partida o conocimientos previos, se hace uso de test. En esta fase el profesor determina la situación real de los estudiantes, se da a conocer el tema a trabajar, los materiales y los estudiantes adquieren conocimientos para realizar el trabajo. Al hacer uso de las preguntas adecuadas, y de manera individual, se pueden determinar los conocimientos de los estudiantes. Se deben establecer los objetivos de acuerdo al tema, los descriptores y las actividades propuestas. Se debe aplicar una entrevista para analizar el razonamiento de los estudiantes a fin de detectar su razonamiento en fada fase.

Fase 2: Orientación Dirigida. Comprende una serie de actividades concretas, secuenciadas, para que los estudiantes descubran, comprendan, asimilen y apliquen. Los estudiantes deben explorar el tema a tratar, por medio de un barrido de investigaciones sobre el tema, para determinar conceptos, estructuras y características. Esta fase requiere el apoyo del profesor pues es necesaria la dirección para conseguir los objetivos, y deben existir actividades concretas para que los estudiantes descubran, comprendan y apliquen. Por ejemplo, se puede hacer uso del software GeoGebra con elementos como curvas, rectas y puntos al manipular deslizadores. El objetivo de la

fase es proporcionar elementos para que el estudiante explore, por ejemplo, utilizar estiramientos horizontales para describir cuando un trozo de curva está controlado.

Fase 3: Explicación (Explicitación): Es una fase de interacción entre estudiantes -intercambio de ideas y experiencias-, en la que el papel del profesor es corregir el lenguaje de los estudiantes. Esta fase se realiza en grupo, lo que contribuye a aumentar el vocabulario y a ordenar ideas para su análisis y comprensión. Los estudiantes aprenden a expresar sus ideas para que sean comprensibles a los demás.

Fase 4: Orientación Libre. El estudiante se enfrenta a actividades más complejas referidas a aplicar lo adquirido. Los problemas se pueden orientar de manera libre y de diferentes maneras, lo que puede llevar a diferentes respuestas de acuerdo a la interpretación para formar relaciones. En esta fase se hace uso de problemas abiertos para abordarlos de diferente manera con respuestas válidas, de acuerdo a la interpretación del enunciado, lo que obliga a su justificación a la hora de dar la respuesta.

Fase 5: Integración: En esta fase, los estudiantes adquieren una visión general de los contenidos y métodos que tienen a su disposición, y relacionan los nuevos conocimientos con otros campos. Debe ser una acumulación, comparación y combinación de cosas que el estudiante ya conoce. Así mismo, se lleva a cabo la síntesis de lo ya trabajado y se crea un conjunto de conocimientos aprendidos y mejorados para fortalecer los previos. Se debe integrar lo aprendido en las otras fases para determinar si se generó progreso respecto al nivel de razonamiento inicial.

En cada una de las fases es importante el lenguaje y la entrevista de carácter socrático para que el estudiante clarifique sus argumentos y se genere el nuevo nivel de razonamiento.

REPOSITORIO

2.1.3.8 La entrevista socrática

De la Torre (2003) señala que el camino hacia el conocimiento es un proceso gradual. Así mismo, Sucerquia et al. (2013) señalan que la entrevista socrática es un medio adecuado para realizar el seguimiento de la construcción y evolución de un concepto matemático en la mente del estudiante. De acuerdo con Jaramillo & Campillo (2011, p. 82) la entrevista socrática es una herramienta fundamental en estudios realizados, debido a que ha permitido determinar los niveles de razonamiento a la luz del modelo de van Hiele.

La entrevista socrática es un instrumento para detectar el nivel de razonamiento en el que se encuentra el estudiante respecto a un concepto, para hacerlo progresar en su comprensión sobre el mismo. De la Torre (2003, p. 116) establece que el propósito de la entrevista socrática es que el estudiante reflexione sobre las preguntas formuladas, sobre las respuestas dadas y relacione las propiedades que utiliza en sus razonamientos.

De acuerdo con Londoño (2011), la entrevista de carácter socrático es una estrategia metodológica que permite la comprensión en relación con conocimientos matemáticos. La entrevista socrática consta de dos partes: una destructiva y otra creativa. En la primera se toma como punto de partida la concepción del interlocutor, y le permite descubrir al entrevistado las contradicciones. La segunda parte es la mayéutica donde el entrevistado comprende el objeto a investigar.

Otros autores, como Posner & Gertzog (1982), la definen como una técnica de conversación dirigida a un propósito para explorar procesos de pensamiento que se dan en los estudiantes. La entrevista permite identificar concepciones, conceptos y relaciones, además de permitir analizar cómo evoluciona el razonamiento del estudiante.

REPOSITORIO

Diseño de la entrevista socrática

Londoño (2011) y Jurado & Londoño (2005) señalan parámetros a tener en cuenta para el diseño y aplicación de la entrevista socrática, los cuales se agrupan en un listado que denominan "decálogo de entrevista socrática", debido a que tales características fueron inferidas del diálogo de Sócrates con el esclavo de Menón, como una ampliación de las ideas propuestas por Jaramillo & Campillo (2001):

1. **La intencionalidad de la entrevista**: El entrevistador debe conocer los objetivos que debe lograr el estudiante en el desarrollo de la entrevista para determinar el nivel de razonamiento. Tener claridad de los aspectos a alcanzar, no perder el rumbo de la entrevista, no perder de vista las características del conocimiento matemático (Londoño, 2011; Santa, 2011; Jurado & Londoño, 2005; Jaramillo, 2001).

2. **El lenguaje**. El entrevistador debe manejar un lenguaje acorde con el vocabulario del estudiante, para explicitar la comprensión de los conocimientos y evidenciar el conocimiento matemático producido. El entrevistador debe estar atento al vocabulario para que fluya y propicie el razonamiento. Se debe hacer uso de palabras que motiven a responder de manera espontánea, y hacer uso de un diálogo fluido con naturalidad, para generar confianza (Londoño, 2011; Jurado & Londoño, 2005; Jaramillo, 2001).

3. **Conceptos básicos.** Las preguntas iniciales que hace el entrevistador formulan el propósito de la indagación, y tienen presente los conceptos básicos que son necesarios para la comprensión del concepto que es objeto de estudio. Es necesario indagar sobre conocimientos previos, generar preguntas y establecer si las preguntas permiten saber si el estudiante supera las habilidades o conocimientos del primer nivel de razonamiento (Londoño, 2011; Jurado & Londoño, 2005; Jaramillo, 2001).

4. **Experiencias previas del entrevistado.** El entrevistador plantea situaciones a partir de su experiencia, y hace preguntas inquisitivas que conduzcan a la búsqueda de lo que se quiere conocer; por ejemplo, imágenes o ejemplos de la vida diaria que contribuyan a que el entrevistado reflexione y responda sobre lo que él cree saber (Londoño, 2011; Jurado & Londoño, 2005; Jaramillo, 2001).

5. **El diálogo inquisitivo.** Permite una interacción con el entrevistado para manifestar soluciones y ayudar a la comprensión del concepto, mediante un pensamiento discursivo para descubrir, encontrar soluciones, comprender conceptos y, finalmente, ampliar relaciones. En esta parte el estudiante debe percibir relaciones o nuevos conceptos. El papel del entrevistador es guiar al entrevistado y conducirlo mediante la indagación y el razonamiento. Cuando el estudiante forma nuevas relaciones se puede establecer que ha formado una estructura de pensamiento (Londoño, 2011; Jurado & Londoño, 2005; Jaramillo, 2001).

6. **La movilización del pensamiento.** Se basa en realizar una pregunta varias veces de manera diferente para obtener respuestas más elaboradas con lenguaje más preciso y mejores argumentos. El estudiante tiene la posibilidad de dar respuestas elaboradas y ampliar o modificar su red de relaciones. Para el diálogo inquisitivo-discursivo el entrevistado debe identificar características comunes, elaborar conjeturas y modificar conceptos. El entrevistador puede hacer uso de mecanismos visuales, verbales o escritos (Londoño, 2011; Jurado & Londoño, 2005; Jaramillo, 2001).

7. **Aporte de información.** Las preguntas de la entrevista dan información para que los estudiantes logren comprender el concepto. Se debe motivar a la reflexión para que, el estudiante, se cuestione sobre sus propios pensamientos por medio de razonamientos, y de esta manera se lleva a ampliar su vocabulario, y a establecer relaciones a partir de la información suministrada, pero no debe sugerir

enseñanza ni explicaciones (Londoño, 2011; Jurado y& Londoño, 2005; Jaramillo, 2001).

8. **Problematización con las ideas**. La reflexión del estudiante alrededor del concepto permite enriquecer su saber y analizar carencias o dificultades. Es necesario tener en cuenta que hay preguntas que brindan información para que el estudiante sea consciente; así mismo, se trata de que entre en contradicción y genere conflictos internos frente a la confrontación de ideas, para llegar a la verdad, de manera que pueda cambiar la estructura del pensamiento frente a los conceptos que se tenían, y ahí entra el entrevistador para elaborar, modificar y extender la red de relaciones (Londoño, 2011; Jurado & Londoño, 2005; Jaramillo, 2001).

9. **El paso por los tres momentos.** El entrevistado pasa por tres momentos: en el primer momento el entrevistado cree saber la respuesta a la pregunta, y responde en función de eso. En el segundo momento, a través de nuevas preguntas que el profesor hace, el estudiante se problematiza, y descubre que lo que pensaba no es era lo correcto o estaba incompleto. En el tercer momento, el entrevistado ve la necesidad de llegar a la verdad al entrar en contradicción consigo mismo (Londoño, 2011; Jurado & Londoño, 2005; Jaramillo, 2001, De la Torre, 2003).

10. **Red de relaciones.** Las preguntas de la entrevista deben estar formuladas y organizadas de forma que el entrevistado pueda elaborar una red de relaciones alrededor del concepto que se estudia. Esto permite generar nuevos conceptos (Sucerquia & Londoño, 2015; Londoño, 2011; Jurado & Londoño, 2005; Jaramillo, 2001).

PREPRINT

Ventajas de la entrevista socrática.

La entrevista socrática facilita el ambiente para construir conocimiento, en la medida que el profesor dirige el diálogo y permite el descubrimiento del estudiante (Londoño, 2011; Jurado & Londoño, 2005; Jaramillo, 2001; Sucerquia & Londoño, 2015).

Según lo anterior, el propósito de la entrevista socrática no es definir ni afirmar lo que es un determinado tema o concepto, sino aumentar la comprensión sobre este, para lo cual se emplean las propias palabras del estudiante, para convencerlo de que sabe menos de lo que pensaba, y se vea obligado a abrir su mente a nuevas posibilidades que no había considerado antes (Copeland, 2010).

El propósito de la entrevista socrática es que el estudiante reflexione acerca de las preguntas y de las respuestas para que sea consciente de sus razonamientos. En el presente estudio se espera que el producto de la reflexión sea la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, y que a su vez se propicie la expresión verbal de una definición correcta, aunque no sea de tipo formal.

En cuanto a las aplicaciones de la entrevista socrática en diferentes contextos, Santa & Jaramillo, (2007) analizaron y caracterizaron el proceso de comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico, mediante el doblado de papel, a través de la entrevista socrática de manera individual, y dedujeron conclusiones a partir de un sistema de enlaces lógicos entre los conceptos. En la red de relaciones, las preguntas se diseñaron de tal modo que el estudiante pudiera construir una red de relaciones alrededor del concepto de elipse como lugar geométrico, a través de la visualización de construcciones hechas mediante el doblado de papel y los conceptos concretos de mediatriz y de circunferencia.

La entrevista socrática está concebida como una red de relaciones que permiten que tras cada pregunta se tenga una intencionalidad para que el entrevistador relacione,

razone y reflexione a partir de la red de relaciones. En este estudio, la red de relaciones gira en torno a la noción de parábola para que el estudiante propicie su acercamiento al concepto y que permita al estudiante progresar en el razonamiento.

Condiciones para la aplicación de la entrevista

A continuación, se presentan las condiciones para la aplicación de la entrevista socrática:

- Es necesario hacer una búsqueda de definición verbal hasta llegar al concepto.
- El estudiante debe tener participación activa, y ser protagonista de su aprendizaje.
- El profesor debe permitir la construcción gradual del concepto.
- El profesor toma en cuenta el ritmo de cada estudiante.
- El profesor debe crear un ambiente relajado y agradable para brindar a los estudiantes confianza, de manera que puedan expresar de forma verbal las opiniones y razonamientos.
- El profesor debe ser cuidadoso con los gestos o frases al hacer preguntas, para no evidenciar si las respuestas son correctas o incorrectas.
- La participación de los estudiantes debe ser voluntaria.
- El profesor debe explicar que la participación no genera calificación alguna.
- Es importante hacer uso de un método de visualización adecuado para establecer una relación profesor-estudiante, mediante preguntas y respuestas para construir el concepto y analizar pautas de razonamiento.
- Es importante no hacer uso de fórmulas, nomenclatura o notación matemática.

REDIMAT

Para efectos de esta investigación, la entrevista se aplicará mediante el software *GeoGebra*, y su plataforma en línea, por lo cual, esto requiere que se cumplan otras condiciones adicionales:

- El estudiante debe tener los conocimientos básicos en el manejo del software

- Para trabajar en la plataforma https://www.geogebra.org/group/stream/ se requiere tener acceso a internet.

2.1.3.9 Software para la didáctica de la geometría

El empleo de la tecnología facilita el aprendizaje en diferentes campos y, como lo establece Korenova (2017), hay una creciente presencia de su uso en asignaturas como matemáticas para favorecer el aprendizaje y fortalecer capacidades en las que el aprendizaje colaborativo mejora la motivación y el interés para la indagación y el fortalecimiento de habilidades como el razonamiento. Por lo tanto, al incluir software educativo en la enseñanza de matemáticas y geometría. Sin embargo, es necesario capacitar a los profesores en el empleo de herramientas tecnológicas para su integración en la enseñanza.

El uso del software para la enseñanza de la geometría se generalizó hacía la década de los 80 con *Logo*, luego apareció *Cabri* en 1988 con la geometría dinámica. *Cabri* es un software educativo matemático que incluye la geometría, permite construir objetos geométricos, visualizarlos manipularlos, transformarlos y realizar medidas, hace uso de 3D para visualizar las figuras; posteriormente surgieron programas como *Sketchpad*, que permite manipular los objetos gráficos, y fue el pionero en la interacción persona-computador; este software permitía dibujar puntos, segmentos de línea, arcos, ángulos, duplicar objetos y se hacía uso del lápiz óptico para dibujar en el monitor; así mismo, tenía la capacidad de borrar líneas y hacer uso del *zoom*. Otro software importante que surgió como herramienta para la enseñanza de la geometría fue *Cinderella*, procesador geométrico con vistas no euclidianas y para crear ejercicios

de construcción, que permite manejar en paralelo la vista euclidiana, hiperbólica y esférica de una misma construcción, además, permite visualizar las construcciones a medida que se realizan en tiempo real y acotar automáticamente rectas, ocultar y colorear objetos; también se puede hacer uso de unidades como ángulos, radianes, y exportar a HTML como construcciones manipulables sin software extra.

En cuanto a *GeoGebra,* es un software matemático interactivo libre, escrito en Java y disponible en múltiples plataformas. *GeoGebra* es un procesador matemático y algebraico que reúne geometría, álgebra, estadística y cálculo. Permite el trazado dinámico de construcciones geométricas y su representación gráfica (Rodríguez, 2005).

Peña (2010) resalta que los *software* de geometría dinámica (SGD) contribuyen con nuevas posibilidades en la enseñanza de la geometría ya que se supera el carácter estático de las figuras en el papel. Al respecto, Mora (1973) considera que "los programas de Geometría Dinámica son útiles para que el estudiante descubra por sí mismo conceptos y procedimientos mediante la exploración de situaciones prácticas" (p. 166).

Fiallo (2000 citado por Ferreira et al. 2018) señala que un software especializado para las matemáticas y su enseñanza requiere de un modelo que permita conocer cómo el estudiante aprende a razonar en geometría, y ayuda a organizar el trabajo en el aula para que se adquieran los niveles de razonamiento.

Así mismo, Fiallo (2011) en su investigación, planteó el diseño de una unidad de enseñanza de trigonometría y fusionó el modelo de van Hiele y *Cabri Geometre* como herramienta didáctica, y concluyó que el software de geometría dinámica (SGD) motiva a los estudiantes a saber por qué son verdaderos los conceptos y propiedades estudiadas ya que, además, les proporciona conocimientos necesarios para que formulen razonamientos y demostraciones sobre ellos.

En el estudio de Fiallo (2011), los estudiantes exploraron y experimentaron con objetos y relaciones geométricas y numéricas, lo cual favoreció la interrelación entre explorar y demostrar, entre hacer sobre el ordenador y justificar con el uso de argumentos teóricos.

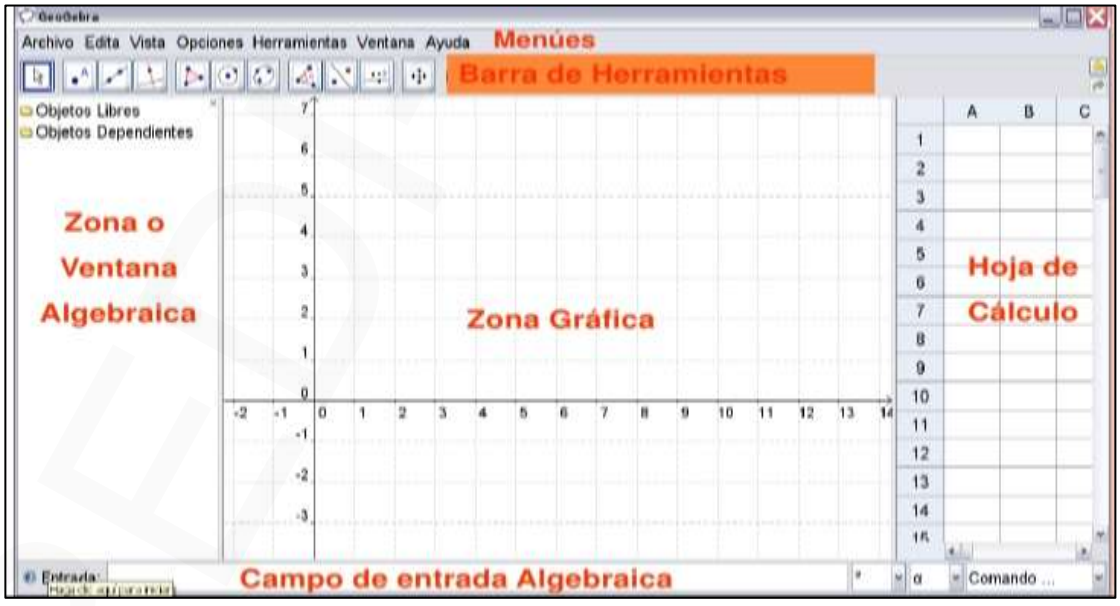
Por otra parte, Acosta & Fiallo (2017) realizaron un estudio para identificar múltiples transformaciones, encontrando cambios en las concepciones y en las prácticas. En relación a las cónicas y los SGD, Gaita y Ortega (2014) trabajaron con construcciones de regla y compás relacionadas con la noción de lugar geométrico en estudiantes de arquitectura, e incluyeron en su estudio algunas actividades con el uso de *GeoGebra*, lo cual favoreció que los estudiantes adquirieran una concepción dinámica y global de este concepto. Por otra parte, López & Aldana (2013) emplearon *GeoGebra* para conocer cómo los estudiantes adquieren la comprensión del concepto de parábola, destacando que con las TIC se logra una mayor comprensión del objeto matemático.

Características del software *GeoGebra*. Cabe señalar que en 2001 salió la primera versión, cuyo creador fue el equipo de Markus Hohenwarter, del departamento de Didáctica de la matemática de la Universidad de Salzburgo (Austria), como parte del trabajo de grado doctoral para crear una calculadora de uso libre para trabajar algebra y geometría (Arteaga et al., 2019)

GeoGebra es un software interactivo donde dota de movimiento a la figura y genera interacción entre profesores y estudiantes con actividades de enseñanza, desde el nivel básico hasta el superior. *GeoGebra* permite realizar construcciones geométricas y mover los puntos de construcción para observar las características de las figuras. Posee una ventana para mostrar las expresiones algebraicas que representan líneas, segmentos, funciones, círculos y puntos de la construcción. Además, permite calcular la derivada de las funcione (Murillo & Caicedo, 2017).

GeoGebra está realizado en Java, por lo que es compatible con sistemas de Windows, Linux Solaris o macOSX. Guarda las construcciones en archivos XML con extensión ggb, es gratuito y tiene código abierto GNU GLP. Está disponible en español y con manual de ayuda. En internet se encuentran foros para su uso y ofrece una wiki para compartir creaciones con los demás usuarios. Las creaciones son exportables a sitios web y se pueden crear páginas dinámicas en poco tiempo (Arteaga et al., 2019).

GeoGebra es un software educativo gratuito y se puede instalar en cualquier computador, mientras no sea para uso comercial. Se puede instalar en colegios y en las casas de los estudiantes para su práctica. Posee una zona de trabajo donde se hacen las construcciones geométricas. La parte central, de la interfaz, con sus tres vistas (Algebraica, Gráfica y Hoja de Cálculo), permite la visualización de tres diferentes representaciones de un objeto (representación gráfica, algebraica y tabular). Las barras contienen una serie de menú desplegables que permiten controlar la mayoría de las acciones que *GeoGebra* puede llevar a cabo (Murillo & Caicedo, 2017), y se encuentran situadas en la parte superior de la ventana, justo debajo del nombre de la ventana como se observa en la Figura 12 que sigue.



Fuente: Elaboración propia en la ventana de *GeoGebra*

Figura 12. *GeoGebra* pantalla principal (zonas)

Para comprender el uso y aplicación del software en mención es necesario familiarizarse con guías y utilizar las herramientas poco a poco hasta llegar a dominarlas. Al un software de geometría dinámica permite construcciones de geometría elemental y, actualmente, en su versión beta, construcción de sólidos geométricos.

GeoGebra integra perfectamente a través de su interfaz, tanto el trabajo desde una perspectiva puramente geométrica en la ventana gráfica, como desde una vista totalmente analítica en la ventana algebraica, de este modo cada uno puede trabajar en una ventana u otra interactuando con ambas y pasándose de una a otra en cada momento.

Las construcciones realizadas permiten su uso como instrumento para el estudio de un programa clásico de representación gráfica y de tratamiento de puntos notables: corte con los ejes, extremos, función derivada, integral, entre otros. Es de muy fácil manejo en contraste a su potencial. El aprendizaje es muy intuitivo y se realiza al hilo de su utilización en contextos de aprendizaje, lo que no requiere ni sesiones especiales de manejo del programa ni elaboración de apuntes sofisticados.

Permite introducir coordenadas y ecuaciones de forma directa. Permite manejarse con variables vinculadas a números, vectores y puntos; permite hallar derivadas e integrales de funciones y ofrece un repertorio de comandos propios del análisis matemático, para identificar puntos singulares de una función, como raíces o extremos.

Tiene implementadas rutinas de animación de funciones y de localización de máximos, mínimos, puntos de inflexión, función derivada, integral definida, recta tangente en un punto. También cabe la posibilidad de crear construcciones geométricas fundamentales con regla y compás, para estudios de triángulos y polígonos en general, construcción de cónicas, entre otros.

PREPRINT

Para la comunidad que maneja el lenguaje LATEX, el programa ofrece la posibilidad de exportar código PSTricks que permite construir gráficos de carácter vectorial y compilarlos en LATEX.

Existe una gran comunidad de usuarios de *GeoGebra,* que crece exponencialmente, además de tratarse de una comunidad muy proactiva, esto permite acceder a una multitud de construcciones realizadas por miembros de dicha comunidad, estas actividades pueden ser aplicadas y adaptadas para el uso en las aulas de clase.

Los estudiantes pueden manipular las construcciones realizadas, esto le permite experimentar variaciones en las medidas para plantear y verificar propiedades matemáticas que no son visibles con la sola teoría, y así poder conjeturar definiciones y teoremas. Les permite manipular construcciones propias o ajenas y deducir relaciones y propiedades para resolver problemas de construcción. El software es un recurso para la comprensión de axiomas, propiedades y teoremas geométricos. Se puede usar con internet (*on line*) o instalarlo en la computadora (*off line*). También posee una hoja de cálculo numérico y simbólico, además de ecuaciones, funciones elementales, representación de derivadas e integrales. Este software se actualiza constantemente y a las nuevas versiones se le incorporan mejoras y complementos como macros y animaciones.

Para un profesor, *GeoGebra* se convierte en una herramienta para crear materiales educativos estáticos, como imágenes y protocolos de construcción, o dinámicos con demostraciones como apoyo para explicar temas de matemáticas. Se pueden crear actividades para que los estudiantes deduzcan relaciones, propiedades y resultados mediante su interacción.

***GeoGebra* y los niveles de van Hiele.** De acuerdo a Llerena (2019), el uso de *GeoGebra* a través del razonamiento de van-Hiele demostró que el 50% de los estudiantes desarrollaron capacidades para demostrar teoremas de forma rudimentaria,

PREPRINT

y más del 30% lograron demostrarlos en forma justificada; la metodología desarrollada fue flexible y se brindó la posibilidad de crear nuevos recursos dinámicos para demostrar otros teoremas. Se hizo uso de una metodología que involucraba preguntas abiertas y ligadas al teorema geométrico que busca entender axiomas y propiedades hasta llegar a la demostración. Cada pregunta estuvo regulada por una casilla de control para encriptar la información de la construcción o de la respuesta, las preguntas se activaron de forma secuencial para que los estudiantes razonaran y expusieran sus ideas, y la metodología permitió el paso de los estudiantes de niveles inferiores de razonamiento a niveles superiores de acuerdo con van Hiele.

Por otro lado, en el trabajo realizado por Maguiña (2013) se diseñó una propuesta didáctica basada en las fases de aprendizaje del Modelo Van Hiele, para facilitar el ascenso de los estudiantes de un nivel de razonamiento al inmediato superior. Se analizaron y compararon los grados de adquisición que tenía un grupo de estudiantes en torno del objeto matemático cuadriláteros. Se concluyó que la propuesta didáctica de enseñanza de los cuadriláteros, basada en el modelo van Hiele, con la ayuda del software, incrementó los grados de adquisición en torno del objeto matemático cuadriláteros. El uso de *GeoGebra* facilita la comprensión de los cuadriláteros al poder manipular las figuras e interactuar con los objetos.

Por otra parte, Cáceres (2017) analizó el proceso de aprendizaje de las traslaciones en el plano, tomó el modelo de van Hiele y lo integró al software *GeoGebra*. Estableció que el modelo facilitó el aprendizaje; al evaluar permanentemente, permitió que los estudiantes realizaran el paso por la fase de integración de manera práctica y agradable, y que se fomentara el trabajo en equipo. En el trabajo de Cáceres (2017), se resaltó como los estudiantes reestructuraron la información al partir de conocimientos previo. Se tomó información de primera mano y se apoyaron luego en *GeoGebra*, por lo que se mostraron motivados para explorar, plantear y probar conjeturas -todo lo contrario, al uso del lápiz y el papel-. Con el uso

del software los estudiantes ganaron autonomía, lo que les permitió aclarar dudas y se salieron de la rutina de clases magistrales.

A pesar de la utilidad que ofrece *GeoGebra*, se resalta la importancia de que el profesor mejore su práctica en la incorporación de las TIC al proceso de enseñanza, ya que él es el llamado a generar un cambio en el uso de la tecnología, y a enriquecer la labor pedagógica.

Se concluye que el uso del software *GeoGebra* y los niveles de van Hiele ayudan a visualizar, verificar y desarrollar la comprensión de conceptos en el proceso de aprendizaje en el campo geométrico, ya que los estudiantes se basan en sus descubrimientos y se motivan a indagar y a formar un aprendizaje a partir de la comprensión de elementos visuales para desarrollar el pensamiento abstracto propio del modelo van Hiele. Al articular el modelo van Hiele con el software en mención, los estudiantes integran el conocimiento y pueden completar las fases del aprendizaje requeridas para subir de nivel de razonamiento. Se resalta que, en la fase de integración, se motiva la participación de los estudiantes y la colaboración frente a las dificultades, de manera que el trabajo individual y el trabajo en equipo genera confianza entre los ellos.

2.1.4 Bases legales

Según el Congreso de la República (1991) la Constitución Política de 1991 determinó que el Estado colombiano debía comprometerse con la implementación de nuevas tecnologías en la educación, desde los primeros años del ciclo formativo. Entre las disposiciones estuvo estipular que las nuevas tecnologías son herramientas esenciales para la generación y la implementación de procesos de inclusión social, para ayudar a reducir la desigualdad económica, sobre todo en los territorios más apartados del país. Esta disposición primaria para la educación en el país ha derivado en otras

disposiciones y pronunciamientos legislativos sobre el uso de Tecnologías de la Información y la Comunicación en campo educativo.

Entre estos cabe destacar la Ley 115 de (1994), o Ley General de Educación, que rige a todas las instituciones de educación básica en Colombia, la cual ha tenido muy en cuenta que la tecnología debe introducirse en los todos procesos educativos en las escuelas y colegios del país. Asimismo, esta ley estipuló que la asignatura de Informática y Tecnología debía hacer parte de los planes de estudio de los colegios públicos colombianos, tanto en primaria como en básica secundaria. Otra disposición a tener en cuenta para este trabajo de grado es la Ley 1341 de (2009), la cual determinó que el gobierno nacional y los entes gubernamentales departamentales y municipales deben poseer estructuras administrativas centradas en la educación y que estas deben tener en cuenta la importancia de las TIC para la generación de políticas públicas de acceso a las tecnologías por parte de los estudiantes de escuelas y colegios públicos y la vigilancia de los mismos procesos en los colegios privados.

De igual manera, la Ley 1341 argumenta, pues, que las nuevas tecnologías son indispensables para el fortalecimiento y la consolidación de los procesos de innovación y de la competitividad en Colombia y que estas deben incluirse en los procesos de enseñanza y aprendizaje escolares como política estatal. Así, por ejemplo, el artículo 2 de esta ley afirma que: El estado y en general todos los agentes del sector de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones deberán colaborar, dentro del marco de sus obligaciones, para priorizar el acceso y uso a las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones en la producción de bienes y servicios, en condiciones no discriminatorias en la conectividad, la educación los contenidos y la competitividad (p.1).

De otro lado, dentro de los programas gubernamentales implementados para acatar los pronunciamientos legislativos sobre educación y TIC cabe resaltar el Plan Nacional de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones del Ministerio de

Comunicaciones (PlanTIC, 2008) el cual determina las políticas del gobierno colombiano en cuanto al uso de TIC en diversos espacios y territorios del país. Este Plan posee varias directrices y objetivos específicos, entre los cuales destaca evaluar y hacer seguimiento "a la infraestructura para conectar a los estudiantes de los colegios, con el fin de alcanzar la meta del decenio de cinco estudiantes y alumnas por computador" (p. 6).

Por lo cual, este proyecto aclara que las instituciones educativas de todo el país son autónomas en cuanto a la utilización de herramientas digitales y de estrategias pedagógicas para la inserción de las TIC dentro de las aulas de clase, razón por la que las instituciones públicas tienen únicamente la labor de dotar a los establecimientos educativos de los equipos necesarios para llevar a cabo proyectos de TIC y educación y de capacitar a los profesores en el manejo de herramientas digitales.

Para ello, el Plan Nacional de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones ha determinado la creación de incentivos para profesores que evidencien competencias en aplicación, manejo y evaluación de TIC en el aula de clase, en la medida en que el MEN se compromete a hacer énfasis en el proceso educativo que se hace en las normales y demás centros educativos donde se forman los profesores, a la enseñanza de metodologías y a la creación de competencias para el uso e integración de las TIC en los procesos educativos que estarán bajo su responsabilidad.

Junto al Plan Nacional de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones, es necesario destacar el Plan Nacional Decenal de Educación (2016), el cual es la formalización de una política pública, cuyo objetivo principal es generar e impulsar los fundamentos para la formulación de propuestas a nivel nacional y regional para el mejoramiento de la educación en Colombia en un periodo de diez años. Este plan ha propuesto estrategias gubernamentales para fortalecer la política educativa estatal y se sustenta, entre otras cosas, en la implementación y la utilización de nuevas tecnologías en los establecimientos educativos públicos de básica primaria y secundaria, así como

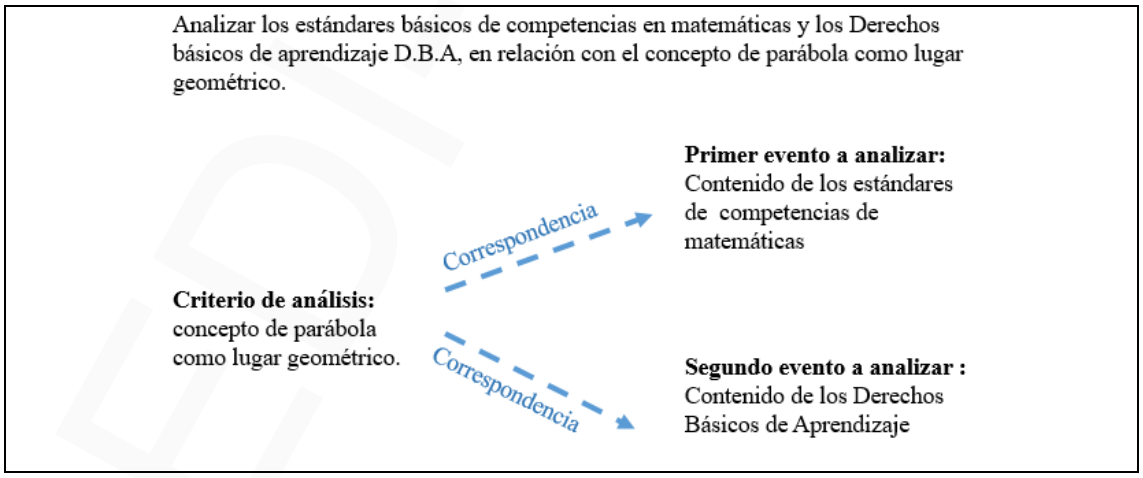
en las aulas de clase mismas, en cuanto su principio fundamental es la generación y la consolidación de procesos de innovación y de competitividad educativa en el país, con el fin de optimizar la calidad de la educación en el país.

2.2 Definición conceptual y operacional de las variables

En este capítulo se explican, describen y definen los eventos de estudio trabajados en la presente investigación, cada evento obedece a un cierto objetivo específico.

2.2.1 Eventos de estudio del primer objetivo específico

Para efectos de la investigación el primer objetivo específico, está enfocado en analizar dos documentos necesarios y fundamentales para la educación matemática en Colombia, los EBCM y los DBA, estos documentos fueron analizados para la educación básica y media, es decir para grados de sexto a undécimo, en relación con el concepto de parábola como lugar geométrico. En la Figura 13 se muestra la configuración de estos eventos.



Fuente: Elaboración propia

Figura 13. Clasificación de los eventos de estudio para el primer objetivo específico de la investigación

A continuación, se define cada uno de los eventos de estudio de ese primer objetivo.

a. **Criterio de análisis: Concepto de parábola como lugar geométrico.** Se entiende como parábola al lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia, de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta.

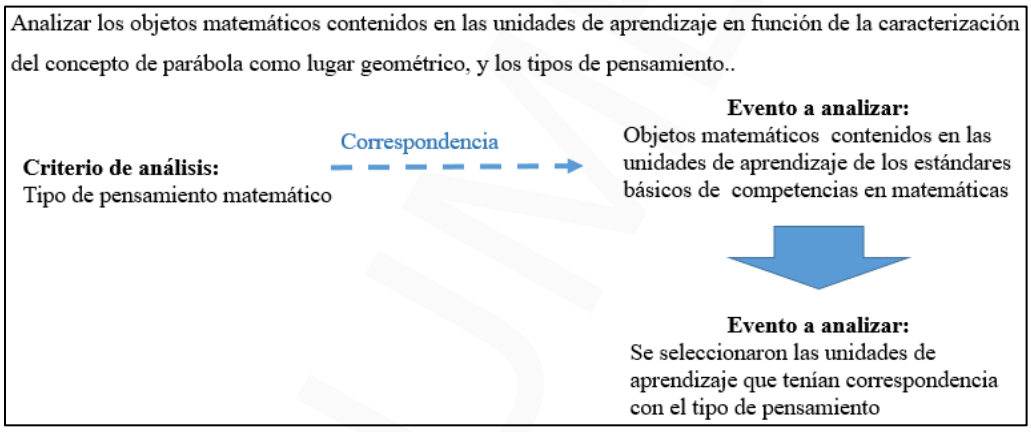
b. **Primer evento a analizar: Contenido de los EBCM.** En Colombia, estos son orientaciones formuladas por el MEN, los cuales conforman una de las principales orientaciones pedagógicas para conducir a todo estudiante en el *saber* y *saber hacer* para lograr el nivel de calidad esperado a su paso por el sistema educativo.

c. **Segundo evento a analizar: los DBA.** Para el área de Matemáticas, estos se organizan en coherencia con los Lineamientos Curriculares y los EBCM. Plantean elementos para construir rutas de enseñanza que promueven la consecución de aprendizajes grado a grado, para que los estudiantes alcancen los EBCM propuestos para cada grado. En este sentido, los DBA son un apoyo para los profesores en su labor por lograr el desarrollo de propuestas curriculares que pueden ser articuladas con los enfoques, metodologías, estrategias y contextos definidos en los establecimientos educativos, en el marco de los Proyectos Educativos Institucionales cristalizados, y más específicamente, en los planes de área, de aula y de asignatura.

REPOSITORIO

2.2.2 Eventos de estudio del segundo objetivo específico

El segundo objetivo específico de la investigación permite al investigador analizar los objetos matemáticos contenidos en las unidades de aprendizaje de los EBCM, en función de la caracterización de los diferentes tipos de pensamiento matemático. El criterio de análisis es el tipo de pensamiento. En la Figura 14 se muestra la configuración de estos eventos.



Fuente: Elaboración propia

Figura 14. Configuración de los eventos de estudio para el segundo objetivo específico de la investigación

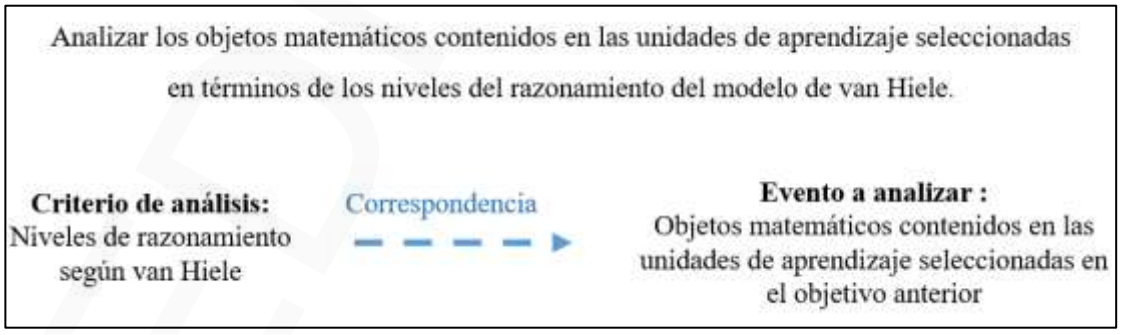
A continuación, se especifican cada uno de los eventos de estudio propuestos para este segundo objetivo.

a. Criterio de análisis: Los tipos de pensamiento matemático. Según el MEN, en el desarrollo de los procesos matemáticos ordinarios, el estudiante transita por distintos niveles de pensamiento. Estos se concretan en el pensamiento lógico y el pensamiento matemático, el cual se subdivide en los cinco tipos de pensamiento propuestos en los Lineamientos Curriculares (MEN, 9998): el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional.

b. Evento a analizar: Objetos matemáticos. Un objeto matemático es, o representa, una cualidad o una acción que tiene la función de organizar o interpretar un contexto. Así pues, los objetos matemáticos son una función organizativa o interpretativa del contexto. El evento a analizar abarca los objetos matemáticos contenidos en las unidades de aprendizaje de los EBCM, específicamente se analizan aquellas unidades que tienen relación con la construcción de la parábola como lugar geométrico o con el concepto de parábola como lugar geométrico.

2.2.3 Eventos de estudio del tercer objetivo específico

El tercer objetivo específico establece analizar los objetos matemáticos contenidos en las unidades de aprendizaje seleccionadas de los EBCM en términos de los cuatro primeros niveles del razonamiento del modelo de van Hiele. Específicamente el evento a analizar son los objetos matemáticos**,** que tienen alguna relación con el concepto de parábola o con la construcción de la misma como lugar geométrico y el criterio de análisis son los cuatro primeros niveles de razonamiento según el modelo de van Hiele; Predescriptivo, Reconocimiento Visual, Análisis, y Clasificación. En la Figura 15 se muestra la configuración de estos eventos.



Fuente: Elaboración propia

Figura 15. Configuración de los eventos de estudio para el tercer objetivo específico de la investigación

A continuación, se describen cada uno de los eventos de estudio analizados para este tercer objetivo.

a. **Evento a analizar: Objetos matemáticos.** Los objetos matematicos que constituyen el evento a analizar se definieron anteriormente.

b. **Criterio de análisis: Niveles de razonamiento según van Hiele.** Son una estratificación del razonamiento de cualquier estudiante en niveles jerarquizados, a través de los cuales avanza la capacidad de razonamiento matemático de los estudiantes desde que inician su etapa escolar hasta que llegan a su máximo grado de desarrollo intelectual en el campo de las matemáticas. A continuación, se define cada nivel:

- Predescriptivo: En este nivel, el estudiante sólo reconoce los objetos geométricos básicos, pero no construye ni relaciona dichos objetos, ni sus propiedades.

- Reconocimiento visual: En este nivel, el estudiante construye y visualiza, en un ambiente de GeoGebra, puntos, rectas, rectas paralelas, rectas perpendiculares, entre otros.

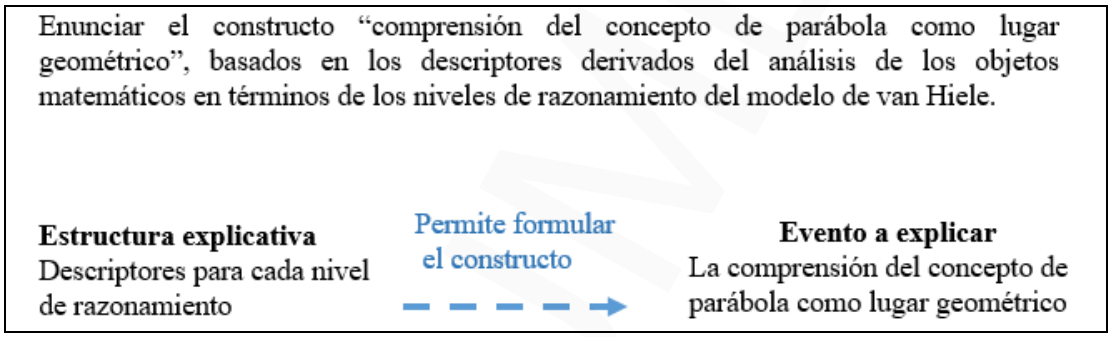
- Análisis: En este nivel, el estudiante determina algunos puntos que satisfacen condiciones de lugar geométrico, como la mediatriz y la circunferencia, y con base en estos, determina puntos que satisfacen la condición de estar a la misma distancia de un punto fijo llamado F y de una recta fija llamada D.

- Clasificación: En este nivel, el estudiante determina la condición que debe cumplir un conjunto de puntos para pertenecer a la parábola, además, es capaz de llegar a una definición de la misma como lugar geométrico.

PREPRINT

2.2.4 Eventos de estudio del cuarto objetivo específico

En cuanto al cuarto objetivo específico, este pretendía formular el constructo "comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico", con base en los descriptores derivados del análisis de los objetos matemáticos en términos de los niveles de razonamiento del modelo van Hiele. La configuración de los eventos de este objetivo se muestra en la Figura 16.



Fuente: Elaboración propia

Figura 16. Configuración de los eventos de estudio para el cuarto objetivo específico de la investigación

A continuación, se formulan cada uno de los eventos de estudio contemplados para el cuarto objetivo.

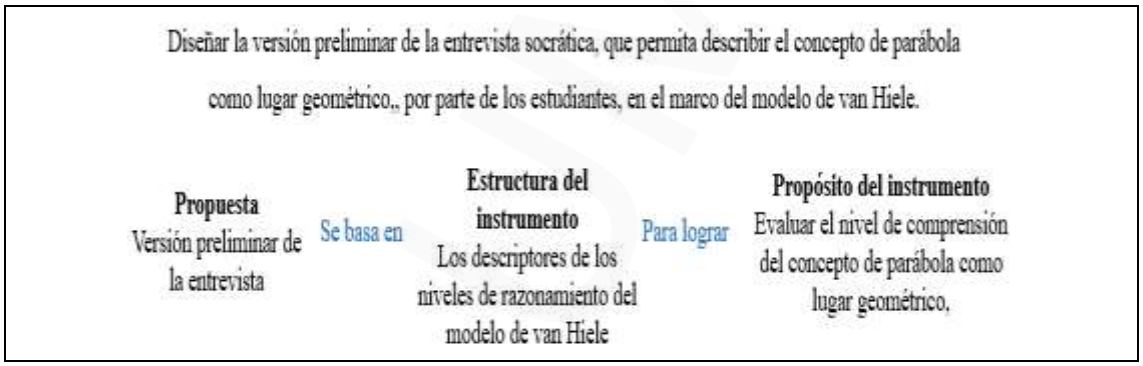
a. **Estructura explicativa**: **Descriptores derivados de la teoría de van Hiele.** De acuerdo con Santa (2011), un descriptor de nivel permite caracterizar de manera adecuada cada uno de los niveles de razonamiento sobre la comprensión del concepto matemático que se esté investigando, en este caso el concepto de parábola como lugar geométrico, además es importante que los descriptores cumplan con las características o propiedades propias de cada uno de los niveles de razonamiento.

b. Evento a explicar: Para efectos de esta investigación, se define el constructo **Comprensión el concepto de parábola como lugar geométrico** como el

conjunto de procesos cognitivos que permiten captar el significado de la parábola como lugar geométrico y establecer relaciones con otros conceptos matemáticos, de manera que es posible hacer inferencias y deducciones.

2.2.5 Eventos de estudio del quinto objetivo específico

El quinto objetivo específico se refiere a diseñar una versión preliminar de la entrevista socrática, para describir la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, por parte de los estudiantes, en el marco del modelo de van Hiele. Se presenta a continuación la configuración de eventos de este objetivo, en la Figura 17.



Fuente: Elaboración propia

Figura 17. Configuración de los eventos de estudio para el quinto objetivo específico de la investigación

Se especifica a continuación, cada uno de los eventos de estudio analizados para el quinto objetivo.

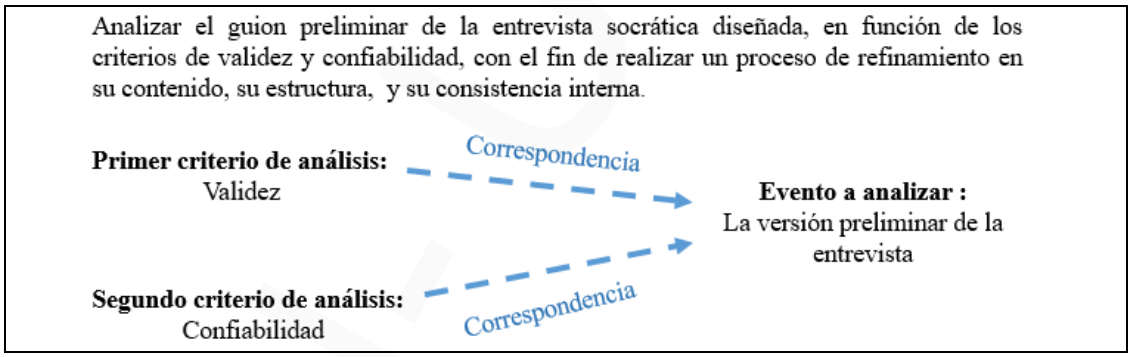
a. **Estructura del instrumento: Descriptores de nivel de razonamiento.** En la sección relacionada con la configuración del cuarto objetivo fueron definidos los descriptores para cada nivel de razonamiento en el marco de modelo de van Hiele.

b. **Finalidad del instrumento: Evaluación del nivel de razonamiento del concepto de parábola como lugar geométrico.** Para efectos de la investigación

se entenderá como el proceso sistemático y metódico, mediante el cual se recopila información cuantitativa o cualitativa a través de medios formales, sobre el conjunto de procesos cognitivos que permiten captar el significado del concepto de parábola como lugar geométrico y establecer relaciones con otros conceptos matemáticos, de manera que es posible hacer inferencias.

2.3.6 Eventos de estudio del sexto objetivo específico

Para el objetivo específico número seis, cuya finalidad se refiere al análisis de la entrevista de carácter socrático, en función de los criterios de validez y confiabilidad necesarios para un instrumento, el evento de análisis es el contenido de la versión preliminar de la entrevista socrática diseñada. Los criterios de análisis son, la validez y la confiabilidad. En la Figura 18 se muestra el esquema de estos eventos.



Fuente: Elaboración propia

Figura 18. Configuración de los eventos de estudio para el sexto objetivo específico de la investigación

Se especifica a continuación, cada uno de los eventos de estudio analizados para este sexto objetivo específico.

a. **Primer criterio de análisis: Validez.** Determinar la validez de un instrumento es mirar si cada uno de las preguntas está en correspondencia con sus sinergias y por lo tanto indica si el instrumento mide el constructo teórico que se pretende medir y que se puede utilizar para el fin con el cual fue construido. En esta

investigación, la entrevista socrática dinámica es válida si mide la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico.

b. **Segundo criterio de análisis: Confiabilidad.** Analizar la confiabilidad del instrumento es describir el grado en que la aplicación repetida de cada una de las preguntas produce resultados similares, consistentes y coherentes, es decir determina la precisión con que un instrumento mide lo que se pretende medir.

c. **Evento a analizar: La versión preliminar de la entrevista socrática.** Este evento hace referencia a todas las preguntas que constituyen la entrevista socrática dinámica; estas evalúan cada uno de los niveles de razonamiento del modelo de van Hiele acerca del concepto de parábola como lugar geométrico.

2.3.7 Eventos de estudio del séptimo objetivo específico

Por último, con el séptimo objetivo específico se pretende establecer el guion definitivo de la entrevista socrática dinámica, de manera que ésta permita evaluar, de forma válida y confiable, el nivel en el cual se encuentra razonando un estudiante, en relación con el concepto de parábola como lugar geométrico, en el marco del modelo de van Hiele. Se presenta a continuación la configuración de eventos de este objetivo, en la Figura 19.

Configurar el guion definitivo, que permita detectar el nivel de razonamiento en que se encuentra un estudiante, sobre el concepto de parábola como lugar geométrico, en el marco del modelo de van Hiele

Propuesta		**Estructura del instrumento**		**Propósito del instrumento**
Guion definitivo de entrevista socrática dinámica	Basado en	Descriptores finales que permitan describir el nivel de comprensión en el marco del modelo de van Hiele	busca	Detectar el nivel de comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico con validez y confiabilidad.

Fuente: Elaboración propia basado en los Estándares de competencia (2006) y los DBA

Figura 19. Configuración de los eventos de estudio para el séptimo objetivo específico de la investigación

De este objetivo emerge la propuesta, la cual se perfecciona con los resultados de los objetivos anteriores, particularmente del séptimo objetivo específico, (análisis de la entrevista de carácter socrático, en función de los criterios de validez y confiabilidad). Como ya se tenían definidos anteriormente los eventos, no se repitieran en este apartado.

a. **Estructura del instrumento.** La conformación del instrumento se fundamenta en los descriptores definitivos, los cuales pasaron por un proceso de revisión y refinamiento para cumplir con las características del modelo de van Hiele y enmarcados en los niveles de razonamiento. El evento ya se definió en los eventos del quinto objetivo.

b. **Propósito del instrumento.** El fin del instrumento es determinar del nivel de razonamiento del concepto de parábola como lugar geométrico, que poseen los estudiantes a quienes se les aplicará el instrumento. Este evento ya fue definido en los eventos del quinto objetivo.

2.3. Operacionalización de las variables

A partir de las definiciones anteriores de los eventos de estudio, se construyeron las tablas de operacionalización correspondientes a cada uno de los eventos de estudio que se definieron para cada objetivo específico. Los eventos trabajados en la presente investigación fueron: Concepto de parábola y Comprensión del concepto de parábola, Contenido de los EBCM y de los DBA, Niveles de razonamiento y sus respectivos descriptores, Evaluación del nivel de razonamiento del concepto de parábola, Validez y confiabilidad del instrumento y Contenido de la entrevista inicial.

A continuación, la siguiente Tabla 1 resume la operacionalización de las variables, el instrumento que se utilizó y se aclara si se evento se operacionalizó o no.

PREPRINT

Tabla 1. Eventos a operacionalizar

Evento	Instrumento a elaborar	Requiere operacionalización
Concepto de parábola	Matriz de análisis de los aspectos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico (Anexo A).	Tabla No 2
Contenido de los estándares de matemáticas	Este evento ya se describió en el documento *EBCM*, 2006, emitido por el MEN Colombia, por lo tanto, no requiere instrumento	No requiere operacionalización
Contenido de los DBA	Este evento ya se describió en el documento DBA 2016, emitido por el MEN Colombia, por lo tanto, no requiere instrumento	No requiere operacionalización
Tipo de pensamiento	Matriz de análisis tipo de pensamiento (geométrico, numérico, variacional y métrico) (Anexo B).	Tabla No 3
Objetos matemáticos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico	Matriz de análisis de los aspectos referidos a los objetos matemáticos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico (Anexo C).	Tabla No 4
Niveles de razonamiento	Matriz de análisis de los niveles de razonamiento según el modelo de van Hiele (Anexo D).	Tabla No 5
Descriptores de los niveles de razonamiento	Para este evento no se aplicó ningún instrumento, por lo tanto, no se operacionalizó. Los descriptores se infirieron de las relaciones entre los contenidos de los estándares y los DBA, las unidades de aprendizaje contempladas en ellos, y éstas clasificadas de acuerdo a los objetos matemáticos en relación con el infinito actual, el tipo de pensamiento y los niveles de razonamiento de acuerdo al modelo de van Hiele	No requiere operacionalización
Comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico	Matriz de análisis de los aspectos referidos la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico (Anexo E)	Tabla 6
Criterios de validez y confiabilidad del instrumento	Para este evento se operacionalizó el procedimiento de validación. (Anexo G).	Tabla 7
Contenido de la entrevista inicial	Para este evento de estudio no se aplicó ningún instrumento, por lo tanto, no se operacionalizó. Este fue el evento a analizar del objetivo 6. Las preguntas se infirieron de las relaciones entre los contenidos de los estándares y los DBA, y las unidades de aprendizaje contenidas en ellos, y clasificadas según los objetos matemáticos en relación con concepto de parábola como lugar geométrico, el tipo de pensamiento y los descriptores de nivel del modelo de van Hiele. El contenido ya se había elaborado	No requiere operacionalización Referido a la versión inicial a la entrevista. (Anexo F).

Fuente: Elaboración propia basado en los Estándares, los DBA y modelo de van Hiele

A continuación, en la Tabla 2, se muestra la operacionalización del evento de estudio Aspectos relacionados con el concepto de parábola.

Tabla 2. Operacionalización del evento concepto de parábola como lugar geométrico

Evento	Sinergias	Indicios	preguntas	Instrumento	Fuente
Concepto de parábola como lugar geométrico: Se entiende como el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia, de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta.	**Concepto de recta real:** línea continuada que se extiende en una misma dirección	Definición de recta	1	Matriz de análisis del concepto de parábola como lugar geométrico (Anexo A)	Estándares y los DBA
		Características de la recta	2		
		Elementos de la recta	3		
		Representación de la recta	4		
		Clasificación de las rectas	5		
		Representación geométrica de la recta	6		
		Distinción entre segmento y recta	7		
		Ubicación de puntos en la recta	8		
	Concepto de secciones cónicas: todas las curvas resultantes de las diferentes intersecciones entre un cono y un plano	Definición de cónica	9		
		Propiedades de las secciones cónicas	10		
		Clasificación de las secciones cónicas	11		
	Concepto de Coordenadas polares y cartesianas: Es un concepto que se utiliza en la geometría y que permite nombrar a las líneas que se emplean para establecer la posición de un punto y de los planos o ejes vinculados a ellas.	Definición de coordenadas cartesianas	12		
		Representación en coordenadas cartesianas	13		
		Representación en coordenadas polares	14		
			15		
		Transformar coordenadas polares a cartesianas.			
	Concepto de función: Relación establecida entre un conjunto de salida y otro de llegada, estableciendo un cambio en la variable independiente con el cambio correspondiente en la variable dependiente, esto permite identificar la cantidad de elementos del dominio	Concepto de función	16		
		Clasificación de las funciones	17		
		Operaciones entre funciones	18		
		Representación gráfica de las funciones	19		
			20		
		Familia de funciones			

Fuente: Elaboración propia basada en los EBCM y los DBA

REPOSITORIO

A continuación, en la Tabla 3 se muestra la operacionalización del evento de estudio tipo de pensamiento.

Tabla 3. Operacionalización del evento tipo de pensamiento

Evento	Sinergias	Indicios	preguntas	Instrumento	Fuente
Aspectos referidos a los tipos de pensamiento: Según MEN (2008) los tipos de pensamiento son los procesos cognitivos que permiten solucionar situaciones problema, en este caso, en el área de matemáticas. Estos cinco tipos de pensamiento son: el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional.	**Aspectos asociados al pensamiento geométrico:** Este pensamiento permite describir las propiedades y las características del espacio y los objetos que en él se encuentran.	Características de los elementos que componen un lugar geométrico.	1	Matriz de análisis de tipo de pensamiento (geométrico, variacional, numérico y métrico. Anexo B)	EBCM
		Características de los triángulos	2		
		Características y diferencias entre segmento de recta y recta	3		
		Representación de puntos en el plano.	4		
	Aspectos asociados al pensamiento variacional: Entendido como una forma dinámica de pensar que permite producir mentalmente sistemas que relacionan y modelan la realidad con variables semejantes	Elementos básicos que componen la mediatriz.	5		
		Elementos básicos que componen un lugar geométrico.	6		
		Descripción de la representación gráfica de un lugar geométrico	7		
		Variación de un punto con respecto a una recta.	8		
	Aspectos asociados al pensamiento numérico: Este tipo de pensamiento, permite comprender el uso o el significado de los números, la numeración, noción de conteo, del concepto de número y las relaciones aritméticas de los sistemas numéricos.	Representación aritmética de la recta	9		
			10		
		Operaciones básicas con números reales			
	Aspectos asociados al pensamiento métrico: está relacionado con la medida de las cantidades de magnitud, su estimación y aproximación, al igual que con la capacidad de usar instrumentos de medida. Al poner el énfasis en los procesos de medición	Determina la medida de un segmento de recta	11		
		Representación de segmentos de igual mediada.	12		

Fuente: Elaboración propia basada en los EBCM y los DBA.

A continuación, en la Tabla 4 se muestra la operacionalización del evento de estudio objeto matemático asociados al concepto de parábola como lugar geométrico.

Tabla 4. Operacionalización del evento objetos matemáticos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico

Evento	Sinergias	Indicios	preguntas	Instrumento	Fuente
Objetos matemáticos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico: Se entiende como el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia, de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta.	**Elementos geométricos no definidos**: Son aquellos elementos que geométricamente tienen tres componentes fundamentales no definidos: punto, recta y plano.	El punto como concepto no definida.	1	Matriz de análisis de los aspectos referidos a los objetos matemáticos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico (Anexo C)	EBCM
		La recta como concepto no definida	2		
		El plano como concepto no definida	3		
	Distancia entre distintos elementos del plano: Se define la distancia entre dos cuerpos geométricos como la menor distancia de cualquier punto de uno de los cuerpos a cualquier otro punto del otro.	Distancia entre dos puntos	4		
		Representación gráfica de la distancia entre dos puntos.	5		
		Distancia entre todos los puntos de una circunferencia y su centro.	6		
		Propiedades de la mediatriz como lugar geométrico.	7		
	Congruencia de triángulos: La congruencia de triángulos hace referencia a la medida al comparar los lados y los ángulos de dos triángulos.	Medida de los lados de un triángulo	8		
		Líneas notables del triángulo.	9		
		Descripción de la congruencia de dos triángulos	10		
		Criterios de congruencia entre triángulos	11		
	Representación gráfica de un lugar geométrico: Se define un lugar geométrico como el conjunto de puntos que satisfacen determinadas condiciones o propiedades geométricas.	Representación gráfica de la circunferencia como lugar geométrico	12		
		Representación gráfica de la mediatriz como lugar geométrico	13		
		Propiedades de los lugares geométricos.			

Fuente: Elaboración propia basada en los EBCM y los DBA.

PREPRINT

A continuación, la Tabla 5 muestra la operacionalización del evento Niveles de razonamiento según van Hiele.

Tabla 5. Operacionalización para el evento Niveles de razonamiento según van Hiele.

Evento	Sinergias	Indicios	preguntas	Instrumento	Fuente
Niveles de razonamiento según van Hiele. Según Jaime y Gutiérrez, (1990) los niveles de razonamiento es la capacidad de razonamiento matemático de los individuos desde que inician su aprendizaje hasta que llegan a su máximo grado de desarrollo intelectual en este campo.	**Nivel-0 Predescriptivo** Es el conjunto de saberes previos que necesita el estudiante para llegar a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico	Percibe un punto como un concepto no definido.	1	Matriz de análisis de los niveles de razonamiento según el modelo de van Hiele. (Anexo D)	Modelo de razonamiento según van Hiele.
		Percibe una recta como un concepto no definida.	2		
		Percibe un plano como una concepto no definida.	3		
	Nivel -I Reconocimiento visual En este nivel el estudiante construye y visualiza, en un ambiente de GeoGebra, puntos, rectas, rectas paralelas, rectas perpendiculares, entre otras.	Representa puntos en el plano cartesiano.	4		
		Identifica cuando dos rectas son paralelas	5		
		Identifica cuando dos rectas son perpendiculares	6		
	Nivel -II Análisis En este nivel, el estudiante determina algunos puntos que satisfacen condiciones de lugar geométrico como la mediatriz y la circunferencia, y con base en estos, determina puntos que satisfacen la condición de estar a la misma distancia de un punto fijo llamado F y de una recta fija llamada D.	Percibe la representación gráfica de la circunferencia como un lugar geométrico	7		
		Percibe la representación gráfica de la mediatriz como un lugar geométrico.	8		
	Nivel -III Clasificación En este nivel, el estudiante determina la condición que debe cumplir un conjunto de puntos para pertenecer a la parábola, además, es capaz de llegar a una definición de la misma como lugar geométrico	Establece la condición de un punto para pertenecer a la parábola como lugar geométrico.	9		

Fuente: Elaboración propia basado en los Niveles de razonamiento según el modelo de van Hiele

Para el evento descriptores de cada nivel de razonamiento, no se aplicó ningún instrumento, por lo tanto, no se hizo operacionalización. A continuación, en la Tabla 6 muestra la operacionalización del evento de estudio comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico.

Tabla 6. Operacionalización del evento comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico

Evento	Sinergias	Indicios	preguntas	Instrumento	Fuente
Objetos matemáticos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico: la parábola es el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta L llamada directriz.	**Construcción de Polígonos regulares:** se define un polígono regular como un polígono cuyos lados y ángulos interiores son iguales entre sí.	Determina las condiciones en las que dos lados de un polígono son paralelos o perpendiculares	1	Matriz de análisis de objetos matemáticos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico (Anexo C)	EBCM
		Halla la distancia entre cada uno de los puntos de un polígono.	2		
		Encuentra el conjunto de puntos que están a la misma distancia de dos puntos fijos.	3		
		Ubica algunos puntos que satisfacen ciertas propiedades.	4		
	Función cuadrática representación gráfica: es la representación gráfica de una función cuadrática llamada parábola	Describe la parábola como un conjunto infinito de puntos que cumplen una condición especifica.	5		
		Propiedades de la parábola	6		
	Trayectorias y desplazamientos: Es el camino que se forma al unir todas las sucesivas posiciones de un objeto, mientras el desplazamiento es la distancia que existe entre la posición inicial y la posición final de un cuerpo.	Representación gráfica en el plano de diversos desplazamientos.	7		
		Análisis de las propiedades de la parábola.	8		
	Posiciones de una recta y una circunferencia: Posiciones relativas de una circunferencia y una recta dependen de la magnitud del radio y de la distancia del centro a la recta.	Ubica algunos puntos que satisfacen la propiedad de ser lugares geométricos.	9		

Fuente: Elaboración propia basada en los EBCM y los DBA

A continuación, en la Tabla 7, se muestra la operacionalización del evento de evaluación del nivel de razonamiento del concepto de parábola.

Tabla 7. Operacionalización de la validez y confiabilidad del instrumento

Evento	Sinergias	Indicios	preguntas	Instrumento	Fuente
Validez del instrumento: Es el atributo que permite que un instrumento arroje información certera y precisa acerca del evento de estudio que pretende medir	**Validez de constructo:** Implica que el instrumento mide el evento o atributo que se pretende estudiar con base en su definición conceptual	La definición del evento incluye todo lo que es parte del evento La definición del evento es clara La definición del evento no contiene el término definido La definición excluye todo lo que no forma parte del evento Las sinergias corresponden a la definición Las sinergias están completas Las sinergias están definidas Los indicios corresponden a cada sinergia Los indicios son específicos Las preguntas del instrumento se corresponden con los indicios	Los aspectos que están contenidos en las instrucciones del kit de validación de expertos (Anexo G) Área del kit donde el experto clasifica las preguntas por dimensión (Anexo G)	Kit de validación de constructo para los expertos (Anexo G)	Entrevista socrática inicial
	Validez de contenido: determina en qué grado una pregunta representa a cada elemento del constructo.	Las áreas del evento de estudio están definidas El área está completa. Hay preguntas para todas las áreas No hay preguntas fuera de las áreas	Los aspectos están contenidos en las instrucciones del kit Área del kit donde el experto clasifica las preguntas por áreas (Anexo G)	Kit de validación de contenido para los expertos	
	Confiabilidad: tiene que ver con la exactitud y precisión del instrumento de medición	las preguntas correlacionan alto entre sí las preguntas correlacionan alto con el puntaje total del instrumento Las preguntas de una sinergia correlacionan más entre ellos que con los de otra sinergia	Las preguntas se visualizan en las tablas N° (27,29,31,33 pág. 229) de correlaciones pregunta total.	Aplicación del Alfa de Cronbach	

Fuente: Elaboración propia basada en los EBCM, los DBA y el modelo de van Hiele

CAPÍTULO III.
DISEÑO METODOLÓGICO

RED-UNEOT

3.1. Paradigma, método y enfoque de investigación

En este capítulo se presenta el proceso metodológico empleado para la recolección, estudio y posterior análisis de toda la información que se utilizó para desarrollar esta investigación. El orden que se seguirá es: enfoque, método, tipo de investigación, diseño, técnicas, e instrumentos de recolección de información; población y muestra, procedimiento de investigación, validez y confiabilidad de los instrumentos para, finalmente, llegar a las consideraciones éticas.

3.1.1 Enfoque

En una investigación, el enfoque más pertinente es aquel cuyas características se ajustan adecuadamente a los intereses y exigencias específicas de la investigación; es decir, la eficacia del enfoque estará determinada por la forma en que sus particularidades específicas sirvan para crear una estrategia teórico-metodológica idónea que le permita al investigador dar respuesta a la pregunta o problema de investigación.

Para el desarrollo de la presente investigación no se trabajó con un enfoque en particular sino desde una integración de los mismos, como lo plantea Hurtado (2012) mediante la comprensión holística de la ciencia, por cuanto los diferentes paradigmas epistémicos y los métodos que de ellos se derivan, son complementarios y favorecen la consecución de investigaciones coherentes y bien fundamentadas. Se debe hacer énfasis en que, mediante la comprensión holística, el profesor investigador puede encontrar una ruta de trabajo para estructurar su investigación y disponer de los conocimientos que le van a permitir integrar, comprender y obtener una experiencia que le permite, percibir la realidad, y así plantearse el nuevo conocimiento como un modelo.

PREPRINT

De acuerdo con Hurtado (2008) la palabra “holística” hace referencia a una actitud del investigador hacia el proceso de generación del conocimiento, es decir, una manera de ver el proceso investigativo que permite percibir en él lo que, a lo largo de los años, los diferentes modelos epistémicos han aportado.

Para Hurtado (2012) la comprensión holística de la investigación abre una ventana novedosa que invita y promueve a dar aportes propios y ayuda al investigador para que logre comprender las diferentes fases y estadios por los cuales deben pasar los procesos creativos en el plano de la investigación, además, la comprensión holística de la investigación favorece una mayor trascendencia de lo científico a otras áreas de lo humano y lo social. Así mismo, queda superada la división tradicional entre ciencia formal y ciencia empírica. Esta característica de la comprensión holística de la investigación también promueve que profesores de cualquier nivel educativo y de cualquier disciplina puedan incorporar procesos investigativos a las actividades didácticas desarrolladas en el aula de clase.

De acuerdo a lo anterior, se puede afirmar que la comprensión holística de la investigación se centra en los objetivos como logros sucesivos de un proceso permanente más que como un resultado final. Cada evento debe manifestar y contener las dimensiones de la totalidad que lo comprende.

Hurtado (2012) establece que la investigación holística surge como una necesidad para crear criterios que le van a permitir al investigador una metodología más completa y efectiva. La investigación holística presenta una propuesta de investigación como un proceso global, evolutivo integrador, concatenado y organizado, otra característica importante es la de ocuparse de crear nuevas teorías y modelos, la indagación acerca del futuro, la invención, la aplicación práctica de soluciones y la evaluación de proyectos, programas y acciones sociales entre otras. Todo lo anterior se encuentra basado en el pensamiento holístico, entre los que destacan:

- El principio de la unidad del todo. Principio de continuidad. La investigación es un proceso continuo. El carácter de unidad incluye lo secuencial y simultáneo de los procesos. En la selección del tema el investigador crea un límite o frontera para aproximarse al conocimiento.

- El principio de simultaneidad y sincronicidad. Existe una forma de conexión entre fenómenos o situaciones de la realidad que se enlazan de manera causal y no lineal.

- El principio de integralidad. El universo es una unidad, una complejidad y no una uniformidad. El humano es ser holístico por naturaleza, siendo la holopraxis el conjunto de prácticas que permiten asumir una comprensión holística de la realidad.

- El principio de posibilidades abiertas. Se tienen en cuenta el carácter creativo, amplio y no determinista del proceso investigativo, la diversidad metodológica del proceso investigativo, los abordajes cosmológicos y caológicos.

- El principio holográfico, el evento contiene al todo. Plantea cada aspecto de un evento y expresa la totalidad del mismo.

- El principio de complementariedad y de los sintagmas. Plantea que el universo no se puede describir con una figura clara y única, sino que se aprende mediante visiones superpuestas. Este es el principio que permite comprender que los paradigmas se pueden integrar en sintagmas (Hurtado, 2012).

La comprensión holística de la investigación proporciona aportes desde lo metodológico, pedagógico, social y humano. Se organiza y sistematiza la información y el conocimiento en metodología de la investigación por medio de una “espiral holística” (Hurtado, 2012)**.** La comprensión holística de la investigación motiva y estimula a dar aportes propios y universales y ayuda al investigador a comprender las

distintas fases y estadios por los que atraviesan los procesos creativos en el plano de la investigación.

Desde el punto de vista de la vinculación entre la comprensión holística y la temática de la investigación, puede decirse que en la comprensión holística el conocimiento es un proceso donde el ser humano transita de niveles más sencillos a niveles más complejos. Esta concepción del conocimiento es compartida por van Hiele, quien también considera que el conocimiento avanza a través de diferentes niveles. Es interesante observar que los niveles de razonamiento formulados por van Hiele corresponden a los cinco primeros estadios de la espiral holística.

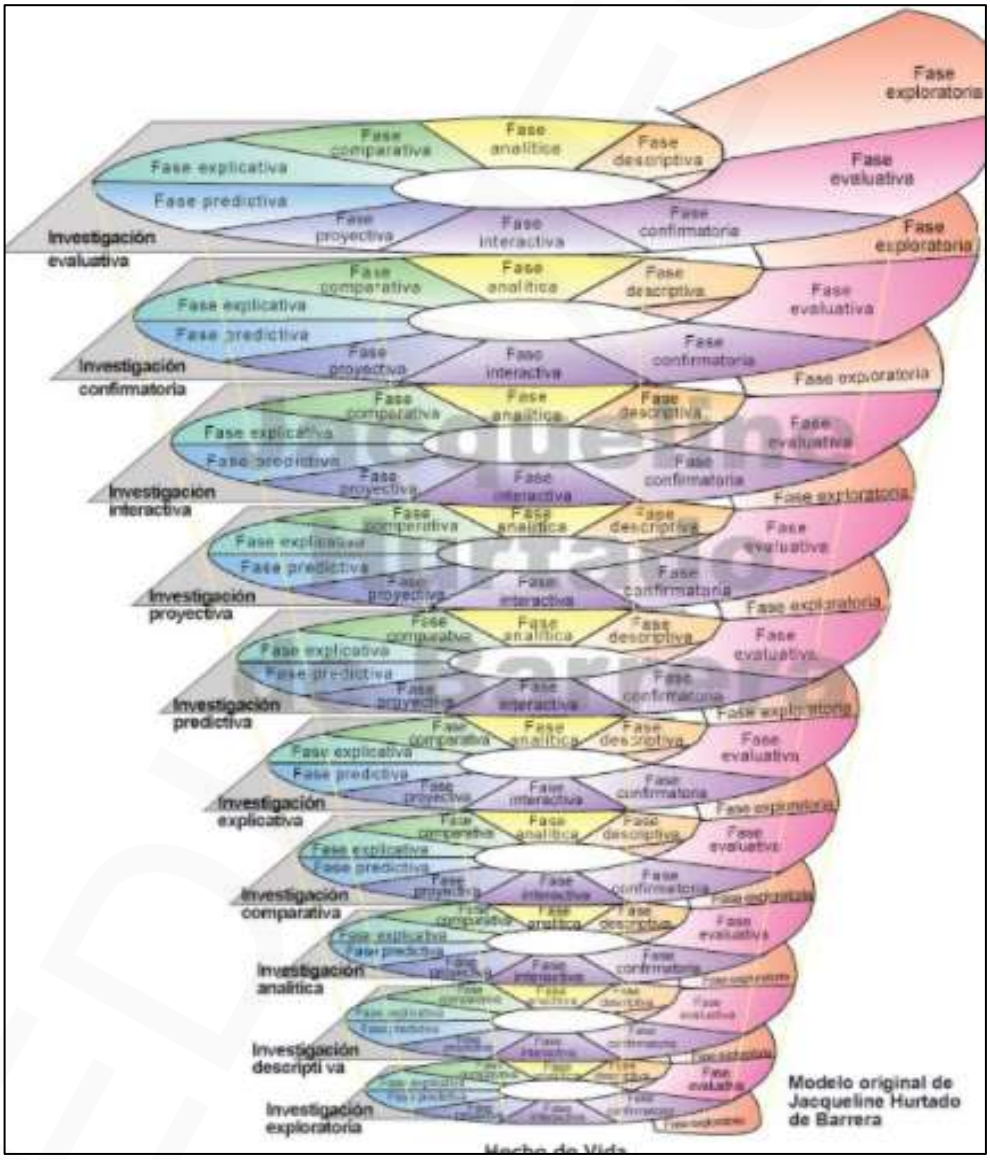
3.1.2 Método

Para definir el método, Weil (1997) acuña un nuevo término: la "holopraxis", la cual define como el conjunto de prácticas que permiten asumir un abordaje holístico de la realidad. En este mismo sentido, para Hurtado (2012) la holopraxis es el método de la comprensión holística de la ciencia, y comprende la práctica completa de la investigación en sus múltiples dimensiones, desde sus inicios hasta su finalización. La holopraxis implica pasar por los diferentes estadios de investigación (en el caso, de la presente investigación, analítico, explicativo y proyectivo, …), en cada una de sus fases, hasta alcanzar el objetivo general de la investigación, de modo que en cada uno de esos estadios se desarrollen diferentes procesos metodológicos como lo son revisión documental, diseño de instrumentos, selección de unidades de estudio, precisión del diseño de investigación, recolección de datos y análisis de datos.

Desde una visión integradora se concibe el proceso investigativo como un devenir a través de diferentes niveles de conocimiento. En este devenir, el conocimiento anterior no queda desechado completamente, sino que se integra dentro de una nueva comprensión, pues ha sido la tarea evolutiva necesaria para alcanzar el nuevo aprendizaje. Desde una comprensión holística el ser humano se aproxima al conocimiento

PREPRINT

en un proceso permanente en “espiral” donde cada resultado alcanza grados de complejidad cada vez más avanzados. Como se ilustra en la Figura 20, La **espiral holística** recorre **diez tipos de investigación** que se repiten *ad infinitum*, como un fractal.



Fuente: Hurtado (2012)

Figura 20. La espiral holística de la investigación

Para efectos de la presente investigación, el método contempla siete estadios, cuatro de ellos son analíticos, uno explicativo y dos proyectivos, para describir los procesos realizados en cada uno de los estadios de la investigación:

- Los tres primeros estadios fueron analíticos, y se analizaron los EBCM y los DBA. En el primer estadio se analizó la relación de estos documentos con el concepto de parábola como lugar geométrico. Para el segundo estadio fue necesario analizar su relación con los tipos de pensamiento, y para el tercer estadio se analizaron los documentos en términos de los niveles del razonamiento del modelo de van Hiele. El diseño de investigación, en los tres casos, correspondió al documental, transeccional, contemporáneo y univariable. Además, se hizo uso de un análisis cualitativo con apoyo del software ATLAS.ti.

- El cuarto estadio fue explicativo, y aquí se generaron los descriptores de nivel de acuerdo al modelo de van Hiele, para ello no se requirió de la aplicación de técnicas e instrumentos de recolección de datos, en lugar de esto se utilizó el diseño psicométrico. El abordaje fue estructurado, cosmológico, etic y exógeno. Se hizo el diseño psicométrico, con el fin de establecer los descriptores y construir la tabla de operacionalización, la cual permitió garantizar la validez de constructo del instrumento a crear.

- En el quinto estadio de tipo proyectivo, se diseñó la versión preliminar de la entrevista socrática dinámica, para describir la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico por parte de los estudiantes. El abordaje fue estructurado, cosmológico, etic y exógeno. No se aplicaron técnicas de instrumentos de recolección de datos ni técnicas de análisis; se realizó un diseño psicométrico para construir la entrevista. El diseño se hizo con base en la información obtenida en los estadios anteriores.

PREPRINT

- El sexto estadio fue analítico, para ello, fue necesario analizar la versión preliminar de la entrevista socrática diseñada, en función de varios criterios de validez y confiabilidad. Para realizar este análisis fue necesario en primer lugar, utilizar la técnica de revisión documental, debido a que la unidad de estudio era la versión inicial de la entrevista, posteriormente, se solicitó la intervención de un grupo de expertos mediante la aplicación de una matriz de validación por acuerdos. En consecuencia, el diseño de investigación fue documental, transeccional, contemporáneo y univariable. En cuanto al abordaje, fue estructurado, cosmológico, etic, exógeno y como técnica de análisis se utilizó el acuerdo entre expertos. En este mismo objetivo, también, se analizó la versión inicial de la entrevista socrática, en función de los criterios de confiabilidad, y para ello se aplicó una prueba piloto a un grupo de 75 estudiantes. Para este estadio, el diseño de investigación fue de campo, transeccional, contemporáneo y univariable; el abordaje fue el mismo utilizado en los anteriores estadios y la técnica de análisis utilizada fue la prueba Alpha de Cronbach para estimar la confiabilidad de la versión inicial de la entrevista socrática. Esta prueba permitió identificar la contribución de cada pregunta a la consistencia interna del instrumento total. También se calculó la confiabilidad para cada una de las dimensiones del evento de estudio contenidas en el instrumento.

- Finalmente, el séptimo estadio fue de tipo proyectivo, en él se configuró la entrevista socrática dinámica definitiva, la cual estaba enfocada en detectar el nivel de razonamiento de un estudiante con respecto al concepto de parábola como lugar geométrico. En este estadio no se aplicaron instrumentos ni técnicas de recolección de datos, sino de diseño psicométrico. El abordaje coincidió con el de todos los anteriores objetivos, y no se hizo análisis, sino diseño psicométrico para mejorar la entrevista.

PREPRINT

La Tabla 8 que se muestra a continuación, es la tabla holopráxica de la investigación. En ella se muestra el proceso operativo desarrollado para cada uno de los objetivos específicos de la investigación.

Tabla 8. Holopráxica de la investigación

Objetivos	Estadio	Evento	Unidad de estudio	Técnica	Instrumento	Diseño	Abordaje	Técnicas de análisis
Analizar los EBC en matemáticas y los DBA, de los grados 6°a 11° según el concepto de parábola como lugar geométrico.	Analítico	**Criterio de análisis**: Concepto de parábola como lugar geométrico **Evento a analizar:** Contenido de los documentos	DBA y EBCM	Revisión documental	Matriz de análisis de los aspectos y objetos matemáticos asociados al concepto de parábola	Documental, transeccional, contemporáneo, univariable	Estructurado Etic Exógeno	Cualitativas. Categorización y relación de categorías según el concepto parábola
Analizar los objetos matemáticos contenidos en las unidades de aprendizaje de los EBC en función del concepto de parábola como lugar geométrico, y los tipos de pensamiento.	Analítico	**Criterio de análisis:** Concepto de parábola como lugar geométrico y tipo de pensamiento **Evento a analizar**: Objetos matemáticos contenidos en las unidades de aprendizaje de los estándares	Documento: EBCM	Revisión documental	Matriz de análisis del concepto de parábola como lugar geométrico	Documental, transeccional, contemporáneo, multivariable	Estructurado Cosmológico Etic Exógeno	Cualitativas. Categorización y relación entre categorías según tipos de pensamiento
Analizar los objetos matemáticos contenidos en las unidades de aprendizaje seleccionadas con base en los niveles de razonamiento del modelo de van Hiele.	Analítico	**Evento a analizar:** Contenidos asociados al tipo de pensamiento **Criterio de análisis**: Niveles de razonamiento según van Hiele	Documento: EBCM	Revisión documental	Matriz de análisis de los Niveles de razonamiento y de comprensión según van Hiele	Documental, transeccional, contemporáneo, univariable	Estructurado Cosmológico Etic Exógeno	Análisis cualitativo. Relación entre categorías según los niveles de razonamiento

Objetivos	Estadio	Evento	Unidad de estudio	Técnica	Instrumento	Diseño	Abordaje	Técnicas de análisis
Formular los descriptores necesarios para caracterizar el nivel de razonamiento del concepto de parábola como lugar geométrico, alcanzado por los estudiantes, con base en el modelo de van Hiele.	Explicativo	**Evento a explicar**: Concepto de parábola como lugar geométrico **Constructo:** Descriptores según van Hiele	Documento: EBCM	Se trabaja con los resultados anteriores	No se aplican instrumentos de recolección	No hay recolección de datos	Estructurado Cosmológico Etic Exógeno	Análisis cualitativo. Análisis estructural
Diseñar la versión inicial de la entrevista socrática, para describir la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, por parte de los estudiantes	Proyectivo	**Base estructural:** Niveles de razonamiento **Función:** Medición válida y confiable	Documento: EBCM	No se aplican técnicas de recolección, sino de diseño psicométrico	No se aplican instrumentos de recolección	No hay recolección de datos	Estructurado Cosmológico Etic Exógeno	No se hace análisis sino diseño psicométrico para construir la entrevista
Analizar la entrevista socrática, en términos de los criterios de validez y confiabilidad	Analítico	**Criterio de análisis:** Validez y confiabilidad **Evento a analizar:** Contenido de la entrevista	Primera versión de la entrevista socrática	Técnicas psicométricas	Matriz de validación de expertos y prueba piloto	De fuente mixta transeccional, contemporáneo, multivariable	Estructurado Cosmológico Etic Exógeno	Concordancia entre expertos y Prueba Alpha de Cronbach
Configurar la entrevista socrática definitiva, para detectar el nivel de razonamiento acerca del concepto de parábola como lugar geométrico.	Proyectivo	**Estructura:** Niveles de razonamiento **Función**: Medición válida y confiable	Primera versión de la entrevista socrática	Técnicas de diseño psicométrico	No se aplican instrumentos de recolección	No hay recolección de datos	Estructurado Cosmológico Etic Exógeno	No se hace análisis sino diseño psicométrico

Fuente propia basada en Hurtado (2012)

REPOSITORIO UNIMINUTO

3.2. Tipo de Investigación

En la comprensión holística de la investigación, los tipos de investigación más que modalidades constituyen etapas del proceso investigativo universal. En este sentido esta investigación es proyectiva porque su objetivo es plantear un modelo de entrevista socrática dinámica que permita evaluar la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico por parte de los estudiantes de grado décimo, en el marco del modelo de van Hiele.

Hurtado (2012) menciona que una investigación es proyectiva cuando propone soluciones a una situación determinada mediante un proceso de indagación, el cual involucra explorar, describir, explicar y proponer alternativas de solución, pero no necesariamente implica ejecutar la propuesta.

3.3. Diseño de la Investigación

Hurtado (2012) define el diseño de la investigación como el conjunto de decisiones estratégicas que toma el investigador, relacionadas con el dónde, el cuándo, el cómo obtener los datos, y con el tipo de datos a recolectar, para garantizar la validez interna de su investigación, asimismo señala que en algunas investigaciones de tipo proyectivo, es fundamental en el diseño de la investigación elaborar para cada objetivo específico un diseño de investigación, es por ello, que a continuación se detalla el diseño de la investigación por objetivo específico:

- Para los objetivos uno y dos, de acuerdo con Hurtado (2012), el diseño de investigación fue documental, por cuanto los datos extraídos de documentos como los DBA y los EBCM, fueron analizados en su contenido, y permitieron ubicar las unidades de aprendizaje que se relacionaban con el concepto de parábola como lugar geométrico.

REPOSITORIO

- Posteriormente, para los objetivos tres y cuatro, el diseño de investigación, según la fuente, fue documental por cuanto la información se extrajo de documentos relacionados con el modelo de van Hiele, los cuales permitieron clasificar cada unidad de acuerdo con concepto de parábola como lugar geométrico, ya fuese que este concepto estuviese de forma explícita o implícita en éstas unidades; posteriormente fueron asociadas las unidades correspondientes a cada nivel de acuerdo al modelo. Este proceso fue necesario para construir y refinar los descriptores de cada nivel.

- Una vez obtenidos los descriptores definitivos, en el quinto objetivo se procedió a diseñar la versión preliminar de la entrevista socrática, el diseño implementado también fue documental ya que para el diseño de la versión preliminar fue necesario analizar los documentos referidos a los primeros cuatro objetivos junto con algunas investigaciones realizadas en el marco del modelo de van Hiele, de la entrevista socrática y el software *GeoGebra,* lo que dio lugar a generar la primera entrevista socrática dinámica.

- Una vez elaborada la versión preliminar de la entrevista socrática se procedió a recabar los datos para la consecución del sexto objetivo, los cuales se obtuvieron al realizar las respectivas pruebas piloto de validación con los estudiantes, de acuerdo Hurtado (2012) este diseño de investigación fue de campo porque se obtuvieron los datos de fuentes directas y en su contexto natural al aplicar la versión preliminar de la entrevista socrática dinámica.

- Luego de la implementación de la entrevista, se procedió a un exhaustivo proceso de refinamiento, esto permitió ajustar el guion preliminar objeto de validación. Además, el guion pasó por otros procesos de revisión (nueve aproximadamente). Finalmente, éste se validó para llegar a la versión definitiva. De acuerdo con Hurtado (2012), este diseño de investigación fue de **fuente mixta** debido a que las estrategias utilizadas para la recolección de los datos fueron variadas, pasando

por técnicas de observación y entrevistas pero, al mismo tiempo, se requirió de matrices de análisis, matrices de categorías, entre otras.

Con respecto a la **temporalidad**, el diseño fue **transeccional** ya que se recolectó la información en un solo momento de tiempo, como lo establece Hurtado de Barrera (2012) y como lo reafirma Hernández et al. (2014), su propósito es estudiar las variables en un momento dado. Además, el diseño fue **contemporáneo** porque permitió la respectiva medición en el presente.

3.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

De acuerdo a Hurtado de Barrera (2012), esta fase de la investigación se denomina fase interactiva, y consiste en emplear los instrumentos de recolección de datos y llevar a cabo las estrategias para obtener la información pertinente; es decir ,el investigador recoge la información necesaria para alcanzar cada uno de los objetivos específicos. A continuación, se describen las técnicas de análisis utilizadas para la consecución de cada uno de los siete objetivos específicos propuestos en la presente investigación.

- Para recolectar los datos del primer objetivo específico se utilizó la técnica de revisión documental, y el instrumento fue la **Matriz de análisis de los aspectos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico**. Esta matriz se divide en cuatro secciones: Concepto de recta real, concepto de secciones cónicas, concepto de coordenadas polares y cartesianas, concepto de función. Estas cuatro categorías están compuestas por un total de 20 preguntas.

- Para el segundo objetivo específico se aplicó la **Matriz de análisis de los aspectos asociados al concepto de parábola y a los tipos de pensamiento (numérico, variacional, métrico y geométrico**). Esta matriz se divide en cuatro secciones; aspectos asociados al pensamiento geométrico, aspectos asociados al

pensamiento variacional, aspectos asociados al pensamiento numérico y aspectos asociados al pensamiento métrico; estas cuatro categorías están compuestas por un total de 12 preguntas.

- En el tercer objetivo específico se trabajó con la **Matriz de análisis de los aspectos referidos a los Niveles de razonamiento según van Hiele**. Esta matriz se divide en cuatro secciones, ellas son; Nivel-0 Predescriptivo, Nivel-I o de Reconocimiento visual, Nivel II o de Análisis y finalmente Nivel –III o de Clasificación. Estas cuatro categorías están compuestas por un total de 12 preguntas.

- Para el cuarto objetivo específico no se aplicaron instrumentos de recolección de datos, porque se trabajó en la formulación de los descriptores. Así mismo, para el quinto objetivo específico tampoco se utilizaron instrumentos de recolección de datos, porque se diseñó la entrevista socrática preliminar.

- Para el sexto objetivo específico se utilizó el **Formato de validación de expertos y los criterios psicométricos,** para analizar la entrevista socrática. Este formato se encuentra conformado por una matriz de validación de expertos y los criterios para valorar la confiabilidad. La matriz está conformada por un bloque de instrucciones para los expertos, la definición del evento y de las dimensiones a medir con la entrevista socrática, el formato para ubicar las preguntas en cada dimensión y, finalmente, la constancia de validación. En esta matriz se encuentran contempladas 36 preguntas que componen la entrevista socrática dinámica.

3.5. Población, muestra y muestreo

De acuerdo con Hernández et al. (2014), para realizar la recopilación de los datos se debe como primera medida definir cuáles serán las unidades de análisis. La

población es el conjunto de unidades que forman parte del contexto donde se quiere investigar un evento. Para efectos de esta investigación, en cada uno de los objetivos específicos, que se detallan a continuación, se definieron unidades de estudio, así:

- Para el primer y segundo objetivo específico, se consideraron los documentos en los que se encuentran descritos los DBA y los EBCM de educación básica y media. Estos documentos son únicos, por lo tanto, no hubo muestreo.

- Para el tercer, objetivo específico, la unidad de estudio fue el documento que contiene los EBCM. Este documento es único, por lo tanto, no hubo muestreo.

- Para el sexto objetivo específico, la unidad de estudio fue la versión preliminar de la entrevista socrática dinámica.

Para realizar las respectivas pruebas piloto de validación, se utilizaron como fuente 75 estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Francisco de Paula Santander, del municipio de Bucaramanga (Colombia) ya que ellos presentaban características similares a las personas para las cuales se diseñó el instrumento.

3.6. Procedimiento de la investigación

El procedimiento llevado a cabo en la investigación se desarrolló al atravesar cada uno de los estadios definidos en la tabla holopráxica de investigación, los cuales fueron propuestos para desarrollar cada uno de los objetivos específicos. A continuación, se describe este proceso.

Para el primer objetivo, el cual hace referencia a analizar los estándares EBCM y los DBA, de los grados sexto a once de educación básica y media, en relación con el concepto de parábola como lugar geométrico, estos documentos permitieron detectar, obtener, y registrar los contenidos relacionados directa e indirectamente con el concepto de parábola como lugar geométrico. Para ello se hizo una revisión preliminar

de los documentos y se seleccionaron los segmentos que podían contener alguna información acerca del concepto de parábola. Estos fragmentos se cargaron en el software ATLAS-ti y a las citas pertinentes se le asignaron las categorías de la matriz de análisis. Luego, se establecieron las relaciones entre las categorías para generar las redes.

Para el segundo objetivo, el cual hace referencia a analizar los objetos matemáticos contenidos en las unidades de aprendizaje de los EBCM en función de la caracterización del concepto de parábola como lugar geométrico, y los tipos de pensamiento, se analizaron los contenidos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico y los tipos de pensamiento. El análisis de estos documentos permitió detectar, obtener, y registrar los contenidos que estaban asociados al concepto de parábola como lugar geométrico y como estos se relacionan con los cinco pensamientos matemáticos. Este procedimiento también se realizó con el ATLAS.ti, pero sólo con las unidades de aprendizaje identificadas, y la matriz de análisis que se utilizó fue la de los tipos de pensamiento.

Para el tercer objetivo, el cual hace referencia a analizar los objetos matemáticos contenidos en las unidades de aprendizaje seleccionadas con base en los niveles del razonamiento desarrollados en el modelo de van Hiele, se analizaron los contenidos asociados a las unidades de aprendizaje seleccionadas. El análisis de estos documentos, por medio del software ATLAS.ti, permitió detectar, obtener, y registrar los contenidos que estaban asociados al concepto de parábola como lugar geométrico, y su relación con los niveles mencionados.

Para el cuarto objetivo, se construyeron los descriptores de nivel de acuerdo al modelo de van Hiele, y en este caso, no se requirió la aplicación de técnicas e instrumentos de recolección de datos, sino que fue necesaria la aplicación de técnicas de diseño psicométrico. El diseño psicométrico fue fundamental para la construcción

de los descriptores de nivel y es por ello que se construyó la tabla de operacionalización, para garantizar la validez del instrumento a diseñar.

Para el quinto objetivo, el cual hace referencia a diseñar la versión preliminar de la entrevista socrática, que permita describir la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, por parte de los estudiantes, en función del modelo de van Hiele, se diseñó la versión inicial de la entrevista socrática, para obtener información que permitiera describir la comprensión del concepto de infinito actual por parte de los estudiantes. No se aplicaron técnicas ni instrumentos de recolección de datos, ni técnicas de análisis. El diseño se hizo con base en la información obtenida de los objetivos anteriores.

Para el sexto objetivo hace referencia al análisis de la entrevista socrática dinámica diseñada, en términos de los criterios de validez y confiabilidad a fin de hacer mejoras en su contenido, su estructura, y su consistencia interna, a partir de las pruebas piloto realizadas con los estudiantes. En un primer momento se utilizó la técnica de revisión documental, ya que la unidad de estudio era la versión preliminar de la entrevista; para ello se solicitó a un grupo de expertos la aplicación de una matriz de validación por acuerdos.

También fue necesario analizar la versión preliminar de la entrevista socrática en función de los criterios de confiabilidad; esto condujo a tomar como muestra piloto a un grupo de 75 estudiantes (esta implementación se desarrolló en 2020, en ese momento el mundo atravesaba por la pandemia del SARS-CoV-2, lo que obligó a aplicar la prueba piloto de forma virtual). Es necesario aclarar que el uso del software *GeoGebra* y su plataforma coincidió con las necesidades del momento y los propósitos iniciales del estudio, concebidos desde el año 2017.

Para la aplicación de la prueba piloto se utilizaron simultáneamente la plataforma Zoom, y la plataforma GeoGebra Classroom, la primera a través de video llamada en

tiempo real, de manera que los entrevistados pudieron interactuar con el entrevistador. En la plataforma GeoGebra Classroom el entrevistador pudo ver todos los procesos de construcción que estaba desarrollando el estudiante, en tiempo real, durante la sesión y después de ella.

Inicialmente, se dio una breve explicación del objetivo de la aplicación del instrumento y su importancia, y se enfatizó en que no se trataba de un examen, y que la actividad no generaría ninguna calificación. Se motivó a los estudiantes a realizar la entrevista con el mayor interés y sinceridad posibles; para ello se les aclaró que el objetivo era apreciar el razonamiento acerca de un concepto matemático; una vez resueltas las inquietudes, se procedió a realizar la entrevista. Se indicó que no había tiempo límite para la aplicación, aunque se calculó un tiempo aproximado de dos horas. Es importante resaltar que durante la aplicación de la entrevista se tuvieron en cuenta las características requeridas para la aplicación de una entrevista socrática dinámica.

La técnica aplicada para el análisis de la entrevista socrática dinámica, en términos de su confiabilidad fue la prueba del Alpha de Cronbach. Esta prueba fue fundamental para poder identificar la correlación entre cada pregunta con la consistencia interna del instrumento. Asimismo, se estableció la confiabilidad para cada una de las dimensiones del evento de estudio contenidas en el instrumento.

Para el séptimo y último objetivo, se estableció la entrevista socrática dinámica definitiva, mediante la cual se detectará el nivel de razonamiento de un estudiante con respecto al concepto de parábola como lugar geométrico, a partir de las mejoras en función de la información obtenida en el objetivo anterior.

PREPRINT

3.7 Validez y confiabilidad de los instrumentos

En este apartado se presentan los procedimientos y los resultados de la validez de las matrices de análisis utilizadas para la recolección de datos en los primeros tres objetivos específicos, en los cuales fue necesario utilizar matrices de análisis.

3.7.1 Validez de los instrumentos

Para efectos de esta investigación y medir la validez de constructo de los instrumentos, se utilizó como técnica el juicio por expertos. La **validez de expertos** ,de acuerdo con Hurtado (2012), hace referencia al grado en que aparentemente un instrumento mide el evento en cuestión, de acuerdo con voces calificadas y expertas el juicio de expertos; de acuerdo con Escobar y Martínez (2008), implica una opinión informada de personas con trayectoria en el tema, que son reconocidas por otros como expertos cualificados en éste, y que pueden dar información, evidencia, juicios y valoraciones.

Para determinar la validez de los instrumentos, fueron seleccionados tres expertos en el tema, a cada uno de ellos se le entregó una carta donde se les explicaba el procedimiento que debían seguir, y un paquete con las matrices a validar. Cada experto debía asignar las preguntas de cada instrumento a la dimensión correspondiente. Posteriormente, se calculó la proporción de acuerdos entre los expertos y el investigador. Se consideró que la validez era aceptable si este índice superaba el valor de 0,75 (Magnusson, 2005).

Los tres expertos seleccionados tenían las siguientes características: El primer experto es una profesora de colegio público y de reconocidas universidades colombianas, Licenciada en Matemáticas, Magíster en Educación, y candidata a Doctora en Educación, investigadora por más de doce años en la línea del pensamiento geométrico y ha trabajado con el modelo de van Hiele por más de cuatro años. El

segundo experto también es Licenciada en Matemáticas; profesora de colegio público y cátedra en diversas universidades colombianas, además es Especialista en Educación Matemática, Magíster en Educación Matemática y candidata a Doctora en Educación, investigadora por más de 10 años en la línea de resolución de problemas. El tercer experto es profesor de colegio público y cátedra en diversas universidades colombianas, Licenciado en Matemáticas, Especialista en Educación Matemática y Magíster en Educación matemática, lleva más de 20 años de trabajo en el área de educación matemática y experto en los distintos tipos de pensamiento.

3.7.1.1 Matriz de análisis de los aspectos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico

Los jueces valoraron la matriz y hubo acuerdo en 18 de las 20 preguntas lo que generó un índice de validez de 0,90 mediante el criterio de acuerdo total; este valor cumple con el coeficiente de validez que supera el mínimo esperado de acuerdo con Magnusson (2005). Este proceso se muestra en la tabla de registro correspondiente, allí se puede observar, contrastar y ratificar la validez por expertos (Anexo A).

Dentro de los criterios de análisis también se encontraban: congruencia ítem-dimensión, amplitud de contenidos, precisión de las preguntas, ortografía y presentación, en este caso las valoraciones expuestas por cada experto se distinguen por estar en concordancia y fueron ubicadas en una escala de excelente, como lo evidencian las tres cartas de constancia de validación de este instrumento en el Anexo G.

3.7.1.2 Validez de la Matriz de análisis de los aspectos asociados a los tipos de pensamiento (numérico, variacional, métrico y geométrico).

Los jueces valoraron la matriz y hubo un acuerdo en las 12 preguntas lo que generó un índice de validez de 1, mediante el criterio de acuerdo total. Por su parte, en relación con los criterios congruencia ítem-dimensión, redacción de las preguntas,

REPOSITORIO

amplitud de contenidos, precisión de las preguntas, ortografía y presentación, las valoraciones expuestas por cada experto estuvieron en concordancia y fueron ubicadas en la categoría excelente; los tres jueces manifestaron que el instrumento era adecuado y permitía identificar, a la luz de los estándares, los tipos de pensamiento involucrados en los temas identificados como necesarios para llegar a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico. Como evidencia, se muestran las tres cartas de constancia de validación de este instrumento (Anexo H).

3.7.1.3 Validez de la Matriz de análisis de los aspectos referidos a los Niveles de razonamiento según van Hiele

Los jueces valoraron la matriz y hubo acuerdo en 8 de las 9 preguntas lo que generó un índice de validez de 0,89 mediante el criterio de acuerdo total. Este índice es mayor que el mínimo esperado y, por lo tanto, se concluye que el instrumento tiene validez. Respecto a los criterios congruencia ítem- dimensión, redacción de las preguntas, amplitud de contenidos, precisión de las preguntas, ortografía y presentación, las valoraciones expuestas por cada experto concuerdan entre sí y fueron ubicadas en la categoría excelente. Como evidencia, se muestran las tres constancias de validación de este instrumento (Anexo I).

3.7.1.4 Validez de la Matriz de análisis de los aspectos referidos a los objetos matemáticos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico

Los jueces valoraron la matriz y hubo acuerdo en 12 de las 13 preguntas lo que generó un índice de validez de 0,92 mediante el criterio de acuerdo total el cual es mayor que el mínimo esperado y, por lo tanto, se concluye que el instrumento tiene validez. Respecto a los criterios congruencia ítem- dimensión, redacción de las preguntas, amplitud de contenidos, precisión de las preguntas, ortografía y presentación, las valoraciones expuestas por cada experto concuerdan entre sí y fueron ubicadas en la categoría excelente. Como evidencia, se muestran las tres constancias

de validación de este instrumento (Anexo J).

3.7.1.5 Validez de Matriz de análisis de los aspectos referidos a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico

Los jueces valoraron la matriz y hubo acuerdo en 8 de las 9 preguntas lo que generó un índice de validez de 0,90 mediante el criterio de acuerdo total; el coeficiente de validez fue 0,89, es decir, mayor que el mínimo esperado. Se concluye que el instrumento tiene validez.

Así mismo, frente a los criterios congruencia ítem-dimensión, redacción de las preguntas, amplitud de contenidos, precisión de las preguntas, ortografía y presentación, las valoraciones expuestas de los expertos están en concordancia y se ubican en la categoría *excelente*; los tres jueces coinciden en que el instrumento es pertinente en términos de identificar los criterios que definen la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, como evidencia en el Anexo K.

3.7.2 Confiabilidad de los instrumentos

De acuerdo con Hurtado (2012), la confiabilidad permite tener la certeza de que la medición es precisa y que los resultados serán iguales si se aplica el instrumento varias veces a las mismas unidades de estudio en un breve tiempo. Así mismo, para Hernández et al. (2014), la confiabilidad de un instrumento de medición se refiere al grado en que su aplicación repetida, produce resultados iguales. La confiabilidad, de acuerdo con Corral (2009), tiene que ver con la exactitud y precisión del procedimiento de medición en el tiempo.

Los instrumentos utilizados para recoger la información, para el caso de esta investigación en particular, fueron seis matrices de análisis diseñadas exclusivamente

para este estudio, y utilizadas para extraer información cualitativa de un conjunto de documentos; por lo tanto, no fue necesario un proceso de cálculo de confiabilidad, dado que los documentos eran únicos y estables en el tiempo.

3.8. Consideraciones éticas

Durante el desarrollo de la investigación, se tuvieron en cuenta las características dadas por Rueda (2004) y descritas por Barrera (2000) sobre los aspectos éticos que debe cumplir cualquier investigación. Estas establecen el estricto cumplimiento de los principios, criterios y exigencias que una investigación debe cumplir para que sea considerada ética.

De acuerdo a lo anterior, durante el desarrollo de la investigación se reseñaron las fuentes debidamente, respetando los derechos de autor y las ideas planteadas por ellos; así mismo en el desarrollo de las pruebas piloto, momento único en el que se trabajó con estudiantes, se hizo todo lo necesario para salvaguardar la dignidad, los derechos, la seguridad y el bienestar de los participantes, se consultó sobre su participación voluntaria en un ambiente de respeto y cordialidad, además se manejó respetuosamente la información aportada por los mismos durante la entrevista socrática dinámica.

3.8.1 Criterios de confidencialidad

Para el caso de los documentos no fue necesario manejar la confidencialidad porque se trató de documentos públicos que se encuentran en la web y que están disponibles para todas las personas, por lo tanto, no se requería confidencialidad.

Para el caso de la prueba piloto, momento en que se trabajó con estudiantes, se mantuvo el anonimato de los participantes al asignar códigos en lugar del nombre de

los estudiantes, además para el caso de los expertos validadores, no se les solicitó ningún dato que no fuese estrictamente necesario para la investigación, o que pudiera resultar comprometedor o derivar en algún perjuicio; se realizó un manejo objetivo de los instrumentos de recolección de información sin perjuicio para terceros. Las tablas originales donde están las respuestas explicitas son confidenciales y de manejo exclusivo del investigador, no están publicadas en el trabajo y no se publicarán en artículos posteriores

Por otra parte, este trabajo se acoge a leyes de protección de datos personales como la Ley Estatutaria 1581 de octubre 2012, del Congreso de la República de Colombia; el principio de confidencialidad de acuerdo al Decreto 1377 del 27 de junio de 2013; la Patria Potestad, según el Código Civil Colombiano, artículo 288; artículo 24 del Decreto 2820 de 1974 y la Ley de Infancia y Adolescencia.

3.8.2 Descripción de la obtención del consentimiento informado

Debido a que los participantes de la investigación eran estudiantes de décimo grado con edades entre los 14 y 18 años se hizo necesario solicitar la autorización de los padres o tutores legales; es importante precisar que el Decreto 1377 de 2013 permitió que esta autorización pudiera realizarse de forma oral, acotando que dicha autorización podría ser revocada en cualquier momento por los padres o tutores legales, de acuerdo con el procedimiento establecido en el artículo 15 de la Ley 1581 de 2012.

3.8.3 Riesgos y beneficios conocidos y potenciales

Es importante tener presente la evaluación de riesgos y beneficios como parte de una obligación ética respecto al proceso investigativo, en cuanto al riesgo de la investigación se afirma que este trabajo no colocó a los encuestados de la prueba piloto en situación de pérdida, lesión y otras consecuencias adversas como resultado de la participación en el estudio, no hubo riesgo de daños físicos (lesiones o dolores); ni

posibilidad de daños psicológicos, no hay posibilidad de daños sociales ni daños de tipo financiero. El nivel de riesgo se estableció como mínimo.

Es necesario resaltar que uno de los principales beneficios es la posibilidad de contar con un instrumento válido y confiable que permitirá que los profesores del área de matemáticas puedan mejorar su propia práctica educativa en el tema de la parábola como lugar geométrico, además le permitirá detectar el nivel de razonamiento de sus estudiantes frente al concepto y, a partir de esos conocimientos previos y mediante la propia entrevista, lograr que el estudiante avance en su proceso de comprensión.

Los estudiantes también serán beneficiados ya que con el instrumento lograrán comprender, de una manera diferente a la tradicional, el concepto de parábola como lugar geométrico. En todo caso, tanto en el proceso de la investigación como en sus resultados, se presentan más beneficios que riegos potenciales.

RED-UNICIT

CAPÍTULO IV.
ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

RED-UMECIT

En este capítulo se presenta el análisis de los resultados, organizados según los objetivos específicos planteados para esta investigación. Para cada objetivo, se muestra el procesamiento de la información y el resultado obtenido, el cual permite avanzar hacia el siguiente.

4.1. Técnicas de Análisis de datos o hallazgos

4.1.1 Análisis de los EBCM y DBA, según el concepto de parábola como lugar geométrico

Para alcanzar el primer objetivo específico, tanto en los EBCM como en los DBA, de los grados sexto a undécimo, se analizó el concepto y los aprendizajes esperados alrededor del concepto de parábola como lugar geométrico.

Los EBCM se derivan de los Lineamientos Curriculares que publicó el MEN en 1998, los cuales son orientaciones epistemológicas, pedagógicas y curriculares diseñadas para apoyar el proceso de fundamentación y planeación de la enseñanza matemática; están construidos por grupos de grados: de primero a tercero, de cuarto a quinto, de sexto a séptimo, de octavo a noveno, y de décimo a undécimo. Estos documentos exponen los fundamentos epistémicos, filosóficos, pedagógicos, didácticos, y los elementos de evaluación que deben tenerse en cuenta a la hora de construir los planes de área y planes de clase para los grados primero. a undécimo (MEN, 2014).

En relación a los DBA,

> (…), en su conjunto, explicitan los aprendizajes estructurantes para un grado y un área particular. Se entienden los aprendizajes como la conjunción de unos conocimientos, habilidades y actitudes que

> otorgan un contexto cultural e histórico a quien aprende. Son estructurantes en tanto expresan las unidades básicas y fundamentales sobre las cuales se puede edificar el desarrollo futuro del individuo. Los DBA se organizan guardando coherencia con los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias (EBC). Su importancia radica en que plantean elementos para construir rutas de enseñanza que promueven la consecución de aprendizajes año a año para que, como resultado de un proceso, los estudiantes alcancen los EBC propuestos por cada grupo de grados (MEN, 2016, p. 6).

La articulación entre estos referentes curriculares permitió construir tres tablas de categorías, a partir de las cuales se identificaron los contenidos o unidades de aprendizaje que deben trabajarse en cada uno de los grupos por grados establecidos por el MEN, y que se encuentran asociados al concepto de parábola como lugar geométrico. A continuación, se presenta Tabla 9 con la frecuencia de contenidos encontrados para cada categoría de la matriz utilizada en el análisis de los EBCM y los DBA, para los grados de sexto a undécimo.

Tabla 9. Categorías asociadas al concepto de parábola para todos los grados

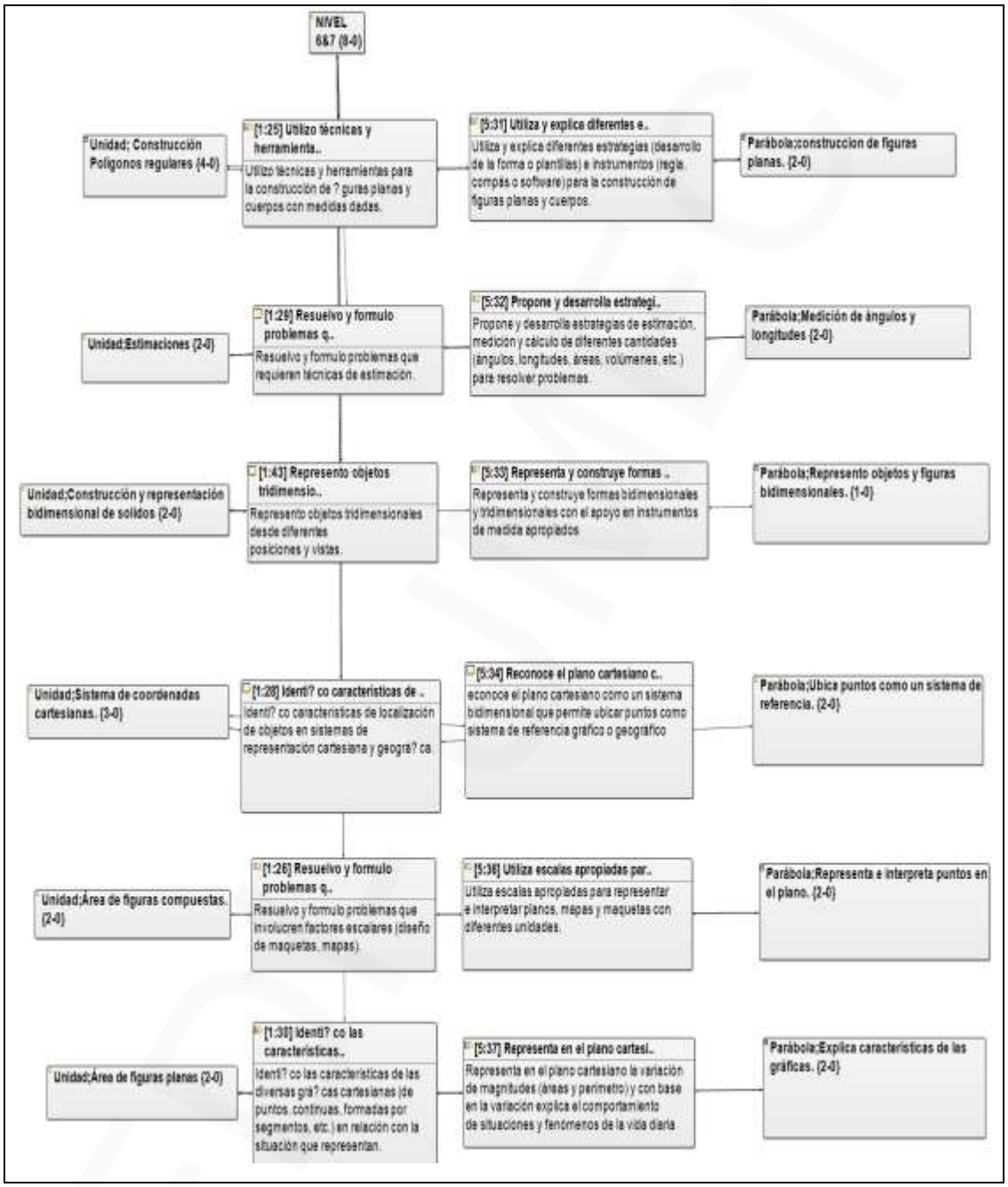
Categoría	Subcategoría	Frec
Nivel	Sexto y séptimo	1
	Octavo y Noveno	1
	Décimo y undécimo	1
Unidad	Construcción de Polígonos regulares	1
	Estimaciones.	1
	Construcción y representación bidimensional de sólidos	1
	Sistema de coordenadas cartesianas.	1
	Área de figuras compuestas.	1
	Área de figuras planas	1
	Criterios de congruencia de triángulos	1
	Función cuadrática y representación gráfica.	1
	Teorema de Thales	1
	Criterios de semejanza de triángulos	1
	Trayectorias y desplazamientos	1
	Posiciones de una recta y una circunferencia	1

Categoría	Subcategoría	Frec
	Secciones cónicas	1
	Coordenadas polares y cartesianas	1
	La recta real	1
	Concepto de relación y función	1
Parábola	Realiza y construye figuras geométricas en el plano.	1
	Medición de ángulos y longitudes	1
	Representa objetos y figuras bidimensionales	1
	Ubica puntos que satisfacen condiciones específicas en un sistema de referencia.	1
	Representa e interpreta puntos con propiedades de lugares geométricos en el plano.	1
	Explica las características de gráficas dadas o construidas con regla y compás o software especializado en dos dimensiones	1
	Verifica propiedades de figuras utilizando regla y compás y software especializado.	1
	Identifica propiedades en una gráfica.	1
	Comprende y explica propiedades geométricas y de lugares geométricos en el plano.	1
	Infiere regularidades y patrones de figuras.	1
	Mide ángulos en una relación geométrica.	1
	Describe propiedades de las representaciones geométricas en el plano cartesiano.	1
	Describe propiedades del conjunto de puntos que forman los lugares geométricos.	1
	Identifica propiedades de los conjuntos de puntos del plano, que forman un lugar geométrico.	1
	Resuelve situaciones de medición utilizando regla y compás o software especializado.	1
	Conoce y maneja diversos sistemas de coordenadas tale como, rectangulares y polares, para realizar construcciones de figuras.	1
Total		35

Fuente: Elaboración propia. Basada en los DBA (MEN, 2016) y EBCM (MEN, 2006)

Mediante el uso del software ATLAS.ti, se asociaron las categorías presentadas en la Tabla 9 con los documentos analizados. Mediante el software se crearon tres redes que permitieron ver de manera gráfica la relación entre los estándares y los DBA, en relación con el concepto de parábola como lugar geométrico, para cada uno de los grupos por grados.

A continuación, se presentan las tres redes generadas por el software; la primera para los grados sexto y séptimo, la segunda para los grados octavo y noveno y la tercera para los grados décimo y undécimo.



Fuente: Elaboración propia. Basada en los DBA (MEN, 2016) y EBCM (MEN, 2006).

Figura 21. Red 1: Correspondencia entre las unidades de aprendizaje de los Estándares, los DBA y los aspectos del concepto de parábola, para sexto y séptimo

Respecto a la Red 1 (Figura 21), la primera columna muestra las unidades de aprendizaje, la segunda el estándar asociado a esta unidad, la tercera el DBA asociado

a la unidad de aprendizaje y, finalmente, la relación de la unidad asociada con el tema objeto de estudio.

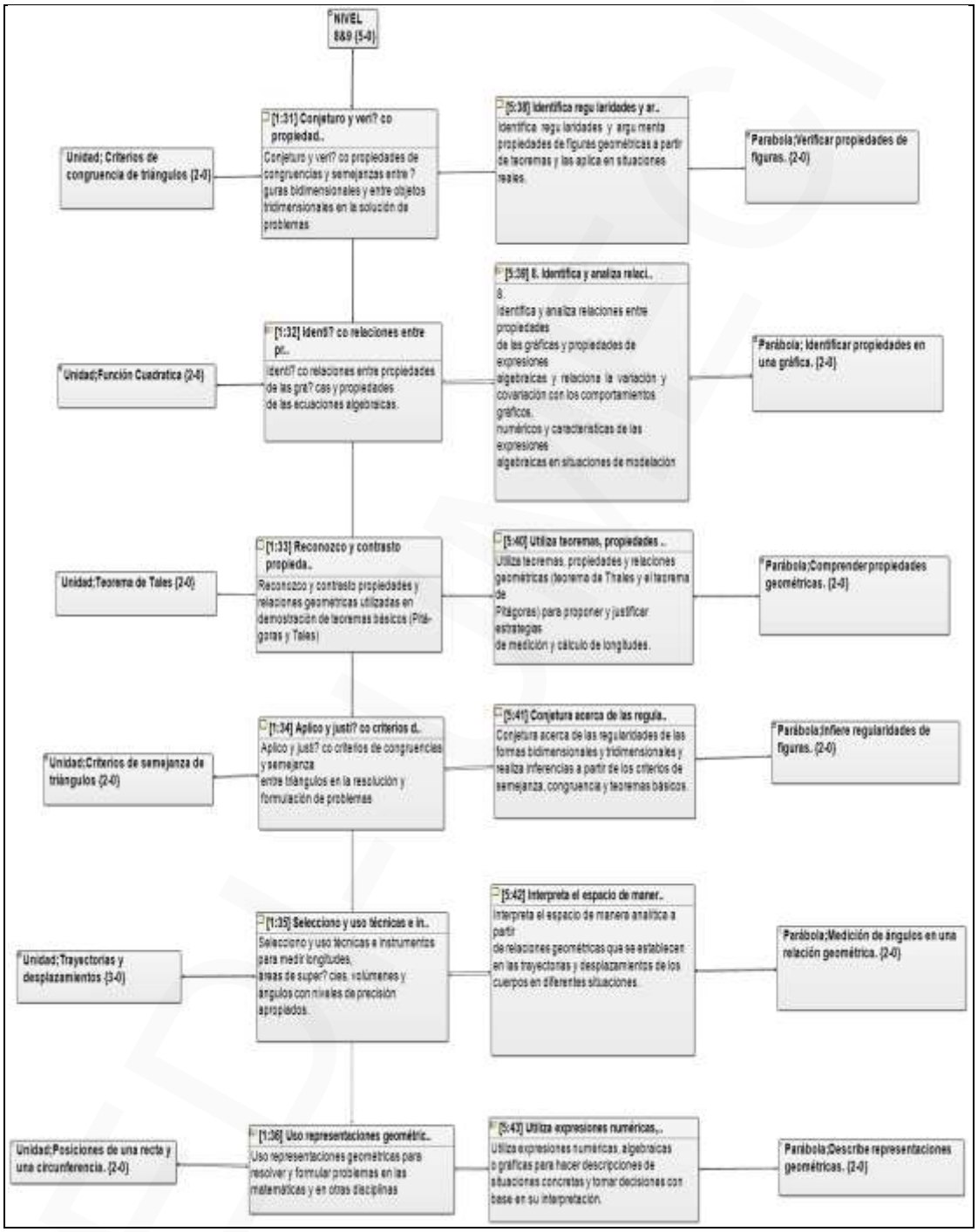
Esto permitió seleccionar aquellas unidades que tenían temáticas necesarias para llegar a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, siendo seis las seleccionadas: *construcción de polígonos regulares, estimaciones, construcción y representación bidimensional de sólidos, sistema de coordenadas cartesianas, área de figuras compuestas y área de figuras planas.*

Un procedimiento similar se hizo para la Red 2 (véase Figura 22), de la cual emergieron seis unidades necesarias para la comprensión del objeto matemático de esta investigación. Los contenidos de estas unidades son: *criterios de congruencia de triángulos, función cuadrática representación gráfica, teorema de Thales, criterios de semejanza de triángulos, trayectorias y desplazamientos* y, finalmente, *posiciones de una recta y una circunferencia.*

Cabe destacar que mediante estas unidades, correspondientes a los grados octavo y noveno, el estudiante se enfrenta por primera vez a una aproximación de la definición de parábola como lugar geométrico. Además, en estas unidades se tocan aspectos relacionados con la gráfica de la parábola, no como lugar geométrico sino como una función cuadrática.

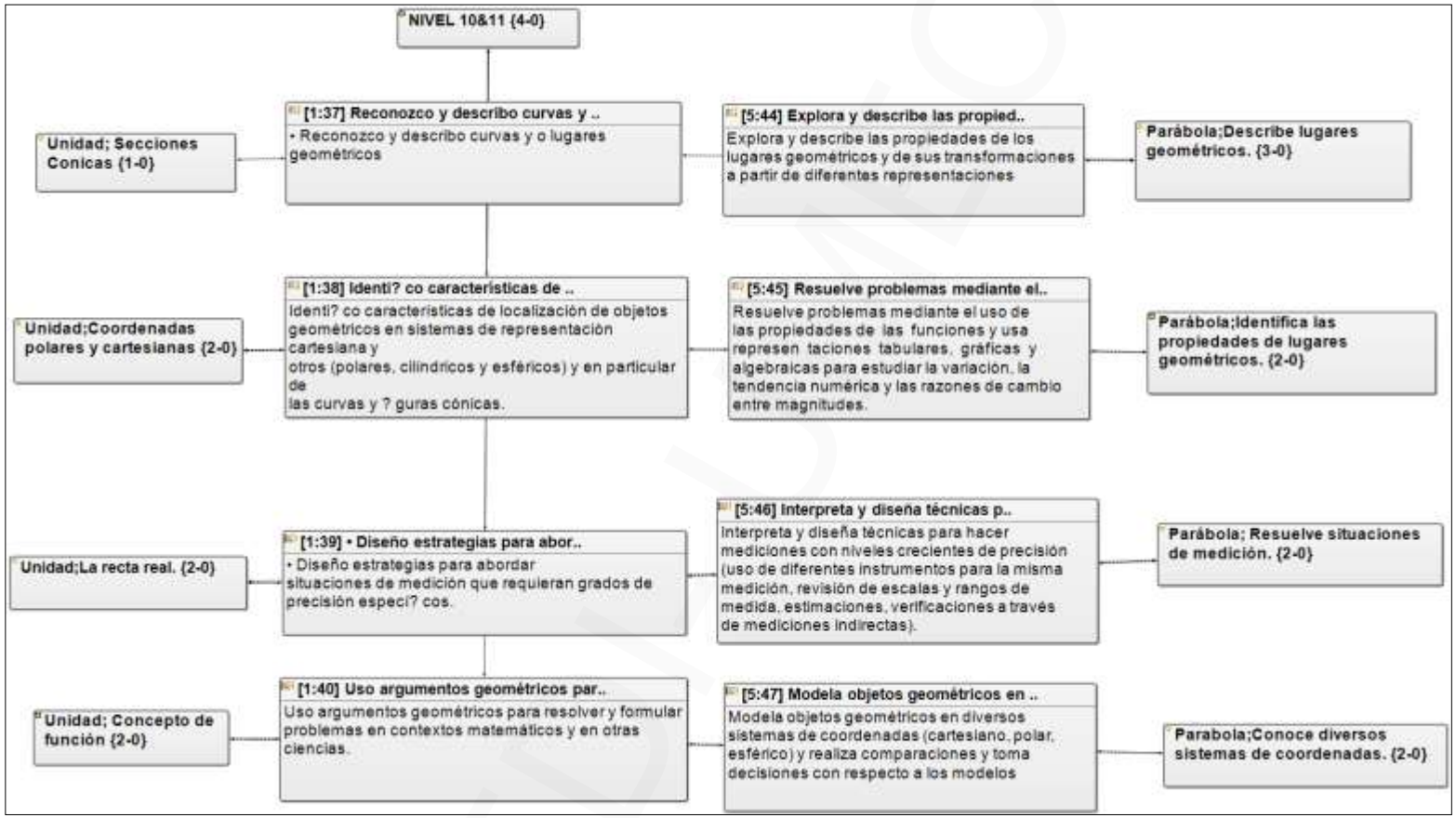
En la Red 2, al igual que en la Red 1, la primera columna muestra las unidades de aprendizaje, la segunda el estándar básico de competencia en matemáticas asociado a esta unidad, la tercera el DBA asociado a la unidad de aprendizaje y, finalmente, la relación con el tema objeto de estudio.

REPOSITORIO



Fuente: Elaboración propia. Basada en los DBA (2016) y los EBC en matemáticas (2006)

Figura 22. Red 2: Correspondencia entre las unidades de aprendizaje de los Estándares, los DBA y los aspectos del concepto de parábola, para octavo y noveno



Fuente: Elaboración propia. Basada en los DBA (2016) y los EBCM (MEN, 2006)

Figura 23. Red 3: Correspondencia entre las unidades de aprendizaje de los Estándares, los DBA y los aspectos del concepto de parábola, para décimo y undécimo

Finalmente, la Red 3 evidencia que en los grados décimo y undécimo se hace explícito el concepto de parábola como lugar geométrico tanto en los estándares como en los DBA, lo cual responde a la necesidad de que este aprendizaje se dé antes de pasar a la formación universitaria. También se resalta como evidencia mediante las redes 1 y 2, que el estudiante tiene los conceptos básicos para llegar a una definición formal del concepto de parábola como lugar geométrico. De la Red 3 salen cuatro unidades fundamentales: *secciones cónicas, coordenadas polares y cartesianas, la recta real y el concepto de función*.

Las redes 1, 2 y 3 explicitan que aunque no aparece de forma explícita la parábola como lugar geométrico, los temas tratados le permiten al estudiante de décimo o undécimo llegar a su construcción como lugar geométrico y dar una definición formal de la misma.

En la Tabla 12Tabla 10 se ratifica la articulación de los EBCM y los DBA, lo cual permitió identificar las unidades de aprendizaje que se relacionan directa e indirectamente con el concepto de parábola como lugar geométrico, según el grupo de grado. En ella, por lo tanto, se presenta el estándar, el DBA y la unidad de aprendizaje correspondientes y se resalta la relación con el concepto de parábola como lugar geométrico.

REPOSITORIO

Tabla 10. Unidades de aprendizaje de los Estándares, los DBA y los aspectos del concepto de parábola de sexto a undécimo grado

Nivel según grado	Código Ref	Estándar	DBA	Unidades de aprendizaje	Relación con el concepto de parábola como lugar geométrico
Grado sexto y séptimo I	I-1	Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.	Utiliza y explica diferentes estrategias (desarrollo de la forma o plantillas) e instrumentos (regla, compás o software) para la construcción de figuras planas y cuerpos.	Construcción de Polígonos regulares	Construcción de figuras planas
	I-2	Resuelvo y formulo problemas que requieren técnicas de estimación	Propone y desarrolla estrategias de estimación medición y cálculo de diferentes cantidades (ángulos, longitudes, áreas, volúmenes, etc.) para resolver problemas	Estimaciones.	Medición de ángulos y longitudes
	I-3	Represento objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.	Representa y construye formas bidimensionales y tridimensionales con el apoyo en instrumentos de medida apropiados.	Construcción y representación bidimensional de solidos	Representación de objetos y figuras bidimensionales.
	I-4	Identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.	Reconoce el plano cartesiano como un sistema bidimensional que permite ubicar puntos como sistema de referencia gráfico o geográfico.	Sistema de coordenadas cartesianas.	Ubicación de puntos como un sistema de referencia.
	I-5	Resuelvo y formulo problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas).	Utiliza escalas apropiadas para representar e interpretar planos, mapas y maquetas con diferentes unidades.	Área de figuras compuestas.	Representación e interpretación de puntos en el plano.
	I-6	Identifico las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.	Representa en el plano cartesiano la variación de magnitudes (áreas y perímetro) y con base en la variación explica el comportamiento de situaciones y fenómenos de la vida diaria	Área de figuras planas	Explicación de características de gráficas.

Nivel según grado	Código Ref	Estándar	DBA	Unidades de aprendizaje	Relación con el concepto de parábola como lugar geométrico
Grado octavo y Noveno. II	II-1	Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.	Identifica regularidades y argumenta propiedades de figuras geométricas a partir de teoremas y las aplica en situaciones reales.	Criterios de congruencia de triángulos	Verificar propiedades de figuras.
	II-2	Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.	Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación	Función cuadrática representación gráfica.	Identificar propiedades en una gráfica.
	II-3	Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Thales).	Utiliza teoremas, propiedades y relaciones geométricas (teorema de Thales y el teorema de Pitágoras) para proponer y justificar estrategias de medición y cálculo de longitudes.	Teorema de Thales	Comprender propiedades geométricas
	II-4	Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas	Conjetura acerca de las regularidades de las formas bidimensionales y tridimensionales y realiza inferencias a partir de los criterios de semejanza, congruencia y teoremas básicos.	Criterios de semejanza de triángulos	Inferir regularidades de figuras.
	II-5	Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados	Interpreta el espacio de forma analítica a partir de relaciones geométricas que se establecen en las trayectorias y desplazamientos de los cuerpos en diferentes situaciones.	Medición de ángulos en una relación geométrica. Trayectorias y desplazamientos.	Medir de ángulos en una relación geométrica.

Nivel según grado	Código Ref	Estándar	DBA	Unidades de aprendizaje	Relación con el concepto de parábola como lugar geométrico
	II-6	Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.	Utiliza expresiones numéricas, algebraicas o gráficas para hacer descripciones de situaciones concretas y tomar decisiones con base en su interpretación.	Posiciones de una recta y una circunferencia.	Describe representaciones geométricas.
Grado Décimo y Undécimo. III	III-1	Reconozco y describo curvas y o lugares geométricos.	Explora y describe las propiedades de los lugares geométricos y de sus transformaciones a partir de diferentes representaciones	Secciones cónicas	Describe lugares geométricos.
	III-2	Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas.	Resuelve problemas mediante el uso de las propiedades de las funciones y usa representaciones tabulares, gráficas y algebraicas para estudiar la variación, la tendencia numérica y las razones de cambio entre magnitudes.	Coordenadas polares y cartesianas	Identifica las propiedades de objetos geométricos.
	III-3	Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos.	Interpreta y diseña técnicas para hacer mediciones con niveles crecientes de precisión (uso de diferentes instrumentos para la misma medición, revisión de escalas y rangos de medida, estimaciones, verificaciones a través de mediciones indirectas).	La recta real.	Resuelve situaciones de medición.
	III-4	Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.	Modela objetos geométricos en diversos sistemas de coordenadas (cartesiano, polar, esférico) y realiza comparaciones y toma decisiones con respecto a los modelos.	Concepto de función	Conoce diversos sistemas de coordenadas.

Fuente: Elaboración propia, basada en las redes generadas por ATLAS.

La tabla anterior evidencia que los DBA y los estándares no están sueltos, sino que se complementan el uno con el otro ya que entretejen una ruta de aprendizajes conducentes a la formación del concepto de parábola, empleando diferentes recursos matemáticos.

4.1.2 Análisis de los objetos matemáticos contenidos en las unidades de aprendizaje, en función del concepto de parábola y los tipos de pensamiento.

Para desarrollar el segundo objetivo específico, se analizaron las unidades de aprendizaje de grado sexto a undécimo, en función de los distintos tipos de pensamiento. Como resultado, se evidenció que cuatro de los cinco tipos de pensamientos matemáticos, son necesarios para la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico: pensamiento métrico y sistemas de medidas, pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, pensamiento numérico y sistemas numéricos, y el pensamiento espacial y sistemas geométricos. De acuerdo a esto, se establecieron las siguientes categorías mostradas en la Tabla 11.

Tabla 11. Categorías asociadas al concepto de parábola según el tipo de pensamiento

Código	Categoría	Frec
Pensamiento	Pensamiento métrico y sistemas de medidas	1
	Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.	1
	Pensamiento numérico y sistemas numéricos	1
	Pensamiento espacial y sistemas geométricos	1
Unidades de aprendizaje	Construcción de Polígonos regulares	1
	Función cuadrática representación gráfica.	1
	Trayectorias y desplazamientos.	1
	Posiciones de una recta y una circunferencia.	1
	Secciones cónicas	1
Total, categorías		9

Fuente: Elaboración propia. Basada en los DBA (MEN, 2016) y EBCM (MEN, 2006)

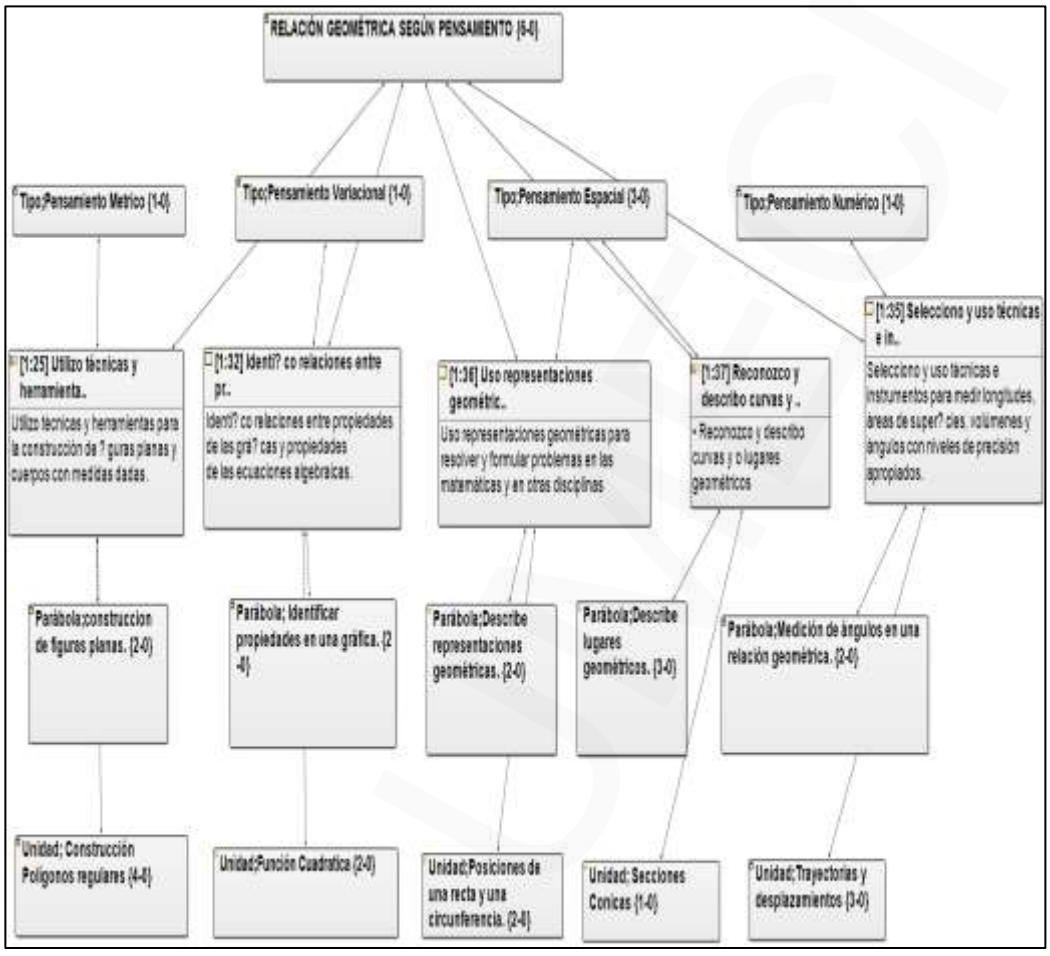
Al aplicar el software ATLAS.ti se generó la Red 4 (véase la Figura 24) que muestra la correspondencia entre los distintos tipos de pensamiento, las unidades de aprendizaje de los Estándares y los aspectos del concepto de parábola. A continuación, se muestran detalles de la estructura de la Red 4:

En la primera fila, los cuatro tipos de pensamiento necesarios para llegar a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico. En primer lugar, el **pensamiento espacial y sistemas geométricos** desde el cual el estudiante comprende conceptos básicos de la geometría euclidiana y las construcciones basadas en solo regla y compás. Por otra parte, **el pensamiento métrico y sistemas de medidas** permite llegar al razonamiento y la comprensión de las diversas relaciones entre los elementos magnitudes y cantidades, necesarias para su construcción. En tercer lugar, en **el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos** se da la identificación mental o relación entre los elementos de la parábola. Finalmente, **el pensamiento numérico y sistemas numéricos** ayuda a que el estudiante avance hacia la construcción de las relaciones que existen entre los números asociados a las rectas, puntos, ángulos y toda la parte numérica necesaria para llegar a la comprensión y construcción de la parábola como lugar geométrico.

En la segunda fila, aparecen los estándares asociados a cada tipo de pensamiento; sólo aquellos que se consideraron necesarios y fundamentales para llegar a la compresión de objeto matemático de esta investigación.

En la tercera fila se muestra la relación de los tipos de pensamiento con el concepto de parábola y, finalmente, tenemos las unidades de aprendizaje asociadas a cada estándar y pensamiento.

PREPRINT



Fuente: Elaboración propia. Basada en los EBCM (MEN, 2006)

Figura 24. Red 4: Correspondencia entre los distintos tipos de pensamiento, las unidades de aprendizaje de los Estándares, y los aspectos del concepto de parábola

Como resultado de la construcción de la Red 4, se articuló cada una de las unidades de aprendizaje relacionadas con cada tipo de pensamiento para así, mostrar la correlación existente con los EBCM, y su relación con el concepto matemático de una forma más explícita en los grados décimo y undécimo, como se puede ver a continuación en la Tabla 12.

Tabla 12. EBCM relacionados con las unidades de aprendizaje, los tipos de pensamiento y el concepto matemático

Estándar	Unidades de aprendizaje	Relación con el concepto de parábola como lugar geométrico	Tipo de Pensamiento
Utilizar técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.	Construcción de Polígonos regulares	Construcción de figuras planas	Pensamiento métrico y sistemas de medidas
Identificar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.	Función cuadrática representación gráfica.	Identificación de propiedades en una gráfica.	Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.
Seleccionar y usar técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados	Trayectorias y desplazamientos.	Medición de ángulos en una relación geométrica.	Pensamiento numérico y sistemas numéricos
Usar representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.	Posiciones de una recta y una circunferencia.	Descripción y representaciones geométricas.	Pensamiento espacial y sistemas geométricos
Reconocer y describir curvas y o lugares geométricos.	Secciones cónicas	Descripción de lugares geométricos.	Pensamiento espacial y sistemas geométricos

Fuente: Elaboración propia, basada en los EBCM (MEN, 2006)

Como se ha mencionado, los EBCM no presentan de forma explícita, en ninguna unidad, la construcción del concepto de parábola como lugar geométrico, como tampoco aparece en ninguno de los tipos de pensamiento. No obstante, la Tabla 4 señala que, a lo largo de su formación escolar, los estudiantes van desarrollando los contenidos necesarios para llegar a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, específicamente con la unidad de Secciones Cónicas, que se encuentra asociada al pensamiento espacial y sistemas geométricos, y se relaciona directamente con la parábola al describir lugares geométricos,

4.1.3 Análisis de los objetos matemáticos contenidos en las unidades de aprendizaje seleccionadas, según los niveles de razonamiento del modelo de van Hiele

Para alcanzar el tercer objetivo específico, el cual consistió en analizar los objetos matemáticos contenidos en las unidades de aprendizaje seleccionadas en términos de los niveles del razonamiento del modelo de van Hiele, se establecieron las siguientes categorías*:* Nivel de razonamiento según el modelo de van Hiele, Objetos matemáticos asociados a cada nivel de razonamiento y Unidades de aprendizaje definitivas; esto se refleja en la Tabla 13.

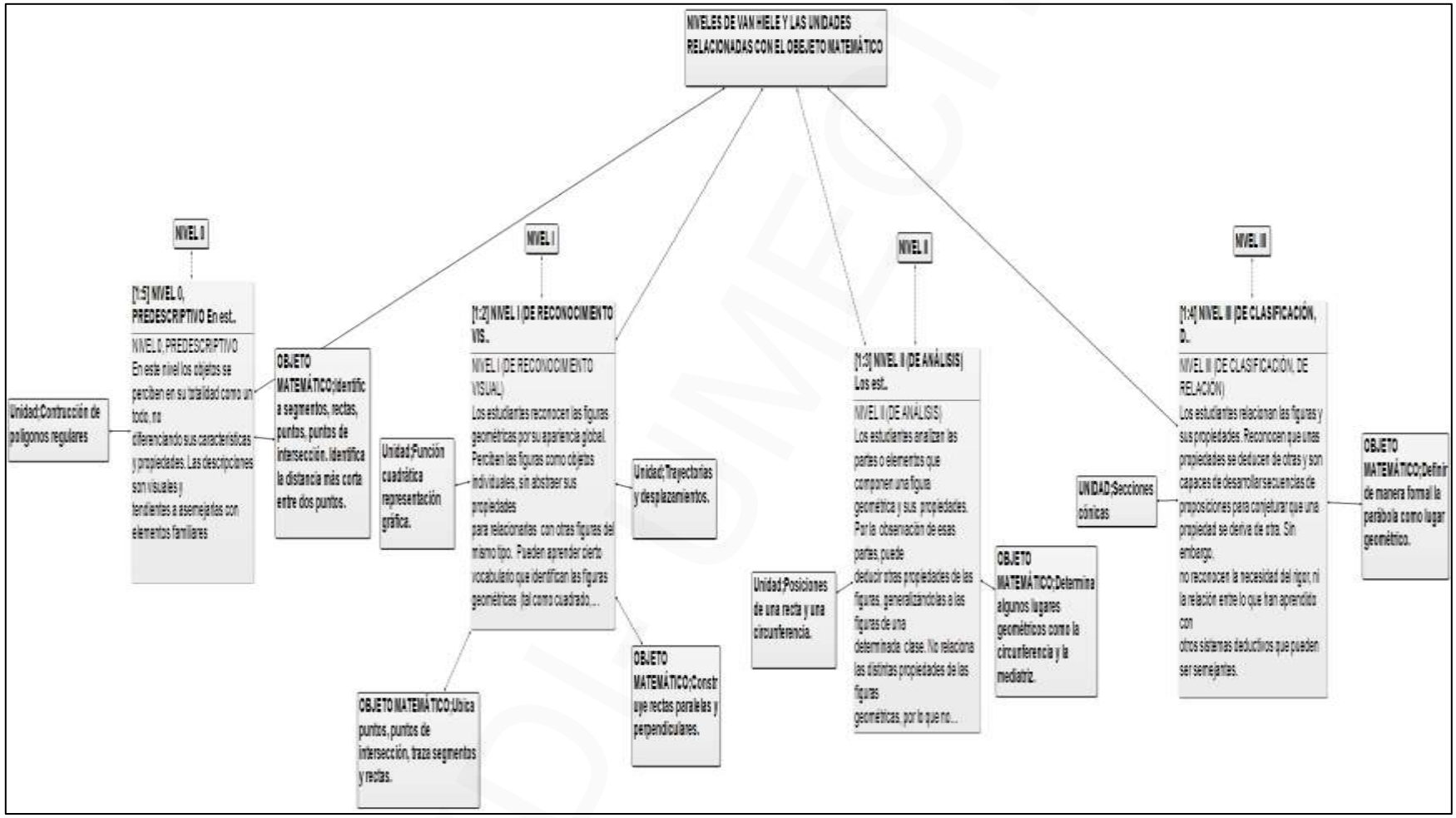
Tabla 13. Categorías asociadas a los niveles de razonamiento de van Hiele

Código	Categoría	Frec
Nivel Según modelo van Hiele	**0, predescriptivo**.	1
	I, de reconocimiento visual.	1
	II, de análisis	1
	III, de clasificación o de relaciones	1
Objeto matemático asociado	Identifica segmentos, rectas, puntos, puntos de intersección. Identifica la distancia más corta entre dos puntos.	1
	Ubica puntos, puntos de intersección. Traza segmentos y rectas.	1
	Construye rectas paralelas y perpendiculares.	1
	Define de manera formal la parábola como lugar geométrico.	1
	Determina algunos lugares geométricos como la circunferencia y la mediatriz.	1
Unidad de Aprendizaje	Construcción de Polígonos regulares	1
	Función cuadrática representación gráfica.	1
	Trayectorias y desplazamientos.	1
	Posiciones de una recta y una circunferencia.	1
	Secciones cónicas	1
Total categorías		14

Fuente: Elaboración propia basada en los EBCM (MEN, 2006) y los niveles de razonamiento del modelo de van Hiele.

A partir de la tabla anterior y mediante el uso del software ATLAS.ti se construyó la red conceptual 5 (Figura 25), la cual muestra de forma gráfica la relación entre las unidades de aprendizaje asociadas a los EBCM, los niveles de razonamiento del modelo de van Hiele y el concepto de parábola como lugar geométrico.

REPOSITORIO



Fuente: Elaboración propia; basada en los EBCM (MEN, 2006) y los Niveles de razonamiento del modelo de van Hiele

Figura 25. Red 5: Unidades de aprendizaje asociadas a los niveles de razonamiento del modelo van Hiele en relación con el objeto matemático

.

La Red 5 facilitó establecer la relación entre las unidades de aprendizaje asociadas a los niveles de razonamiento según el modelo de van Hiele, con el objeto matemático de nuestro interés (véase la Tabla 14 en la cual se relaciona, en la primera columna, el nivel de razonamiento del modelo de van Hiele. En la segunda columna se muestran los objetos matemáticos necesarios para la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, y en la tercera columna, las unidades de aprendizaje asociadas a los EBCM).

Tabla 14. Unidades de aprendizaje asociadas a los niveles de razonamiento según el modelo de van Hiele en relación con el objeto matemático

Niveles de razonamiento de van Hile	Objeto matemático asociado	Unidades de aprendizaje
Nivel 0: Predescriptivo Los estudiantes perciben las figuras geométricas como una totalidad, limitándose a describir su aspecto físico; pueden establecer afinidad con otros objetos de la vida cotidiana y, por lo general, no reconocen las partes de las que están compuestas, ni sus propiedades matemáticas.	Identifica segmentos, rectas, puntos, puntos de intersección. Identifica la distancia más corta entre dos puntos.	Construcción de Polígonos regulares
Nivel I: De reconocimiento visual Los estudiantes reconocen las figuras geométricas por su apariencia global y su semejanza con otros objetos que no necesariamente son figuras geométricas, ni del tipo de las que están describiendo. Identifican la forma de la figura o la propia figura como un todo, sin distinguir partes.	Ubica puntos, puntos de intersección. Traza segmentos y rectas. Construye rectas paralelas y perpendiculares. Halla la distancia más corta entre un punto y una recta.	Función cuadrática representación gráfica. Trayectorias y desplazamientos.
Nivel II: De análisis Los estudiantes pueden establecer relaciones entre las propiedades que tiene una figura, aunque no relacionan las distintas propiedades de las figuras geométricas, en consecuencia, no pueden hacer clasificaciones de esas figuras basándose en sus propiedades, las deducciones y extensión de propiedades tienen un carácter informal.	Determina algunos lugares geométricos como la circunferencia y la mediatriz.	Posiciones de una recta y una circunferencia.
Nivel III: De clasificación o de relación Los estudiantes emplean propiedades que tiene una figura para deducir otras, a través el razonamiento formal, son capaces de desarrollar secuencias de proposiciones para conjeturar que una propiedad se deriva de otra.	Define de manera formal la parábola como lugar geométrico.	Secciones cónicas

Fuente: Elaboración propia, basada en los Niveles de razonamiento del modelo de van Hiele y los EBCM (MEN, 2006)

4.2. Procesamiento de los datos

4.2.1 Descriptores de nivel de razonamiento del concepto de parábola como lugar geométrico, según el modelo van Hiele

Para alcanzar el objetivo específico “formular los descriptores necesarios para caracterizar el nivel de razonamiento del concepto de parábola como lugar geométrico”, con base en el modelo van Hiele, se analizaron (1) los niveles de razonamiento del modelo de van Hiele, (2) los EBCM, específicamente las unidades de aprendizaje asociadas con el concepto de parábola como lugar geométrico y su construcción, (3) los cuatro tipos de pensamientos necesarios y fundamentales para la adquisición de la comprensión del objeto matemático de esta investigación, y (4) los descriptores de nivel asociados. Estos fueron los cuatro pilares para crear las 29 categorías asociadas al concepto de parábola como lugar geométrico de acuerdo al modelo de van Hiele, los cuales se muestran en la Tabla 15, 4 para los niveles de razonamiento, 5 para las unidades de aprendizaje, 4 para los distintos pensamientos y 16 para los descriptores de nivel.

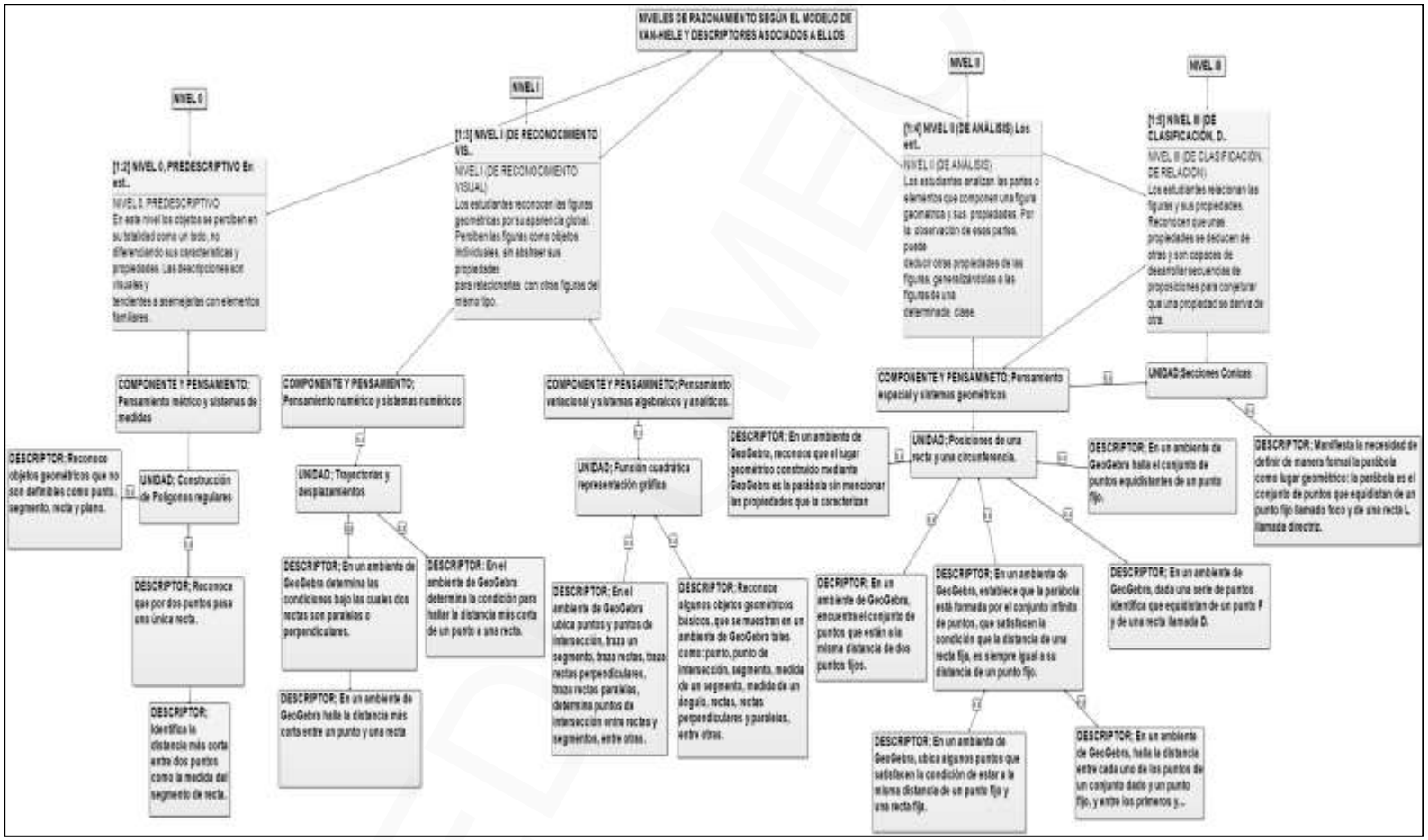
Tabla 15. Categorías asociadas al concepto de parábola como lugar geométrico de acuerdo al modelo de van Hiele y los descriptores asociados.

Código	Categoría	Frecuencia
Nivel de razonamiento Modelo de van Hiele	0, predescriptivo.	1
	I, de reconocimiento visual.	1
	II, de análisis	1
	III, de clasificación o de relaciones	1
Unidad de Aprendizaje	Construcción de Polígonos regulares	1
	Función cuadrática representación gráfica.	1
	Trayectorias y desplazamientos.	1
	Posiciones de una recta y una circunferencia.	1
	Secciones cónicas	1
Pensamiento	Pensamiento métrico y sistemas de medidas	1
	Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.	1
	Pensamiento numérico y sistemas numéricos	1
	Pensamiento espacial y sistemas geométricos	1
Descriptores de Nivel	**DN 0.1 Reconoce** objetos geométricos que no son definibles como punto, segmento, recta y plano.	1

Código	Categoría	Frecuencia
	DN 0.2 Reconoce que por dos puntos pasa una única recta.	1
	DN 0.3 Identifica la distancia más corta entre dos puntos como la medida del segmento de recta.	1
	DN I.1 Reconoce algunos objetos geométricos básicos, que se muestran en un ambiente de GeoGebra tales como: punto, punto de intersección, segmento, medida de un segmento, medida de un ángulo, rectas, rectas perpendiculares y paralelas, entre otras.	1
	DN I.2 En el ambiente de GeoGebra, **ubica** puntos y puntos de intersección, traza un segmento, traza rectas, traza rectas perpendiculares, traza rectas paralelas, determina puntos de intersección entre rectas y segmentos, entre otras.	1
	DN I.3 En el ambiente de GeoGebra, determina la condición para hallar la distancia más corta de un punto a una recta.	1
	DN I.4 En un ambiente de GeoGebra, halla la distancia más corta entre un punto y una recta	1
	DN I.5 En un ambiente de GeoGebra, determina las condiciones bajo las cuales dos rectas son paralelas o perpendiculares	1
	DN II.1 En un ambiente de GeoGebra, halla la distancia entre cada uno de los puntos de un conjunto dado y un punto fijo, y entre los primeros y una recta fija.	1
	DN II.2 En un ambiente de GeoGebra halla el conjunto de puntos equidistantes de un punto fijo.	1
	DN II.3 En un ambiente de GeoGebra, encuentra el conjunto de puntos que están a la misma distancia de dos puntos fijos.	1
	DN II.4 En un ambiente de GeoGebra, dada una serie de puntos identifica que equidistan de un punto F y de una recta llamada D.	1
	DN II.5 En un ambiente de GeoGebra, ubica algunos puntos que satisfacen la condición de estar a la misma distancia de un punto fijo y una recta fija.	1
	DN II.6 En un ambiente de GeoGebra, reconoce que el lugar geométrico construido mediante GeoGebra es la parábola sin mencionar las propiedades que la caracterizan	1
	DN II.7 En un ambiente de GeoGebra, establece que la parábola está formada por el conjunto infinito de puntos, que satisfacen la condición que la distancia de una recta fija, es siempre igual a su distancia de un punto fijo.	1
	DN III.1 Manifiesta la necesidad de definir de manera formal la parábola como lugar geométrico: la parábola es el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta L llamada directriz.	1
Total		29

Fuente: Elaboración propia según los Niveles de razonamiento de van Hiele y en los EBCM (MEN, 2006)

Nuevamente, empleando la Tabla 15 y el programa ATLAS.ti, se generó la Red 6 en la cual se concatenan los niveles de razonamiento del modelo de van Hiele y las unidades de aprendizaje asociadas a cada nivel, según el componente y los descriptores asociados, como se observa en la Figura 26.



Fuente: Elaboración propia. Basada en los Niveles de razonamiento del modelo de van Hiele y los EBCM (MEN, 2006)

Figura 26. Red 6: Niveles de razonamiento según modelo de van Hiele y los descriptores asociados a ellos.

A continuación, en la Tabla 16, se muestran los descriptores asociados a la relación entre cada nivel de razonamiento (Predescriptivo, Reconocimiento visual, Análisis y Clasificación), con su respectivo pensamiento matemático (espacial, métrico, variacional y numérico) y su correspondiente unidad de aprendizaje:

Tabla 16. Descriptores asociados a cada nivel de razonamiento

Niveles de razonamiento de van Hile	Unidades de aprendizaje	Componente y pensamiento	Descriptores de van Hiele asociados
Nivel 0: Predescriptivo Los estudiantes perciben las figuras geométricas como una totalidad, limitándose a describir su aspecto físico; pueden establecer afinidad con otros objetos de la vida cotidiana y, por lo general, no reconocen las partes de las que están compuestas, ni sus propiedades matemáticas.	Construcción de Polígonos regulares	Pensamiento métrico y sistemas de medidas	•**DN 0.1 Reconoce** objetos geométricos que no son definibles como punto, segmento, recta y plano. •**DN 0.2 Reconoce** que por dos puntos pasa una única recta. •**DN 0.3 Identifica** la distancia más corta entre dos puntos como la medida del segmento de recta.
Nivel I: De reconocimiento visual. Los estudiantes reconocen las figuras geométricas por su apariencia global y su semejanza con otros objetos que no necesariamente son figuras geométricas, ni del tipo de las que están describiendo. Identifican la forma de la figura o la propia figura como un todo, sin distinguir partes.	Función cuadrática representación gráfica.	Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.	**DN I.1 Reconoce** algunos objetos geométricos básicos, que se muestran en un ambiente de GeoGebra tales como: punto, punto de intersección, segmento, medida de un segmento, medida de un ángulo, rectas, rectas perpendiculares y paralelas, entre otras. **DN I.2** En el ambiente de GeoGebra **ubica** puntos y puntos de intersección, traza un segmento, traza rectas, traza rectas perpendiculares, traza rectas paralelas, determina puntos de intersección entre rectas y segmentos, entre otras.
	Trayectorias y desplazamientos.	Pensamiento numérico y sistemas numéricos	**DN I.3** En el ambiente de GeoGebra determina la condición para hallar la distancia más corta de un punto a una recta. **DN I.4** En un ambiente de GeoGebra halla la distancia más corta entre un punto y una recta

REDI-UIS

Niveles de razonamiento de van Hile	Unidades de aprendizaje	Componente y pensamiento	Descriptores de van Hiele asociados
			DN I.5 En un ambiente de GeoGebra determina las condiciones bajo las cuales dos rectas son paralelas o perpendiculares.
Nivel II: De análisis Los estudiantes pueden establecer relaciones entre las propiedades que tiene una figura, aunque no relacionan las distintas propiedades de las figuras geométricas, en consecuencia, no pueden hacer clasificaciones de esas figuras basándose en sus propiedades, las deducciones y extensión de propiedades tienen un carácter informal.	Posiciones de una recta y una circunferencia.	Pensamiento espacial y sistemas geométricos	**DN II.1 E**n un ambiente de GeoGebra, halla la distancia entre cada uno de los puntos de un conjunto dado y un punto fijo, y entre los primeros y una recta fija. **DN II.2 E**n un ambiente de GeoGebra halla el conjunto de puntos equidistantes de un punto fijo. **DN II.3 E**n un ambiente de GeoGebra, encuentra el conjunto de puntos que están a la misma distancia de dos puntos fijos. **DN II.4 E**n un ambiente de GeoGebra, dada una serie de puntos identifica que equidistan de un punto F y de una recta llamada D. **DN II.5 E**n un ambiente de GeoGebra, ubica algunos puntos que satisfacen la condición de estar a la misma distancia de un punto fijo y una recta fija. **DN II.6 E**n un ambiente de GeoGebra, reconoce que el lugar geométrico construido mediante GeoGebra es la parábola sin mencionar las propiedades que la caracterizan **DN II.7 E**n un ambiente de GeoGebra, establece que la parábola está formada por el conjunto infinito de puntos, que satisfacen la condición que la distancia de una recta fija, es siempre igual a su distancia de un punto fijo.
Nivel III: De clasificación o de relación. Los estudiantes emplean propiedades que tiene una figura para deducir otras, a	Secciones cónicas	Pensamiento espacial y sistemas geométricos	**DN III.1** Manifiesta la necesidad de definir de manera formal la parábola como lugar geométrico: la parábola es el conjunto de puntos que

Niveles de razonamiento de van Hile	Unidades de aprendizaje	Componente y pensamiento	Descriptores de van Hiele asociados
través del razonamiento formal, son capaces de desarrollar secuencias de proposiciones para conjeturar que una propiedad se deriva de otra.			equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta L llamada directriz.

Fuente: Elaboración propia según los Niveles de razonamiento de van Hiele y en los EBCM (MEN, 2006)

Dado que el trabajo se alcanza mediante la descomposición de las variables implicadas, el proceso de operacionalización se logra cuando se descomponen estas variables en dimensiones y, estas a su vez, son convertidas en indicadores que van a permitir un análisis espontáneo y la elaboración de los instrumentos de medida, convirtiendo los indicadores en preguntas o elementos de observación. La operacionalización de las variables es esencial porque a través de ellas se precisan los aspectos y elementos que se quieren cuantificar, conocer y registrar con el fin de obtener algunas conclusiones.

En esta investigación, el evento de estudio es la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, el cual se define como el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta L llamada directriz. Las dimensiones que contempla la operacionalización, son aspectos que van a caracterizar la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico y que se encuentran estrechamente ligados a los cuatro primeros niveles de razonamiento del modelo de van Hiele: Predescriptivo, Reconocimiento visual, Análisis y de Clasificación.

A continuación, en la Tabla 17, se presenta la versión inicial de la operacionalización del evento *comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico*, también la descripción de cada una de las respectivas dimensiones que en esta investigación serán representadas por los niveles de razonamiento que contempla el modelo de van Hiele y, de acuerdo con ellas, se enuncian los descriptores de nivel así como también se muestran las posibles preguntas que se asocian a cada dimensión..

Tabla 17. Operacionalización de constructo comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico

Evento de estudio	Dimensiones	Descriptores de nivel	Indicios	preguntas	Instrumento
La comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, que consiste en un punto que se mueve en un plano, de tal manera que su distancia de una recta fija situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano que no pertenece a la recta	**Predescriptivo:** Es el conjunto de saberes previos que necesita el estudiante para llegar a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico.	Reconoce objetos geométricos que no son definibles.	Identifica objetos no definibles como punto o punto de intersección.	1a – 1b – 1c 2	Entrevista de carácter socrático para describir la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico.
		Reconoce que por dos puntos pasa una única recta.	Traza la recta por dos puntos dados.	7 – 9 - 10	
		Identifica la distancia más corta entre dos puntos como la medida del segmento de recta.	Grafica la distancia más corta entre dos puntos.	9 -11	
		Reconoce algunos objetos geométricos básicos, en un ambiente de GeoGebra tales como: punto, punto de intersección, segmento, medida de un segmento, medida de un ángulo, rectas, rectas perpendiculares y paralelas, entre otras.	En un ambiente de GeoGebra reconoce objetos geométricos no definibles.	2 – 3 -4a – 4b – 4c	
	Reconocimiento visual. Construye y visualiza, en un ambiente de GeoGebra, puntos, rectas, rectas paralelas, rectas perpendiculares, entre otras.	En el ambiente de GeoGebra, ubica puntos y puntos de intersección, traza un segmento, traza rectas, traza rectas perpendiculares, traza rectas paralelas, determina puntos de intersección entre rectas y segmentos, entre otras.	Representa puntos, puntos de intersección en GeoGebra	8 – 15	
		En el ambiente de GeoGebra, determina la condición para hallar la distancia más corta de un punto a una recta	Utilizando GeoGebra halla la distancia más corta entre dos puntos.	11 – 19	

REPOSITORIO

Evento de estudio	Dimensiones	Descriptores de nivel	Indicios	preguntas	Instrumento
		En un ambiente de GeoGebra, halla la distancia más corta entre un punto y una recta.	Utilizando GeoGebra halla la distancia más corta entre un punto y una recta	19 -21	
		En un ambiente de GeoGebra, determina las condiciones bajo las cuales dos rectas son paralelas o perpendiculares	Identifica cuando dos rectas son paralelas, perpendiculares o secantes.	14 – 15 – 16 - 28	
		En un ambiente de GeoGebra, halla la distancia entre cada uno de los puntos de un conjunto dado y un punto fijo, y entre los primeros y una recta fija.	Calcula la distancia más corta entre un punto fijo y un segmento o recta.	13 - 22	Entrevista de carácter socrático para describir la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico
	Análisis En este nivel, el estudiante determina algunos puntos que satisfacen condiciones de lugar geométrico como la mediatriz y la circunferencia, y con base en estos, determina puntos que satisfacen la condición de estar a la misma distancia de un punto fijo llamado F y de una recta fija llamada D.	En un ambiente de GeoGebra halla el conjunto de puntos equidistantes de un punto fijo.	Halla puntos equidistantes a un punto fijo utilizando el software de geometría dinámica GeoGebra.	21 - 23 - 25	
		En un ambiente de GeoGebra, encuentra el conjunto de puntos que están a la misma distancia de dos puntos fijos.	Evalúa si un punto cumple las condiciones para pertenecer a la mediatriz de un segmento.	10 - 26 - 27	
		En un ambiente de GeoGebra, dada una serie de puntos identifica que equidistan de un punto F y de una recta llamada D.	Dado un conjunto de puntos identifica cuáles de ellos equidistan de un punto F y de una recta llamada D.	17 - 27	
		En un ambiente de GeoGebra, ubica algunos puntos que satisfacen la condición de estar a	Ubica puntos que equidistan de un	24 - 16	

Evento de estudio	Dimensiones	Descriptores de nivel	Indicios	preguntas	Instrumento
		la misma distancia de un punto fijo y una recta fija.	punto F y de una recta llamada D..		
		En un ambiente de GeoGebra, reconoce que el lugar geométrico construido mediante GeoGebra es la parábola sin mencionar las propiedades que la caracterizan.	Identifica un conjunto de puntos que pueden satisfacer la condición de pertenecer a la parábola. .	25 – 29	
		En un ambiente de GeoGebra, establece que la parábola está formada por el conjunto infinito de puntos, que satisfacen la condición que la distancia de una recta fija, es siempre igual a su distancia de un punto fijo.	Identifica la propiedad que cumple un conjunto de puntos dado, y los relaciona con la parábola como lugar geométrico.	27 – 12 – 30	
	Clasificación En este nivel, el estudiante determina la condición que debe cumplir un conjunto de puntos para pertenecer a la parábola, además, es capaz de llegar a una definición de la misma como lugar geométrico.	Manifiesta la necesidad de definir de manera formal la parábola como lugar geométrico: la parábola es el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta L llamada directriz.	Construye la parábola a partir de la definición formal como el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta L llamada directriz.	32 – 23 - 18	

Fuente: Elaboración propia según los Niveles de razonamiento de van Hiele y los EBCM (MEN, 2006)

REDIMUNIT

4.2.2 Diseño de la versión inicial de la entrevista socrática, que permitirá describir la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, por parte de los estudiantes, en función del modelo de van Hiele.

La entrevista socrática se diseñó a partir de los descriptores construidos sobre el concepto de parábola como lugar geométrico, como fruto del trabajo realizado con el software Atlas.ti y la matriz asociada. Se procedió a diseñar el guion preliminar de la entrevista semiestructurada de carácter socrático mediada por el software de geometría dinámica GeoGebra. En este proceso de construcción de la entrevista se buscó que la misma no sólo fuera una herramienta para que el investigador observe la evolución del razonamiento de los estudiantes, sino que, al mismo tiempo, sirviera para favorecer el aprendizaje de los estudiantes, de forma que les permitiera avanzar en su nivel de razonamiento. Además, se pretendía que las preguntas estimularan el pensamiento crítico con apoyo de las construcciones realizadas en el software, para que el estudiante elaborare su propia definición de los conceptos matemáticos.

El guion de la entrevista pasó por un proceso de refinamiento, basado, en primera instancia, en la experiencia del investigador y, posteriormente, en la asesoría de varios profesores expertos en el tema. Asimismo, en ella se incorporaron los aportes de diversos investigadores en el área como ganancia de la presentación de los avances de la investigación en diversos congresos internacionales (RELME 32, Reunión Latinoamericana de matemática Educativa, Medellín, 2018; V Congreso Internacional de Investigación y Pedagogía, Tunja, 2019; XV CIAEM, Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Medellín 2019; X CIEM, Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas, Lima, 2020).

En la versión inicial de la entrevista se plantearon 42 preguntas generales enmarcados en los cuatro primeros niveles de razonamiento, según contempla el modelo de van Hiele, desglosadas de la siguiente manera: 11 preguntas en el nivel pre-

descriptivo, 10 preguntas en nivel de reconocimiento visual, 9 preguntas en el nivel de análisis y 12 preguntas en el nivel de clasificación.

Posteriormente, se hizo una segunda revisión y la versión preliminar de la entrevista quedó con 36 preguntas generales enmarcadas en los cuatro primeros niveles de razonamiento, desglosadas de la siguiente manera: 9 preguntas en el nivel pre-descriptivo, 10 preguntas en nivel de reconocimiento visual, 9 preguntas en el nivel de análisis y 8 preguntas en el nivel de clasificación.

En correspondencia con lo anterior, las construcciones o figuras planteadas en la entrevista se dividieron en cuatro bloques de preguntas, de acuerdo a los cuatro primeros niveles de razonamiento propuestos en el modelo de van Hiele. Además, las construcciones realizadas fueron creadas para que fuese aumentado el nivel de razonamiento.

Cada una de las construcciones realizadas en *GeoGebra* se organizaron de manera gradual y desde preguntas sencillas a unas más complejas, y cada una de ellas diseñada de acuerdo a los niveles de razonamiento; las preguntas se diseñaron de tal manera que indujeran al entrevistado a razonar de forma progresiva en la medida que se pasaba de un nivel a otro. Estas características de la entrevista permiten ubicar a un estudiante en uno de esos niveles.

Para catalogar las respuestas de los estudiantes, inicialmente se procedió con una escala de codificación de 1 a 5, donde el puntaje más bajo era para aquellas respuestas muy superficiales o erróneas a la pregunta y para aquellos que no dieron respuesta alguna a la pregunta; 5, a las respuestas que estaban correctas o muy bien elaboradas y argumentadas. Cabe destacar que esta escala de valoración fue evolucionando y pasó por varias escalas, hasta llegar a la más apropiada para la investigación.

La entrevista se aplicó mediante la plataforma GeoGebra Classroom, la cual presenta las siguientes características:

- Se puede asignar tareas interactivas a los estudiantes y monitorear su progreso en tiempo real.

- Es una plataforma virtual con la cual se asignan tareas interactivas y atractivas para estudiantes.

- Se puede apreciar el progreso actualizado en vivo de los estudiantes que trabajan en una tarea específica.

- Se puede ver qué tareas han comenzado (o no) los estudiantes.

- Se pueden hacer preguntas a toda la clase y ver todas las respuestas de los estudiantes al instante.

- Se puede ocultar los nombres de los estudiantes al mostrar las respuestas de los estudiantes a las preguntas de las tareas.

- Facilita las discusiones enriquecedoras e interactivas entre todos los estudiantes, grupos de estudiantes y de forma individual.

Estas características resultan muy pertinentes para la interacción que corresponde al proceso de enseñanza que se quiere alcanzar en esta investigación.

4.2.3 Análisis de la entrevista socrática diseñada, en términos de los criterios de validez y confiabilidad

Según López et al. (2017) todo instrumento de medición debe cumplir con los requisitos esenciales de validez y confiabilidad. La validez implica que el instrumento mide realmente el evento que pretende medir, y la confiabilidad reflejan la manera en que el instrumento arroja mediciones precisas y estables en el tiempo (Hurtado, 2012). A continuación, se describen los procedimientos realizados para estimar la validez y la confiabilidad de la entrevista socrática dinámica inicial, diseñada en esta investigación.

PREPRINT

4.2.3.1 Análisis de la entrevista socrática en términos de su validez

Un instrumento tiene validez de constructo cuando sus preguntas se corresponden con sus sinergias, y los indicios que se derivan del concepto del evento que se pretende medir (Hurtado, 2012, p. 791). En el caso de este instrumento, se estimó la validez de constructo mediante tres procedimientos:

a. Validez por acuerdo entre jueces o expertos: el criterio para estimar la validez en este caso fue la correspondencia teórica entre las preguntas y las sinergias del evento de estudio.

b. La validez estructural, a partir de correlaciones entre el puntaje de cada sinergia y el puntaje total de la prueba: el criterio para estimar la validez es la correspondencia empírica, y esta técnica requirió de la aplicación del instrumento preliminar a una muestra piloto.

c. La validez estructural basada en el análisis factorial: en este caso el criterio para estimar la validez también es la correspondencia empírica, y se esperaba que cada factor agrupara las preguntas que pertenecían a cada sinergia.

A continuación, se describe con detalle cada uno de los tres procedimientos señalados.

a. Validez según la correspondencia teórica: juicio de expertos

Como primera medida, se calculó la validez de constructo de la versión preliminar de la entrevista socrática dinámica, a partir de la información desarrollada en la matriz de operacionalización, y se utilizó como criterio la correspondencia teórica (Hurtado, 2012). El primer estudio para estimar el índice de validez se fundamentó en el criterio de concordancia entre las preguntas de la entrevista y cada una de las sinergias que formaban parte del concepto teórico del evento de estudio, que era la

comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico. Para este primer criterio, se utilizó la técnica de validación por expertos.

Para dicha validación, se seleccionaron tres investigadores que fuesen expertos en los niveles del modelo de van Hiele, pero además eran expertos en el manejo del software *GeoGebra*, y conocedores de la entrevista socrática. Los expertos investigadores tenían las siguientes características: el primer investigador era doctor en ciencias matemáticas, profesor universitario en reconocidas universidades de Colombia y España, investigador por más de 15 años en la línea del pensamiento matemático, y ha trabajado con el modelo de van Hiele y la entrevista socrática por más de 12 años; conoce el software *GeoGebra* y lo ha trabajado.

Por su parte, el segundo investigador era una doctora en educación en la línea de formación en Educación Matemática, profesora universitaria en reconocidas universidades de Colombia, investigadora por más de 20 años en la línea del pensamiento matemático avanzado, y ha trabajado con el modelo de van Hiele y la entrevista socrática por más de 15 años; ha realizado publicaciones sobre el uso de *GeoGebra* en el aula.

La tercera experta, también doctora en educación con línea de formación Educación Matemática, y con más de una década de trabajo con el modelo de van Hiele desde distintas ópticas de investigación; en su tesis de maestría trabajó tanto el modelo de van Hiele como la entrevista socrática y su fue catalogada como meritoria, además, en los últimos años ha manejado el software *GeoGebra* con estudiantes universitarios.

El procedimiento que se utilizó, de acuerdo a Hurtado (2012), fue enviar un formato de validación con una carta explicativa y el esquema donde se iba a clasificar cada pregunta a cada experto, según la dimensión del evento de estudio (Anexo L). La actividad consistió en ubicar cada pregunta de la entrevista socrática en la sinergia del evento a la cual ellos consideraban que este pertenecía. Al final se vació la información

proporcionada por cada experto en una tabla, para ver los acuerdos y desacuerdos con respecto a la clasificación inicial del investigador, como se muestra en laTabla 18.

Tabla 18. Formato inicial de validación por jueces

Entrevista Socrática Semi Estructurada basada en el Modelo de van Hiele para medir la comprensión del concepto de Parábola actual.

Ítem	Juez 1 Sucerquia	Juez 2 Zapata	Juez 3 Santa	Investigador	Acuerdo
1.a	0	0	0	0	1
1.b	0	0	0	0	1
1.c	0	‘0	0	0	1
2	3	3	3	3	1
3	2	3	2	3	0
4.a	0	0	0	0	1
4.b	0	0	0	0	1
4.c	0	0	0	0	1
5	0	1	1	0	0
6	1	1	0	1	1
7	0	2	1	0	0
8	3	3	3	3	1
9	0	0	1	0	1
10	2	1	1	1	1
11	2	2	2	2	1
12	1	1	2	1	1
13	1	1	2	1	1
14	2	2	1	2	1
15	2	2	1	1	0
16	2	2	3	2	1
17	2	2	3	2	1
18	1	1	1	1	1
19	1	1	0	1	1
20	1	2	1	1	1
21	1	1	2	1	1
22	2	1	2	2	1
23	2	2	2	1	0
24	2	2	3	2	1
25	1	1	2	1	1
26	3	3	2	3	1
27	3	3	2	3	1
28	2	2	3	2	1
29	3	2	3	3	1
30	3	3	2	3	1
31	3	3	3	3	1
32	3	3	3	3	1
				Total	30
				Índice	31/36=0,86

Fuente: Elaboración propia a partir de la información aportada por los expertos

REDIMEC

Los jueces valoraron la construcción de la entrevista de acuerdo a su pertinencia o grado de relación entre las preguntas y el constructo general. La Tabla 18 muestra que la validez inicial de la entrevista socrática fue de 0,86. Además, el análisis de los acuerdos entre los expertos y de las sugerencias aportadas condujo a una serie de cambios. En las preguntas 3, 5, 7, 15 y 23 no hubo acuerdo ni entre los expertos validadores ni con el investigador. Al revisar cada uno de estas pregunta se decidió lo siguiente:

- Para el caso de la pregunta 3, se determinó que antes de la pregunta debía haber un aporte de información, ya que esta es la primera construcción que cumple con la definición de lugar geométrico, y se debía precisar este concepto para que el estudiante razonara y lo asimilara para lograr la comprensión del concepto.

- A pesar de que no hubo acuerdo con el investigador en las preguntas 5 y 7, tales preguntas se centraron en el reconocimiento de dos conceptos fundamentales para llegar a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico; estos conceptos son el de rectas paralelas y el de rectas perpendiculares. Jurado & Londoño (2005) señalan que las preguntas iniciales que el entrevistador formula al entrevistado, tienen como intención determinar si reconoce apropiadamente los conceptos y elementos básicos usados en el transcurso de la entrevista, por estos motivos, se decidió dejarlas en el nivel predescriptivo, propuesta dada por el investigador.

- En la pregunta 15 tampoco hubo acuerdo entre los expertos, puesto que dos de ellos coincidieron en que pertenecía al nivel de análisis, y el otro estuvo de acuerdo con el investigador en que debía ubicarse en el nivel de reconocimiento visual. Se optó por dejarla en el nivel planteado por el investigador, pues la comprensión y asimilación del concepto de *punto medio*, que es el fin de la pregunta, no sería una dificultad para el estudiante, ya que con la ayuda del software, él puede llegar a comprender el concepto de una manera diferente.

PREPRINT

- Con respecto a la pregunta 23, ubicada por el investigador en el nivel de reconocimiento visual, los expertos validadores estuvieron de acuerdo en que correspondía al nivel de análisis, sugerencia que fue tomada en cuenta. Además, se evidenció que esta pregunta es fundamental, puesto que en ella se aprecia el paso que debe dar el estudiante en su forma de razonar, ya que algunos elementos que se utilizan implícitamente para poder dar respuesta a la situación en el nivel de análisis, se deben hacer explícitos en el nivel de clasificación. Esto hizo ver que se debía reubicar la pregunta en el nivel de clasificación.

Como resultado del proceso de análisis anterior, se procedió a validar la nueva versión del instrumento (véase la Tabla 19).

Tabla 19. Formato final de validación por jueces

Entrevista Socrática Semi-estructurada basada en el modelo de van Hiele para medir la comprensión del concepto de Parábola actual.

Ítem	Juez 1 Sucerquia	Juez 2 Zapata	Juez 3 Santa	Investigador	Acuerdo
1.a	0	0	0	0	1
1.b	0	0	0	0	1
1.c	0	‘0	0	0	1
2	3	3	3	3	1
3	2	3	3	2	0
4.a	0	0	0	0	1
4.b	0	0	0	0	1
4.c	0	0	0	0	1
5	0	1	1	0	0
6	1	1	0	1	1
7	0	2	1	0	0
8	3	3	3	3	1
9	0	0	1	0	1
10	2	1	1	1	1
11	2	2	2	2	1
12	1	1	2	1	1
13	1	1	2	1	1
14	2	2	1	2	1
15	2	2	1	1	0
16	2	2	3	2	1
17	2	2	3	2	1
18	1	1	1	1	1
19	1	1	0	1	1
20	1	2	1	1	1

REPOSITORIO

Entrevista Socrática Semi-estructurada basada en el modelo de van Hiele para medir la comprensión del concepto de Parábola actual.

Ítem	Juez 1 Sucerquia	Juez 2 Zapata	Juez 3 Santa	Investigador	Acuerdo
21	1	1	2	1	1
22	2	1	2	2	1
23	2	2	2	2	1
24	2	2	3	2	1
25	1	1	2	1	1
26	3	3	2	3	1
27	3	3	2	3	1
28	2	3	2	2	1
29	3	2	3	3	1
30	3	3	2	3	1
31	3	3	3	3	1
32	3	3	3	3	1
				Total	30
				Índice	32/36=0,89

Fuente: Elaboración propia a partir de la información aportada por los expertos

Una vez realizados los cambios pertinentes, se procedió a realizar nuevamente el cálculo del índice de validez. De acuerdo con Hurtado (2012), el índice de validez obtenido debe ser mayor a 0,75 en el caso de instrumentos que miden eventos de las ciencias sociales y, como se aprecia en la tabla anterior, el resultado cumple con lo establecido, debido a que el índice de validez definitivo fue de 0,89.

Por otra parte, después de ubicar cada pregunta en la sinergia correspondiente, cada experto envió una constancia de validación, en la cual se consideraron seis aspectos tenidos en cuenta para la revisión del instrumento. Estos aspectos fueron: congruencia ítem-dimensión, amplitud de contenidos, redacción, precisión, ortografía y presentación.

En la Tabla 20 se resumen las respuestas dadas por los expertos evaluadores a la forma y profundidad del instrumento, en los seis aspectos mencionados anteriormente. Los expertos coincidieron en que la redacción de las preguntas era aceptable, esto debido a que en algunas construcciones de *GeoGebra* se cambiaron los nombres de algunos puntos y rectas; además, los expertos consideraron que faltaban algunas comas,

por lo cual este fue el único aspecto que se ubicó en una escala de aceptable. En cuanto a los aspectos de congruencia ítem-dimensión, amplitud de contenidos, precisión, ortografía y presentación los expertos, consideraron que las preguntas del instrumento eran excelentes.

Finalmente, después del análisis de este proceso, los expertos coincidieron que la entrevista socrática dinámica planteada es acertada, apropiada, clara, comprensible, y pertinente a los objetivos para los que fue diseñada, además, permite percibir el nivel de razonamiento del concepto de parábola como lugar geométrico, de acuerdo al modelo de van Hiele.

De acuerdo con los cambios planteados, durante el proceso de validación por expertos de la entrevista socrática dinámica, se procedió a reformular la tabla de operacionalización inicial, y quedó de la siguiente manera (véase la Tabla 20):

RED-UNIOT

Tabla 20. Formato final de validación por jueces

Evento de estudio	Dimensiones	Descriptores de nivel	Indicios	preguntas	Instrumento
La comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, al describir el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia, de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta	**Predescriptivo.** Es el conjunto de saberes previos que necesita el estudiante para llegar a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico.	Reconoce objetos geométricos que no son definibles.	Identifica objetos no definibles como punto o punto de intersección.	1a – 1b – 1c 2	Entrevista de carácter socrático para describir la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico.
		Reconoce que por dos puntos pasa una única recta.	Traza la recta por dos puntos dados.	7 – 9 - 10	
		Identifica la distancia más corta entre dos puntos como la medida del segmento de recta.	Grafica la distancia más corta entre dos puntos.	9 -11	
		Reconoce algunos objetos geométricos básicos, en un ambiente de GeoGebra tales como: punto, punto de intersección, segmento, medida de un segmento, medida de un ángulo, rectas, rectas perpendiculares y paralelas, entre otras.	En un ambiente de GeoGebra reconoce objetos geométricos no definibles.	2 – 3 -4a – 4b – 4c	
	Reconocimiento visual. Construye y visualiza, en un ambiente de GeoGebra, puntos, rectas, rectas paralelas, rectas perpendiculares, entre otras.	En el ambiente de GeoGebra, ubica puntos y puntos de intersección, traza un segmento, traza rectas, traza rectas perpendiculares, traza rectas paralelas, determina puntos de intersección entre rectas y segmentos, entre otras.	Representa puntos, puntos de intersección en GeoGebra	8 – 15	

REPOSITORIO

Evento de estudio	Dimensiones	Descriptores de nivel	Indicios	preguntas	Instrumento
		En el ambiente de GeoGebra, determina la condición para hallar la distancia más corta de un punto a una recta	Utilizando GeoGebra halla la distancia más corta entre dos puntos.	11 – 19	
		En un ambiente de GeoGebra, halla la distancia más corta entre un punto y una recta.	Utilizando GeoGebra halla la distancia más corta entre un punto y una recta	19 -21	
		En un ambiente de GeoGebra, determina las condiciones bajo las cuales dos rectas son paralelas o perpendiculares	Identifica cuando dos rectas son paralelas, perpendiculares o secantes.	14 – 15 – 16 - 28	
		En un ambiente de GeoGebra, halla la distancia entre cada uno de los puntos de un conjunto dado y un punto fijo, y entre los primeros y una recta fija.	Calcula la distancia más corta entre un punto fijo y un segmento o recta.	13 - 22	Entrevista de carácter socrático para describir la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico
	Análisis. En este nivel, el estudiante determina algunos puntos que satisfacen condiciones de lugar geométrico como la mediatriz y la circunferencia, y con base en estos, determina puntos que satisfacen la condición de estar a la misma distancia de un punto fijo llamado F y de una recta fija llamada D.	En un ambiente de GeoGebra halla el conjunto de puntos equidistantes de un punto fijo.	Halla puntos equidistantes a un punto fijo utilizando el software de geometría dinámica GeoGebra.	21 - 23 - 25	
		En un ambiente de GeoGebra, encuentra el conjunto de puntos que están a la misma distancia de dos puntos fijos.	Evalúa si un punto cumple las condiciones para pertenecer a la mediatriz de un segmento.	10 - 26 -27	
		En un ambiente de GeoGebra, dada una serie de puntos identifica que equidistan de un punto F y de una recta llamada D.	Dado un conjunto de puntos identifica cuáles de ellos equidistan de un punto F y de una recta llamada D.	17 - 27	

REPOSITORIO

Evento de estudio	Dimensiones	Descriptores de nivel	Indicios	preguntas	Instrumento
		En un ambiente de GeoGebra, ubica algunos puntos que satisfacen la condición de estar a la misma distancia de un punto fijo y una recta fija.	Ubica puntos que equidistan de un punto F y de una recta llamada D..	24 - 16	
		En un ambiente de GeoGebra, reconoce que el lugar geométrico construido mediante GeoGebra es la parábola sin mencionar las propiedades que la caracterizan.	Identifica un conjunto de puntos que pueden satisfacer la condición de pertenecer a la parábola. .	25 – 29	
		En un ambiente de GeoGebra, establece que la parábola está formada por el conjunto infinito de puntos, que satisfacen la condición que la distancia de una recta fija, es siempre igual a su distancia de un punto fijo.	Identifica la propiedad que cumple un conjunto de puntos dado, y los relaciona con la parábola como lugar geométrico.	27 – 12 – 30	
	Clasificación. En este nivel, el estudiante determina la condición que debe cumplir un conjunto de puntos para pertenecer a la parábola, además, es capaz de llegar a una definición de la misma como lugar geométrico.	Manifiesta la necesidad de definir de manera formal la parábola como lugar geométrico: la parábola es el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta L llamada directriz.	Construye la parábola a partir de la definición formal como el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta L llamada directriz.	32 – 23 - 18	

Fuente: Elaboración propia según los Niveles de razonamiento de van Hiele y en los EBCM (MEN, 2006)

b. Validez según correspondencia empírica

Como segundo método para comprobar la validez de constructo de la versión preliminar de la entrevista socrática dinámica, se utilizó la correspondencia empírica entre el instrumento y el evento de estudio; para ello, se aplicó la entrevista socrática preliminar a una muestra piloto conformada por 75 estudiantes, de los cuales 31 eran hombres y 44 eran mujeres, con edades entre 14 y 18 años y quienes cursaban décimo grado.

Para el cálculo de la validez empírica se utilizaron dos técnicas:

a. La correlación entre los puntajes de cada sinergia con el puntaje total de la prueba, para evidenciar la validez estructural y corroborar que efectivamente las sinergias pertenecían al evento estudio. Esta técnica también permitió examinar la correlación de las sinergias entre sí, para detectar si efectivamente éstas se distinguían unas de otras.

b. La segunda técnica para el cálculo de la validez empírica fue el análisis factorial para corroborar que las preguntas realmente pertenecían a la sinergia a la cual estaban asignados.

A continuación, se describe la aplicación de cada técnica y sus respectivos resultados.

- Cálculo de la validez estructural a partir de la correlación sinergias - total

El método de correlación es un procedimiento estadístico que proporciona una medida numérica de la variación conjunta entre dos variables; este valor fluctúa en el intervalo $[-1, 1]$, de manera que el valor cercano a 0 indica ausencia de correlación, el valor cercano a 1 indica una correlación directa fuerte y el valor cercano a -1 indica una correlación inversa fuerte. Para que se pueda afirmar que existe validez estructural,

entendida como la pertenencia de esas sinergias al evento de estudio, la correlación sinergia-total debe ser igual o superior a 0,75. En este caso, los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 21.

Tabla 21. Validez estructural a partir de sinergias-total

Correlación de Pearson		Nivel Predescriptivo	Nivel Reconocimiento visual	Nivel Análisis	Nivel Clasificación	Comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico
Nivel Predescriptivo	Correlación	1	,800**	,750**	,699**	,837**
	Sig.unilat.		,000	,000	,000	,000
Nivel Reconocimiento Visual	Correlación		1	,778**	,767**	,877**
	Sig. Unilat.			,000	,000	,000
Nivel Análisis	Correlación			1	,852**	,941**
	Sig. unilat				,000	,000
Nivel Clasificación	Correlación				1	,934**
	Sig.unilat					,000
Total	Correlación					1
	Sig. unilat					

**. La correlación es significativa en el nivel 0,01 (unilateral).
Fuente elaboración propia a partir de los datos de la prueba piloto

En la matriz anterior se puede ver el grado de correlación de cada una de las sinergias (ubicadas en las filas) con el puntaje total del evento (última columna). Esto muestra que entre la sinergia predescriptivo (fila 1) y el total (comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico), el índice de correlación es de 0,837 (mayor a 0,75); en cuanto a la sinergia Reconocimiento visual (fila 2), se aprecia que el grado de correlación es de 0,877 (mayor que 0,75); para la sinergia Análisis (fila 3) se observa una correlación de 0,941 (igualmente mayor a 0,75); y, finalmente, para la sinergia Clasificación (fila 4) se observa un nivel de correlación de 0,934. De acuerdo a las características mencionadas se puede ver que todas son positivas, significativas al 0,01 y mayores a 0,75, por lo que se concluye que las sinergias forman parte del evento, lo cual es una evidencia empírica de validez estructural.

La Tabla 23 también muestra el grado de correlación entre cada sinergia y el resto. Se espera que esta correlación sea moderada, entre 0,40 y 0,60, lo cual indicaría

que, aunque las sinergias están conectadas porque pertenecen al mismo evento, se distinguen entre sí. Sin embargo, este análisis muestra que la correlación entre las sinergias es alta (entre 0,69 y 0,80); este alto grado de correlación se debe a que la entrevista socrática dinámica está diseñada de manera progresiva para que el estudiante avance en su nivel de razonamiento, dado el nivel de complejidad de las preguntas. Sin embargo, las correlaciones entre sinergias no fueron tan altas como las correlaciones sinergia total, lo que sugiere que las sinergias todavía se diferencian entre sí.

- Cálculo de la validez estructural a partir del análisis factorial

De acuerdo con Méndez & Rondón (2012), el análisis factorial es una de las técnicas estadísticas más utilizadas en los últimos años, especialmente en el campo de las ciencias sociales, y es conocido como una técnica estadística de interdependencia, es decir, que permite analizar las preguntas en conjunto y, a partir de ellos, definir grupos que forman factores. En este caso, se espera que cada factor agrupe las preguntas de cada sinergia, las cuales corresponden a los niveles de razonamiento de van Hiele.

Para analizar la validez estructural del instrumento mediante el análisis factorial, se aplicó el programa SPSS a las preguntas de la entrevista socrática dinámica, que para este caso eran las variables a agrupar, y se esperaba que los factores encontrados coincidieran con las sinergias del modelo de van Hiele. El método de extracción utilizado fue el análisis de componentes principales, en cuanto a la rotación se utilizó el método del Varimax, con normalización Kaiser. Al realizar la rotación con Varimax a las 36 preguntas de la entrevista socrática dinámica, la matriz de componentes rotados desplegó las sinergias correspondientes a los niveles de razonamiento del modelo de van Hiele solicitados, en la séptima iteración.

En la Tabla 22 se muestran los factores arrojados por el análisis factorial, para todos las preguntas de la entrevista socrática.

REPOSITORIO

Tabla 22. Matriz de componentes rotados

	Componente			
	Factor 1	Factor 2	Factor 3	Factor 4
CPClaP31	,879	,301		
CPClaP27	,878	,293		
CPClaP32	,872	,300		
CPClaP30	,872	,292		
CPClaP29	,865	,277		,266
CPClaP26	,857	,306		
CPClaP8	,782	,400	,267	
CPClaP2	,764	,331	,294	,340
CPAn24	**,656**	,318	,265	,506
CPAn28	,638	,356	,276	,518
CPRec18		,823	,277	,297
CPRec13	,271	,813	,306	
CPRec15	,271	,811	,261	,295
CPRec19	,252	,806		,294
CPRec20	,299	,790		
CPRec10	,376	,768	,311	
CPRec21	,316	,767	,265	,263
CPRec12	,356	,755	,318	
CPRec25	,329	,737	,285	,283
CPRec6	,448	,684	,376	
CPAn3	,439	,**598**		,465
CPPre1B			,835	,262
CPPre1C		,250	,804	
CPPre4A			,783	
CPPre1A		,255	,766	
CPPre5	,281	,394	,709	
CPPre4B	,279	,336	,666	,372
CPPre4C	,367	,373	,655	

REDUNED

	Componente			
	Factor 1	Factor 2	Factor 3	Factor 4
CPPre9	,382	,512	,652	
CPPre7	,282	,485	,581	
CPAn17	,521	,361		,696
CPAn16	,478	,398		,680
CPAn22	,533	,363		,658
CPAn14	,451	,442	,272	,650
CPAn11	,419	,474	,293	,626
CPAn23	,576	,288	,254	,605

Fuente: Elaboración propia a partir del cálculo con los datos de la muestra piloto

De la tabla anterior, se desprende que:

a. La aplicación del análisis factorial arrojó cuatro factores en los cuales se agrupan las preguntas, de la entrevista socrática, que están altamente correlacionados por las características que presentan. Estos cuatro factores explican el 84,98% de la varianza. Además, estos factores concuerdan con las sinergias establecidas correspondientes a los niveles de razonamiento de van Hiele.

b. La primera columna muestra el primer factor en el cual se agrupan las preguntas que pertenecen a la sinergia Clasificación. En ella se aprecia una correlación alta, positiva y significativa entre cada pregunta y el factor, de manera que el índice mínimo fue de 0,764 y el máximo de 0,879.

c. La segunda columna muestra el segundo factor en el cual se agrupan las preguntas que pertenecen a la sinergia Reconocimiento Visual, y en ella, se aprecia una correlación alta, positiva y significativa entre cada pregunta y el factor, de manera que el índice mínimo fue de 0,684 y el máximo de 0,823.

PREPRINT

d. La tercera columna muestra el tercer factor en el cual se agrupan las preguntas que pertenecen a la sinergia Predescriptivo, en ella, se aprecia un nivel, entre cada ítem, y el factor, de manera que el índice mínimo fue de 0,581 y el máximo de 0,835.

e. La cuarta columna de correlación alto, positivo y significativo muestra el cuarto factor en el cual se agrupan las preguntas que pertenecen a la sinergia Análisis. En ella se aprecia un buen nivel de correlación, positivo y significativo entre cada pregunta y el factor, de manera que el índice mínimo fue de 0,605 y el máximo de 0,696.

f. La pregunta 24 estaba originalmente en la sinergia análisis (factor 4), pero tuvo mayor peso en el factor 1 que corresponde al nivel clasificación (0,656), por lo cual se cambió a esa sinergia y quedó definitivamente como clasificación.

g. Algo similar ocurre con la pregunta 3, que obtuvo un mayor peso en el factor 2, correspondiente a la sinergia Reconocimiento Visual (0,598), pero en la tabla de operacionalización se ubicaba en la sinergia Análisis, que corresponde al factor 4 (0,465). En este caso, los mayores pesos no se encuentran en sinergias contiguas, pero conceptualmente esta pregunta es más afín con el nivel de análisis (factor 4), y como su segundo peso más alto se ubicaba allí (0,465), se decidió dejarlo en esa sinergia. En efecto, al analizar la pregunta 3 se llega a la conclusión de que por las características específicas que presenta la situación problema allí planteada, cuando se resuelve mediante una construcción en el software, es un pregunta que se ratifica como perteneciente a la sinergia de Análisis, como lo evidenció el análisis factorial.

PREPRINT

Por lo anterior, se corroboró que el instrumento tiene validez estructural; es decir, que cada uno de las preguntas de la entrevista socrática dinámica están en correlación con sus sinergias, por lo tanto, se puede utilizar para el fin que fue creada.

4.2.3.2 Análisis de la entrevista socrática en términos de su confiabilidad

Para determinar la confiabilidad del instrumento, se utilizó el criterio de consistencia interna medido a través de la técnica alfa de Cronbach. La medida de la confiabilidad mediante el Alfa de Cronbach, asume que las preguntas miden un mismo constructo y que están altamente correlacionados entre sí y con el instrumento total. Entre más cerca de 1 se encuentre el valor alfa, mayor es la consistencia interna del instrumento analizado y cuanto más cerca de 0 esté el valor de alfa, menor es la consistencia del instrumento y, por supuesto, de las preguntas analizadas. La confiabilidad se calculó primero para el instrumento total con los 36 pregunta que componen el instrumento; posteriormente, se determinó la confiabilidad para cada una de las sinergias, a fin de interpretar los resultados de cada una al aplicar el instrumento.

- Análisis de la confiabilidad global

El cálculo del alfa de Cronbach con los 36 preguntas del instrumento, permitieron medir la confiabilidad global del instrumento, lo que género como resultado un valor de 0,985, el cual supera el mínimo requerido de 0,75. Según esto, se puede afirmar que el instrumento muestra una alta confiabilidad, como se puede ver en la tabla 23.

Tabla 23. Resultado de la confiabilidad global de la entrevista socrática

Alfa de Cronbach	N de elementos
0,985	36

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la prueba piloto

PREPRINT

A continuación, se presenta la Tabla 24 en la cual se evidencia en la columna número 4 el nivel de correlación de cada pregunta con el total del instrumento (correlación total de elementos corregida). Se observa que dichos valores fluctúan entre 0,568 y 0,859, de manera que todas las preguntas tienen una correlación alta, positiva y significativa, con excepción de la pregunta 1B de la sinergia predescriptivo, que presenta una correlación de 0,493 que aun así es muy buena.

Tabla 24. Estadísticas de la confiabilidad total de elemento

	Media de escala si el elemento se ha suprimido	Varianza de escala si el elemento se ha suprimido	Correlación total de elementos corregida	Alfa de Cronbach si el elemento se ha suprimido
CPPre1A	110,293	1503,994	,568	,985
CPPre1B	110,227	1510,556	,493	,986
CPPre1C	110,320	1504,788	,589	,985
CPPre4A	110,413	1500,354	,639	,985
CPPre4B	110,347	1491,662	,757	,985
CPPre4C	110,453	1483,819	,762	,985
CPPre5	110,613	1490,375	,637	,985
CPPre7	110,520	1489,064	,701	,985
CPPre9	110,760	1478,834	,806	,985
CPRec6	110,853	1461,289	,847	,985
CPRec10	110,880	1463,621	,794	,985
CPRec12	110,960	1457,850	,851	,985
CPRec13	110,987	1458,743	,811	,985
CPRec15	111,013	1457,743	,828	,985
CPRec18	111,000	1457,081	,807	,985
CPRec19	111,120	1456,539	,801	,985
CPRec20	111,227	1457,178	,801	,985
CPRec21	111,227	1454,015	,820	,985
CPRec25	111,240	1453,455	,827	,985
CPAn3	111,400	1447,027	,873	,985
CPAn11	111,507	1443,713	,875	,985
CPAn14	111,587	1440,894	,878	,985
CPAn16	111,587	1441,597	,860	,985
CPAn17	111,653	1444,121	,847	,985
CPAn22	111,707	1443,832	,858	,985

REPOSITORIO

	Media de escala si el elemento se ha suprimido	Varianza de escala si el elemento se ha suprimido	Correlación total de elementos corregida	Alfa de Cronbach si el elemento se ha suprimido
CPAn23	111,760	1434,050	,841	,985
CPAn24	112,013	1431,230	,874	,985
CPAn28	111,987	1432,311	,896	,985
CPClaP2	112,200	1430,108	,898	,985
CPClaP8	112,173	1430,037	,897	,985
CPClaP26	112,387	1429,430	,872	,985
CPClaP27	112,453	1426,738	,876	,985
CPClaP29	112,547	1423,548	,872	,985
CPClaP30	112,587	1425,246	,869	,985
CPClaP31	112,573	1426,680	,859	,985
CPClaP32	112,560	1423,385	,859	,985

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la prueba piloto

- Análisis de la confiabilidad por sinergia

Otro aspecto importante es determinar la confiabilidad de cada una de las cuatro sinergias que componen la entrevista socrática dinámica (Predescriptivo, Reconocimiento Visual, Análisis, y Clasificación), con el fin de comprobar la solidez interna del instrumento.

Se analizó, como primera medida, la confiabilidad de la sinergia *Predescriptivo*, según la jerarquía de los niveles del modelo de van Hiele. Esta sinergia consta de nueve preguntas y, de acuerdo con la

Tabla 25, el valor del alfa de Cronbach es de 0,946; este valor es positivo y muy cercano a 1, lo que indica una alta consistencia entre las preguntas con el total de la sinergia.

Tabla 25. Confiabilidad de la sinergia correspondiente al nivel predescriptivo

Alfa de Cronbach	N de elementos
0,946	9

Fuente elaboración propia a partir de los datos de la prueba piloto

PREPRINT

En la Tabla 26 se aprecia la correlación entre cada una de las preguntas de la sinergia *Predescriptivo*, con el total de dicha sinergia, en ella todos los valores fluctúan entre 0,717 y 0,869, siendo estos valores positivos y con una muy buena consistencia interna, lo que indica que cada pregunta de esta sinergia está midiendo el nivel predescriptivo.

Tabla 26. Correlaciones ítem-total para la sinergia Reconocimiento visual

	Media de escala si el elemento se ha suprimido	Varianza de escala si el elemento se ha suprimido	Correlación total de elementos corregida	Alfa de Cronbach si se elimina el elemento
CPPre1A	32,720	34,015	,725	,943
CPPre1B	32,653	34,554	,717	,944
CPPre1C	32,747	33,894	,792	,940
CPPre4A	32,840	33,352	,821	,939
CPPre4B	32,773	33,178	,808	,939
CPPre4C	32,880	31,756	,828	,938
CPPre5	33,040	31,525	,806	,939
CPPre7	32,947	32,484	,767	,941
CPPre9	33,187	31,073	,869	,935

Fuente elaboración propia a partir de los datos de la prueba piloto

El segundo nivel del modelo de van Hiele es el de *Reconocimiento Visual*. Para esta sinergia se analizaron 10 preguntas, y de acuerdo con la Tabla 27 el valor del alfa de Cronbach es de 0,978; este valor es positivo y muy cercano a 1. Al igual que la sinergia anterior, muestra una alta consistencia entre las preguntas con el total de la sinergia.

Tabla 27. Confiabilidad de la sinergia Reconocimiento visual

Alfa de Cronbach	N de elementos
0,978	10

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la prueba piloto

PREPRINT

La Tabla 28 muestra la correlación de cada pregunta de la sinergia *Reconocimiento Visual* con el total de la sinergia. Todos los valores fluctúan entre 0,862 y 0,922, siendo estos valores altos y positivos, lo que evidencia una alta consistencia interna e indica que cada pregunta de la sinergia reconocimiento visual sirve para medir ese nivel de comprensión.

Tabla 28. Correlaciones ítem-total para la sinergia Reconocimiento visual

	Media de escala si el elemento se ha suprimido	Varianza de escala si el elemento se ha suprimido	Correlación total de elementos corregida	Alfa de Cronbach si el elemento se ha suprimido
CPRec6	31,267	114,360	,862	,977
CPRec10	31,293	113,534	,866	,977
CPRec12	31,373	112,399	,907	,976
CPRec13	31,400	111,324	,916	,975
CPRec15	31,427	111,410	,920	,975
CPRec18	31,413	110,543	,922	,975
CPRec19	31,533	110,658	,902	,976
CPRec20	31,640	110,909	,900	,976
CPRec21	31,640	110,747	,891	,976
CPRec25	31,653	111,392	,867	,977

Fuente elaboración propia a partir de los datos de la prueba piloto

El nivel tres del modelo de van Hiele es el de *Análisis*, para esta sinergia se analizaron nueve preguntas y, de acuerdo con la Tabla 29, el valor del alfa de Cronbach es de 0,979. Este valor es alto, positivo y muy cercano a 1. Al igual que las dos sinergias anteriores, muestra una alta consistencia entre las preguntas con el total de la sinergia, lo que ratifica que la sinergia es confiable.

Tabla 29. Confiabilidad de la sinergia de Nivel Análisis

Alfa de Cronbach	N de elementos
,979	9

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de la prueba piloto

PREPRINT

La Tabla 30 muestra la correlación de cada pregunta de la sinergia *Análisis* con el total de la sinergia. En ella, todas las correlaciones entre cada pregunta y el total de la sinergia fluctúan entre 0,849 y 0,930. Estos valores son positivos y con una alta consistencia interna, lo que indica que cada pregunta de la sinergia análisis sirve para medir este nivel de comprensión.

Tabla 30. Correlaciones ítem-total para la sinergia Análisis

	Media de escala si el elemento se ha suprimido	Varianza de escala si el elemento se ha suprimido	Correlación total de elementos corregida	Alfa de Cronbach si el elemento se ha suprimido
CPAn3	22,573	124,870	,849	,979
CPAn11	22,680	122,302	,908	,977
CPAn14	22,760	120,996	,927	,976
CPAn16	22,760	120,509	,930	,976
CPAn17	22,827	121,010	,925	,976
CPAn22	22,880	121,215	,929	,976
CPAn23	22,933	118,468	,897	,977
CPAn24	23,187	118,965	,892	,977
CPAn28	23,160	119,515	,909	,977

Fuente elaboración propia a partir de los datos de la prueba piloto

Para la sinergia *Clasificación* se analizaron 8 preguntas, y se encuentra el valor más alto del Alfa de Cronbach, 0,990 (véase la Tabla 31); este valor es positivo y muy cercano a 1, el cual señala una muy alta consistencia entre las preguntas de esta sinergia con el total de la sinergia.

Tabla 31. Confiabilidad de la sinergia Clasificación

Alfa de Cronbach	N de elementos
,990	8

Fuente elaboración propia a partir de los datos de la prueba piloto

PREPRINT

La Tabla 32 muestra la correlación de cada pregunta con el total; todos los valores de correlación ítem-sinergia fluctúan entre 0,849 y 0,930. Estos valores son positivos y con una alta consistencia interna, lo que indica que cada pregunta de la sinergia *reconocimiento visual* sirve para determinar este nivel de comprensión.

Tabla 32. Confiabilidad de la sinergia Clasificación

	Media de escala si el elemento se ha suprimido	Varianza de escala si el elemento se ha suprimido	Correlación total de elementos corregida	Alfa de Cronbach si el elemento se ha suprimido
CPClaP2	14,547	129,657	,926	,990
CPClaP8	14,520	129,523	,928	,990
CPClaP26	14,733	127,279	,963	,988
CPClaP27	14,800	126,324	,969	,988
CPClaP29	14,893	125,124	,969	,988
CPClaP30	14,933	125,550	,970	,988
CPClaP31	14,920	125,642	,969	,988
CPClaP32	14,907	124,707	,964	,988

Fuente elaboración propia a partir de los datos de la prueba piloto

Según lo anterior, el análisis realizado a cada una de las preguntas de las sinergias con respecto al total de cada sinergia, garantiza que el instrumento es confiable internamente, y que cada una de las sinergias también son confiables. En otras palabras, se puede asegurar que existe consistencia y relación entre cada pregunta y su sinergia, y entre estas y el instrumento, lo que indica que la entrevista socrática dinámica planteada en la investigación tiene la capacidad de generar resultados confiables.

4.3. Discusión de los Resultados

Es importante destacar que, según el MEN (2004), en los EBCM se establecen las destrezas a desarrollar para los cinco tipos de pensamiento matemático, el

pensamiento numérico y sistemas numéricos, el pensamiento espacial y sistemas geométricos, el pensamiento métrico y sistemas de medidas, el pensamiento aleatorio y sistemas de datos y el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Se encontró que el concepto de parábola en los grados 6o y 7o se presenta en las unidades de aprendizaje contenidos en los EBCM asociadas a los temas de: construcción de polígonos regulares, estimaciones, construcción y representación bidimensional de sólidos, sistema de coordenadas cartesianas, área de figuras compuestas y de figuras planas, construcción de figuras planas, medición de ángulos y longitudes, representación de objetos y figuras bidimensionales, ubicación de puntos como un sistema de referencia, representación e interpretación de puntos en el plano y explicación de gráficos. Todos los contenidos anteriores se pueden encontrar en cuatro de los cinco tipos de pensamiento.

En relación a esto, Del Rio (2018) afirma que dentro de los estándares se reconoce toda una serie de elementos de las secciones cónicas que deben ser perfectamente administradas dentro del aula, pero que en la práctica no se desarrollan de la misma forma; hay que ir más allá del plan de área para entender cómo se puede desarrollar el objeto matemático en el aula.

Para los grados octavo y noveno, se detectaron seis unidades necesarias para la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico. Los contenidos de estas unidades fueron: criterios de congruencia de triángulos, función cuadrática, representación gráfica, teorema de Thales, criterios de semejanza de triángulos, trayectorias y desplazamientos y, finalmente, posiciones de una recta y una circunferencia. Se concluyó que en estos grados el estudiante se puede acercar por primera vez a una aproximación de la definición de parábola como lugar geométrico, mediante el pensamiento geométrico.

En los grados décimo y undécimo, se hace explícito el concepto de parábola como lugar geométrico tanto en los EBCM como en los DBA, y en estos grados los

PREPRINT

estudiantes ya tienen los conceptos básicos para llegar a una definición formal del concepto de parábola como lugar geométrico. Tanto en los DBA como en los EBCM, se espera que este concepto sea manejado por los estudiantes, antes de pasar a su ciclo universitario, ya que requieren afrontar situaciones con mayor nivel de abstracción al ingresar a carreras como ingeniería, identificando formas visuales, y las relaciones con los lugares geométricos, analizando relaciones entre expresiones algebraicas y gráficas de funciones y reconociendo y describiendo curvas obtenidas por cortes longitudinales en varias figuras.

Se encontró coherencia entre los DBA y los EBCM, y se evidenció que los dos documentos no están desvinculados sino que, por el contrario, se complementan el uno con el otro, y son el insumo principal para que los profesores construyan los planes de área, planes de aula, así como para aplicar diversas metodologías en el aula de clase.

Por lo tanto, el objeto matemático debe abordarse desde diversos elementos y las reglas matemáticas que subyacen de ellas. Del Rio (2018) establece que no existe una sola forma de presentar el objeto matemático; los estándares dan cuenta de diferentes lenguajes, lo que a su vez, configura diversos significados que se pueden dar de este. Así, los significados de la parábola se van dando desde diversos ámbitos semióticos, sin perder el ser del concepto como tal.

El uso de los EBCM permite alcanzar las competencias específicas, para evitar vacíos en construcciones conceptuales, mientras que los DBA establecen las competencias mínimas que deben lograr los estudiantes en las diferentes áreas -en el caso de esta investigación en el área de Matemáticas- a fin de ser promovidos al siguiente grado. Por lo tanto, los EBCM indican la base del aprendizaje de cada competencia y los DBA permiten determinar lo mínimo de los Estándares para que los estudiantes sean promovidos. A partir de las matrices de análisis, se identificaron los contenidos asociados al concepto de parábola para ser incorporados en la estructura de

PREPRINT

la entrevista socrática destinada a evaluar la comprensión del concepto de parábola para cada grado.

Como lo establece Barrios (2018), al momento de representar un objeto matemático se debe planificar y tener en cuenta la coherencia vertical y horizontal desde los lineamientos y estándares en matemáticas, ya que los planes de área y de aula se trabajan por contenidos y no por procesos para alcanzar competencias y no se vinculan los ejes temáticos en el área de la geometría en los primeros ciclos de primaria.

Por otro lado, dado que es importante el desarrollo de las habilidades para cambiar la representación de un objeto matemático y el hacer uso de estas, se debe involucrar a los estudiantes en espirales de indagación; esto se logra al hacer preguntas inquisitivas para conducirlos a la comprensión del objeto matemático a través de un conjunto de respuestas y preguntas cada vez más profundas que muestren conexiones entre el tema y las preguntas de los estudiantes para superar la transmisión de información sin comprensión (Barrios, 2018). Es de anotar que el propósito que se persigue con la entrevista socrática es que el aprendiz reflexione no sólo acerca de las preguntas que se le formulan sino, también, acerca de sus propias respuestas y que llegue a hacer conciencia de las relaciones y propiedades que utiliza en sus razonamientos (De la Torre, 2003, p. 116).

Para favorecer la comprensión matemática en los estudiantes, cada unidad curricular debe partir de metas que impliquen usar ideas, relaciones y preguntas como una forma de indagación para lograr tal fin. Además, para avanzar en la comprensión se formuló una secuencia didáctica estructurada mediante las unidades de aprendizaje. Es de resaltar que los estudiantes deben sentir la necesidad de construir el conocimiento del objeto de estudio, manteniendo la curiosidad, haciendo uso de conocimientos previos y nociones nuevas, compartir y comprobar sus propias ideas acerca de las definiciones en donde el profesor permita la socialización de avances y retrocesos (Oviedo, 2014).

Barrios (2018), establece que el constructo mental de los estudiantes facilita la comprensión de los objetos matemáticos por lo que es necesaria la integración de conocimientos existentes y su conexión con nuevas ideas combinadas con la reflexión para llegar a una representación que aporte a su comprensión. Los estudiantes deben movilizar procesos como razonar, argumentar, representar y comunicar para construir un concepto del objeto matemático *parábola* para el cual se da la modelación de diferentes sistemas de representación en articulación con la resolución de problemas para su tratamiento como sección cónica, desde la conversión del lenguaje algebraico al gráfico y viceversa.

De acuerdo a lo anterior, es necesario tener en cuenta lo expresado por Mena et al. (2015), quienes señalan que se debe propiciar un aprendizaje significativo frente a los obstáculos cognitivos, epistemológicos y didácticos que pueden presentar los estudiantes durante su acercamiento a las matemáticas y al momento de relacionar conceptos matemáticos y con conceptos geométricos. En este sentido, los descriptores finales de cada nivel se lograron consolidar al ser refinados y estructurados durante el desarrollo de la investigación.

Como lo establecen Agudelo & Escobar (2016), la comprensión de objetos matemáticos está ligada a las estructuras que un individuo ha logrado construir sobre algunos conjuntos numéricos; así mismo, las nociones intuitivas son un obstáculo, como lo afirma Crespo (s.f.). Por lo tanto, para lograr la comprensión de la parábola y reconocerla a partir de sus componentes es un reto en relación a cómo se plantea la construcción del concepto y con cuáles estrategias didácticas. Este reto es asumido en esta investigación por la red de relaciones: las preguntas de la entrevista están formuladas y distribuidas de tal manera que el entrevistado pueda construir y/o fortalecer una estructura mental alrededor del concepto objeto de estudio, con base en los elementos, procesos y procedimientos que le proporciona la misma entrevista para

razonar y reflexionar: mecanismos visual geométricos, verbales o escritos (Jaramillo et al., 2012).

Es así que la enseñanza del concepto de parábola presenta un desafío para los profesores, pues involucra obstáculos epistemológicos y didácticos como lo afirman Waldegg (1996), Garbín & Azcárate (2002) y Lestón (2007). Por lo tanto, es necesario que los profesores en matemáticas tengan presente el nivel de razonamiento en que se encuentran sus estudiantes, así mismo, la didáctica para la representación algebraica, geométrica y verbal de tal manera que los estudiantes puedan utilizar la parábola para modelar matemáticamente fenómenos de la realidad, lo cual es también avalado por Álvarez y Morales (s.f.).

De acuerdo a lo anterior, y reafirmado por Godino et al. (2004), los estudiantes aprenden matemáticas cuando las comprenden, y construyen nuevos conocimientos; de ahí la importancia de la planificación de la enseñanza en las matemática y en este caso cumplir las características de una entrevista socrática (Jaramillo et ali, 2012)): *intencionalidad, lenguaje, conceptos básicos, experiencias previas, diálogo inquisitivo, pensamiento discursivo, aportes de información, problematización con las ideas, paso por los tres momentos y construcción de la red de relaciones respectiva*.

En cuanto al modelo de van Hiele, según Jaime & Gutiérrez (1990), el estudiante solo comprende lo que el profesor le presenta de manera adecuada a su nivel de razonamiento. Es decir, es necesario esperar que los estudiantes alcancen un nivel de razonamiento superior si la relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual y, a su vez, no se puede enseñar a un estudiante a razonar de una forma determinada, pero si se le puede ayudar a que adquiera la experiencia para razonar. Por lo tanto, en concordancia con Jaramillo & Campillo (2011), la entrevista diseñada fue el medio más adecuado para realizar el seguimiento y describir la forma en que los estudiantes comprenden y se apropian del concepto de parábola de acuerdo a su nivel de razonamiento, permitiéndoles construir su propio conocimiento a partir de la red de

relaciones que llevan al aprendizaje. El razonamiento de los estudiantes se basa en una componente de tipo visual-geométrica. Veremos que estas situaciones fueron nuevas para los estudiantes y, con base en aportes de información y en experiencias previas, lograron llegar a conclusiones frente a la comprensión de la parábola como lugar geométrico.

El diseño de la entrevista tuvo por objetivo la evaluación del concepto de parábola como lugar geométrico, porque se pudo establecer la relación entre los descriptores y el modelo de van Hiele. Adicionalmente, la forma como se elaboró la entrevista con el apoyo del software *GeoGebra,* también permite que, una vez el profesor evalúe el nivel de comprensión, establecer el diálogo con el estudiante quien puede ir trabajando diferentes conceptos, descubriendo por su cuenta ciertos principios y relaciones, lo que contribuye a caracterizar el proceso de comprensión y a que el profesor descubra el nivel de razonamiento en el que se encuentra.

Para efectos de este estudio, y según lo expuesto en la sesión anterior, se establecieron las características del razonamiento en cada nivel con respecto al concepto de parábola. Con base en los descriptores construidos para cada nivel de razonamiento, se diseñó la versión inicial de la entrevista socrática para describir la comprensión del concepto de parábola por parte de los estudiantes, en el marco del modelo de van Hiele.

Se consideraron las sugerencias de Londoño (2011), en cuanto a garantizar que los entrevistados tuviesen un mínimo de información inicial e ideas intuitivas, y mostraran sus concepciones previas acerca del objeto matemático trabajado. Se tuvo en cuenta la intencionalidad de las preguntas, el lenguaje, el ambiente para la aplicación de la entrevista, el tiempo y la confianza ofrecida al momento de aplicar la entrevista. Se siguió el diálogo socrático y los procedimientos de validación.

REPOSITORIO

La entrevista socrática dinámica diseñada, mediada por el software de geometría dinámica *GeoGebra*, involucra un diálogo con apoyo visual hacia la construcción de la parábola como lugar geométrico, de manera que el estudiante realiza diversas elaboraciones para llegar a la comprensión del concepto de la misma.

Así mismo, se siguieron los lineamientos de Jaramillo et al. (2012) frente al lenguaje, la intencionalidad, los conceptos, las experiencias previas, el pensamiento discursivo y la problematización. En cuanto a la intencionalidad, se siguió a Ibarra (2014), y se consideraron los objetivos de la entrevista para detectar el nivel de razonamiento. Por otra parte, y a partir de lo planteado por Jurado & Londoño (2005), se incorporó el diálogo inquisitivo para que el estudiante interactúe con el entrevistador a fin de elaborar y refinar sus razonamientos, de manera tal que se pudieran realizar y modificar conjeturas, si fuese necesario.

Como lo establecen Santa y Jaramillo (2007), es importante que el estudiante comprenda las propiedades y las características que posee la parábola, entre las que se destacan: encontrar la relación analítica de la ecuación con los elementos que conforman la parábola, determinar la razón entre el vértice, la directriz y el foco, entender la simetría, el eje focal y la orientación del objeto, para hacer uso de sistemas de representación. La comprensión de todas estas propiedades le permitirá al estudiante lograr una mejor interpretación y asociación entre la ecuación y la gráfica.

De acuerdo con lo anterior, los descriptores base de la entrevista socrática permiten caracterizar el proceso de comprensión de los estudiantes abordados y descubrir el nivel en el que se encontraban razonando. Es decir, el proceso investigativo permitió establecer las principales características del razonamiento en cada uno de estos niveles, con respecto al concepto de parábola como lugar geométrico.

Por otra parte, la dificultad en la comprensión, debido a concepciones erróneas de los estudiantes como las propiedades métricas (Fernández, 2010) y las dificultades

REPOSITORIO

vinculadas a las representaciones propias de los estudiantes con respecto al contenido (Gaitán, et al., 2014) influyen en el razonamiento y la comprensión de los contenidos abordados durante las clases (Ancochea, 2011). Por estas razones, la entrevista diseñada implica que el entrevistador realice intervenciones oportunas para lograr que el estudiante alcance la comprensión a través del diálogo inquisitivo. Por lo tanto, en la perspectiva de van Hiele, el lenguaje cumple un papel fundamental para analizar la evolución en el nivel de razonamiento a medida que responden cada pregunta y de acuerdo a los descriptores se caracteriza de manera individual el concepto de parábola a partir de construcciones geométricas con *GeoGebra.*

En cuanto a la entrevista, se siguió a De la Torre (2003), quien señala que el camino hacia el conocimiento es un proceso gradual. Así mismo, Sucerquia et ali (2013) establecen que la entrevista socrática es un medio adecuado para realizar el seguimiento de la construcción y evolución de un concepto matemático en la mente del estudiante. Incluso, de esta manera, los estudiantes pueden reflexionar sobre las preguntas formuladas, las respuestas y sus razonamientos.

Para analizar la versión inicial de la entrevista con base en los criterios de validez y confiabilidad, se hizo uso de la validación por jueces y el índice definitivo de validez fue de 0,89. Por otra parte, para estimar la validez estructural se aplicó la entrevista socrática preliminar a una muestra piloto conformada por 75 estudiantes de grado décimo, con edades entre 14 y 18 años, y se corroboró que el instrumento tenía validez. A lo largo del proceso de crear los instrumentos para esta investigación, se garantiza que cada una de las preguntas de la entrevista socrática dinámica están en correlación con sus sinergias y, por lo tanto, se puede utilizar para el fin que fue creada.

Finalmente, se concluye que el diseño de la entrevista socrática generada permite describir la comprensión del concepto de parábola, y representa una herramienta pertinente, adecuada, válida y confiable, mediante la cual el entrevistador puede hacer preguntas alternas para avanzar en la descripción de la comprensión y ubicar en un

nivel adecuado de razonamiento a cada estudiante en el marco del modelo de van Hiele. Por lo tanto, la entrevista diseñada genera experiencias de aprendizaje con relación a la parábola, y es posible identificar el conocimiento aprendido por los estudiantes.

RED-UNEOT

CAPÍTULO V.
CONSTRUCCIÓN TEÓRICA

RED-UMECIT

5.1 Conclusiones

Como resultados de la presente investigación, y a partir de lo trabajado en cada objetivo específico, se puede concluir lo siguiente:

A partir del análisis de los EBC y los DBA en Matemáticas de los grados sexto a once de educación básica y media, se puede establecer la existencia de un hilo conductor en las competencias y unidades de aprendizaje sobre el concepto de parábola como lugar geométrico, lo cual exhibe coherencia curricular desde los Lineamientos Curriculares. Este hecho se evidenció al construir tres tablas de categorías, a partir de las cuales se pudieron identificar los contenidos o unidades de aprendizaje relacionados con el concepto y con la construcción del objeto matemático, para ser trabajados en cada uno de los grupos por grados.

En la red correspondiente a los grados sexto y séptimo, se evidenció la conexión que existe entre las unidades de aprendizaje subyacentes al concepto de parábola, el estándar asociado, el correspondiente DBA y, finalmente, la definición intuitiva del concepto de parábola. Fueron seis las temáticas seleccionadas: *construcción de polígonos regulares, estimaciones, construcción y representación bidimensional de sólidos, sistema de coordenadas cartesianas, áreas de figuras compuestas y áreas de figuras planas*. Estas temáticas permitieron identificar los aspectos necesarios, en los grados en mención, para llegar a la comprensión del concepto matemático objeto de estudio.

En el caso de los grados octavo y noveno, se construyó otra red en la cual se detectaron seis unidades; los contenidos identificados fueron: *criterios de congruencia de triángulos, función cuadrática y su representación gráfica, teorema de Thales, criterios de semejanza de triángulos, trayectorias y desplazamientos* y, finalmente, *posiciones relativas de una recta y una circunferencia.*

Para los grados décimo y undécimo, en la red se establece, desde el punto de vista analítico, la relación entre las unidades de aprendizaje contenidas en los EBC y los DBA en Matemáticas, con el concepto de parábola como lugar geométrico. Esta red evidenció que en estos grados se hace explícito el concepto de parábola como lugar geométrico, con miras a la definición formal y haciendo consciente los elementos y propiedades geométricas que en ella intervienen.

A partir de los cuatro tipos de pensamiento revisados y las unidades de aprendizaje relacionadas se pretendió que, a través de la entrevista, las unidades sirvieran como insumo para el análisis y evaluación de la comprensión del concepto matemático objeto de esta investigación. El pensamiento variacional se evidencia en las unidades *construcción de polígonos regulares, trayectorias y desplazamientos*; el pensamiento métrico se hace visible en las unidades *sistema de coordenadas cartesianas* y *estimaciones*; el pensamiento numérico, en las unidades *función cuadrática y su representación gráfica, áreas de figuras* compuestas y *áreas de figuras planas;* y el pensamiento espacial toma una gran importancia en los grados décimo y undécimo con la unidad *secciones cónicas*, que se relaciona directamente con la parábola, implicando al estudiante describir lugares geométricos. No se logró establecer vínculos entre el pensamiento aleatorio y el concepto matemático estudiado en ninguno de los grados sexto hasta undécimo.

En cuanto al análisis de los objetos matemáticos contenidos en las unidades de aprendizaje, en términos del modelo de van Hiele, se establecieron las siguientes categorías: Nivel de razonamiento según el modelo de van Hiele, objetos matemáticos asociados a cada nivel y las unidades de aprendizaje ya mencionadas.

Se formularon los descriptores necesarios para caracterizar el nivel de razonamiento del concepto de parábola como lugar geométrico alcanzado por los estudiantes, con base en el modelo van Hiele. Con la ayuda del software ATLAS.ti se pudo establecer la relación entre cada nivel de razonamiento (Predescriptivo,

Reconocimiento visual, Análisis y Clasificación) con su respectivo tipo de pensamiento matemático (espacial, métrico, variacional y numérico), todo esto ligado a la respectiva unidad de aprendizaje relacionada.

En cuanto al diseño de la versión inicial de la entrevista socrática formulada en función del modelo de van Hiele para este estudio (la cual fue mediada por la plataforma GeoGebra Classroom como necesidad de adaptación a la educación en casa por motivo del Covid-19), se partió de los descriptores construidos y se diseñó un guion preliminar de la entrevista semiestructurada. Este guion se constituye en una herramienta que permite que el investigador observe la evolución del razonamiento de los estudiantes y, al mismo tiempo, proporcione una experiencia de aprendizaje para avanzar en su nivel de razonamiento, con el uso de preguntas que estimulan el pensamiento crítico.

En la versión inicial de la entrevista se plantearon 42 preguntas enmarcadas en los cuatro primeros niveles de razonamiento: 11 preguntas en el nivel pre-descriptivo, 10 preguntas en nivel de reconocimiento visual, 9 preguntas en el nivel de análisis y 12 preguntas en el nivel de clasificación. Posteriormente, tras una segunda revisión, quedaron 36 preguntas. Cada una de las construcciones realizadas en *GeoGebra* se organizaron de manera gradual, esto es, desde preguntas para respuestas espontáneas a otras de mayor complejidad conceptual, diseñadas de acuerdo a los niveles de razonamiento.

Es muy importante destacar que, al contrario de lo que sucede con la entrevista socrática planteada por Jurado & Londoño (2005) quienes señalan que “un dato que puede resultar significativo sobre el desarrollo de la entrevista es el cansancio que manifiestan la mayoría de los estudiantes al finalizarla” (pág. 157), en esta investigación, los estudiantes manifestaron sentirse muy cómodos con la entrevista sin importar el tiempo empleado, pues las actividades en *GeoGebra*, al ser dinámicas e interactivas, estimulaban la atención y el interés constantemente.

Para analizar la versión inicial de la entrevista con base en los criterios de validez y confiabilidad, se hizo uso de la validación por jueces y el índice definitivo de validez fue de 0,89. Por otra parte, para estimar la validez estructural se aplicó la entrevista socrática preliminar a una muestra piloto conformada por 75 estudiantes de grado décimo, con edades entre 14 y 18 años. Esto corrobora la validez del instrumento: cada uno de las preguntas de la entrevista socrática dinámica están en correlación con sus sinergias y, por lo tanto, se puede utilizar para el fin que fue creada.

Para precisar la confiabilidad de la entrevista se utilizó el criterio de consistencia interna medido a través de la técnica Alfa de Cronbach, lo que generó como resultado un valor de 0,985, que supera el mínimo requerido de 0,75; esto evidencia que el instrumento es altamente confiable. El análisis realizado a cada una de las preguntas de las sinergias con respecto al total de cada sinergia, garantizó la confiabilidad interna del instrumento, al igual que para cada una de las sinergias.

Una de las conclusiones más importantes de la investigación consiste en que se pudo comprobar que la entrevista socrática dinámica se valida en el marco del modelo de van Hiele para la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, a través de las construcciones realizadas mediante el software *GeoGebra*, lo que permite, en un primer momento, el reconocimiento visual de la parábola y, en un segundo momento, la evidencia verificable de propiedades y la asociación de las mismas. Además, le aporta un componente de tipo experimental, pues el estudiante puede realizar y visualizar sus propias construcciones y con base en ellas, llegar a la comprensión del concepto matemático.

Finalmente, se puede afirmar que la presente investigación evidencia que el modelo de van Hiele se engrana de manera óptima con las TIC, en nuestro caso, para la enseñanza de la parábola como lugar geométrico, razón por la cual nos hemos referido a ella como *Entrevista Socrática Dinámica*. Como aporte didáctico de este

estudio se proporcionan los elementos fundamentales para evaluar la comprensión de este concepto. Al usar la Entrevista Socrática Dinámica para la Comprensión del Concepto de Parábola (en adelante, abreviada ESDpCP) se toman como punto de partida los conocimientos previos del estudiante y, a partir de diferentes construcciones abordadas en la ESDpCP, el estudiante puede mejorar su propio nivel de razonamiento al tomar como referencia los descriptores formulados.

Esto se logra gracias a que, al aplicar la ESDpCP, se realizan procesos de indagación, planteamiento de conjeturas, análisis de construcciones, y planteamiento y resolución de problemas de la vida cotidiana, de manera que, el estudiante puede formar parte activa de su propio proceso de comprensión.

Finalmente, en relación a la metodología empleada, el software *GeoGebra* y de la plataforma GeoGebra Classroom adquieren un sentido especial, toda vez que, aunque la situación actual debida a la pandemia del coronavirus SARS-CoV-2 o su enfermedad conocida como COVID 19 obligó al trabajo académico virtual, es necesario aclarar que el uso del software y su plataforma coincidió con las necesidades del momento y los propósitos iniciales del estudio planteados en 2017.

5.2 Recomendaciones

Una vez culminada la tesis doctoral, se pueden plantear otras investigaciones que permitan potenciar el diseño de la Entrevista Socrática Dinámica para la comprensión de múltiples conceptos matemáticos contemplados en los lineamientos curriculares en la educación básica y media o en programas universitarios, que permitan consolidar unas características propias de dicha entrevista como instrumento eficaz para evaluar la comprensión. Estas nuevas investigaciones deben partir de un estudio minucioso del concepto para el cual se desean consolidar los descriptores: posteriormente, es importante determinar el mecanismo a utilizar para, finalmente, establecer los

PREPRINT

descriptores para cada nivel de razonamiento, los cuales darán cuenta de la evolución de la comprensión acerca del concepto.

También se pueden realizar investigaciones acerca de la comprensión de otros objetos matemáticos que impliquen altos niveles de abstracción, a partir del uso de instrumentos psicométricos similares a la entrevista socrática desarrollada en esta investigación, y con base en los niveles del modelo de van Hiele, identificar estrategias didácticas diversas que permitan lograr el aprendizaje por parte de los estudiantes y ampliar su comprensión y el dominio de los conceptos matemáticos que requieren para avanzar en otros niveles de su proceso educativo.

Así mismo, queda abierta la puerta para desarrollar investigaciones relacionadas con el diseño de módulos de instrucción, con apoyo de *GeoGebra*, donde se trabaje paso a paso cada uno de los aspectos necesarios para la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, y su aplicación en la resolución de problemas diversos, para que el estudiante pueda avanzar de un nivel de razonamiento al siguiente, en correspondencia con las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele.

Con el propósito de indagar la influencia de las TIC en las investigaciones que se vienen desarrollando en el ámbito educativo, específicamente en el campo de la educación matemática, se considera conveniente desarrollar estudios analíticos que permitan establecer las ventajas y desventajas del diseño de una entrevista socrática en el marco del modelo de van Hiele, a partir del uso de otros medios, que no requieran de un soporte tecnológico, así como también, investigaciones comparativas, que permitan identificar diferencias y semejanzas en relación con medios que se basan en el uso de la tecnología, a través de los descriptores que han emergido de estudios realizados.

Dado que el cuarto nivel de razonamiento en el presente estudio no es abordado, queda abierta la posibilidad de continuar con la generación de descriptores para el

cuarto nivel de razonamiento, a través de una entrevista socrática dinámica, con la cual se esperaría que el estudiante abordara formalmente el concepto de lugar geométrico en sus diversas manifestaciones y objetos matemáticos involucrados. De acuerdo con Jaime & Gutiérrez (1990), un estudiante en este nivel debe estar en capacidad de realizar demostraciones de propiedades que antes se habían abordado de manera informal, por lo que se sugiere que el estudio sea llevado a cabo con estudiantes universitarios, sin dejar de lado la posibilidad de que algunos estudiantes de la educación básica y media puedan tener las condiciones necesarias para ello.

Con ayuda del software *GeoGebra*, es posible convertir el aula en un laboratorio de investigación, no sólo en el área de Matemáticas sino hacerlo de manera transversal, donde el profesor consolide experiencias educativas y pueda compartirlas con sus estudiantes y con otros profesores, de tal manera que se fortalezca su rol pedagógico y articularlo con el rol investigativo, para dar respuesta a la pregunta: *¿cómo comprenden los estudiantes los conceptos abstractos propios de las Matemáticas?* Esto permitirá socializar propuestas innovadoras y dar solución a los problemas encontrados en el aula.

RED-UNET

CAPÍTULO VI.

PROPUESTA

RED-UMECIT

6.1. Denominación de la propuesta

El presente capítulo describe con detalle la propuesta desarrollada, la cual tiene por objetivo diseñar un instrumento que permita describir la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico. A continuación, se presenta el manual del instrumento de carácter académico y se denomina *Entrevista Socrática Dinámica para la Comprensión del Concepto de Parábola como Lugar Geométrico* (ESDpCP).

6.2 Descripción de la propuesta

La versión definitiva de la entrevista socrática **(**ESDpCP) es un guion de entrevista semiestructurada de carácter socrático, mediada por el software de geometría dinámica *GeoGebra*, y cuyo fin es describir cómo comprenden, los estudiantes de educación media, el concepto de parábola como lugar geométrico; esta entrevista admitió cambios y mejoras en su estructura a medida que se avanzaba en la investigación. Se caracteriza por formular preguntas abiertas, acerca de construcciones realizadas en el software, además invita durante su aplicación al diálogo permanente entre entrevistador y entrevistado. La entrevista se fundamenta en el marco del modelo de van Hiele y se establece el nivel de razonamiento de un estudiante frente al concepto matemático de parábola como lugar geométrico, mediante la cual este reflexiona sobre las preguntas y sus respuestas. Además, se detecta el paso de un nivel al inmediatamente superior al crear una nueva red de relaciones que incorpora nuevos conceptos o nuevas relaciones a la anterior.

Se usa el modelo van Hiele para contemplar los niveles de razonamiento con una secuencia gradual ya que admite la identificación de diferentes tipos de razonamiento, a la luz de descriptores determinados en cada nivel y fases de aprendizaje, para encaminar a los estudiantes a alcanzar un nivel superior de razonamiento.

PREPRINT

Es de resaltar que el entrevistado durante la implementación de la entrevista pasa por tres momentos: el primero es creer saber la respuesta a la pregunta relacionada con la construcción, luego, a través de las mismas preguntas se da cuenta que no sabe (esto surge a partir de un proceso de problematización dirigido por el profesor), con lo cual se le exige modificar o crear una nueva construcción en el software; por último, al estar en contradicción consigo mismo, y al observar esas contradicciones en las construcciones, el estudiante se plantea la necesidad de llegar a la verdad, es decir, a la comprensión del concepto.

6.3 Fundamentación

De acuerdo con el modelo se determinan los niveles y la forma como razona el estudiante; Calderón (2013) presenta los siguientes niveles

- Nivel 1: De visualización o reconocimiento. Perciben las figuras geométricas en su totalidad, de manera global, como unidades, al generar en ocasiones características que no corresponden a las descripciones que hacen.

- Nivel 2: De análisis. Las figuras geométricas están formadas por elementos que describen y proporcionan propiedades informalmente.

- Nivel 3: de Ordenación o clasificación. Se cambia la forma de percibir las figuras geométricas, se ven como conjuntos de elementos que cumplen algunas propiedades para el razonamiento matemático.

- Nivel 4: De deducción formal**.** Los estudiantes pueden hacer demostraciones formales y descubrir y probar nuevas propiedades más complejas.

- Nivel 5: De rigor**.** Es el último nivel, y a pesar que se ha hecho hincapié de que los niveles no están relacionados con la edad, es muy probable que corresponda a un nivel propio del nivel universitario o profesional.

PREPRINT

En sus trabajos, los van Hiele enfatizan que el paso de un nivel a otro depende de la enseñanza recibida y de los materiales usados. Las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele, según Jaime y Gutiérrez (1990) son:

- Fase 1: Preguntas/información. Fase oral y mediante preguntas.
- Fase 2: Orientación Dirigida. Constituye una serie de actividades secuenciadas, para que el estudiante descubra, comprenda, asimile y aplique.
- Fase 3: Explicación (Explicitación): Es una fase de interacción entre estudiante-intercambio de ideas y experiencias-, en la que el papel del profesor es corregir el lenguaje de los estudiantes.
- Fase 4: Orientación Libre. El estudiante se enfrenta a actividades más complejas referidas a aplicar lo adquirido.
- Fase 5: Integración: El estudiante adquiere una visión general de los contenidos y métodos que tienen a su disposición, y relaciona los nuevos conocimientos con otros campos.

En cuanto a la entrevista socrática, De la Torre (2003) señala que el camino hacia el conocimiento es un proceso gradual. Así mismo, Sucerquia et al. (2013) señalan que la entrevista socrática es un medio adecuado para realizar el seguimiento de la construcción y evolución de un concepto matemático en la mente del estudiante.

De otro lado, de acuerdo con Jaramillo & Campillo (2011), la entrevista socrática es una herramienta fundamental en estudios realizados, debido a que ha permitido determinar los niveles de razonamiento a la luz del modelo de van Hiele.

Para el diseño de la entrevista socrática se tuvo en cuenta a Londoño (2011) y Jurado & Londoño (2005), para definir e incorporar las siguientes características:

- La intencionalidad de la entrevista.

REPOSITORIO

- El lenguaje.
- Conceptos básicos.
- Experiencias previas del entrevistado.
- El diálogo inquisitivo.
- La movilización del pensamiento.
- Aporte de información.
- Problematización con las ideas.
- El paso por los tres momentos.
- Red de relaciones.

Estas características constituyen un decálogo para desarrollar una entrevista socrática que facilite un diálogo fluido con el estudiante, y, por lo tanto, deben ser tenidas en cuenta, si se quiere lograr el objetivo deseado.

6.4 Objetivos de la propuesta

6.4.1 Objetivo general

El objetivo de la entrevista socrática dinámica diseñada es evaluar el nivel de razonamiento de los estudiantes de décimo grado acerca del concepto de parábola como lugar geométrico, y a partir del modelo de van Hiele, con apoyo de software dinámico, cumpliendo con los criterios de validez y confiabilidad.

6.4.2 Objetivos específicos del instrumento

Los objetivos específicos de la entrevista socrática dinámica, diseñada en la presente investigación, son los siguientes:

REPOSITORIO UMECIT

- Identificar el nivel de razonamiento predominante en el cual se encuentra el estudiante razonando, acerca del concepto de parábola como lugar geométrico, y sus características, a partir de los descriptores aportados por van Hiele.

- Caracterizar las habilidades de razonamiento, que poseen los estudiantes de educación media con fines de la clasificación en uno de los niveles de razonamiento según van Hiele, de acuerdo a la comprensión de la parábola como lugar geométrico.

- Detectar vacíos de comprensión frente a la parábola como lugar geométrico, por parte el estudiante, en diferentes niveles.

- Aportar, al profesor, elementos para identificar los aspectos que se requieran para reforzar y apoyar al estudiante en su proceso de comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico.

6.5 Beneficiarios de la propuesta

Los primeros beneficiarios de la propuesta serían los profesores. La ESDpCP se debe utilizar como elemento didáctico y de evaluación para detectar el nivel de razonamiento de sus estudiantes frente al concepto de parábola como lugar geométrico, utilizando la tabla de categorización y los baremos propuestos. El profesor que aplique la entrevista debe manejar conceptos básicos en Álgebra y Geometría Euclidiana. Además, los evaluadores deben tener claro el concepto de parábola como lugar geométrico. Una vez implementado el instrumento, y evaluado el nivel de compresión de cada estudiante, el profesor puede construir actividades pertinentes en las siguientes etapas del proceso de enseñanza, de acuerdo al nivel de razonamiento de cada estudiante, para facilitar la movilización de un nivel a otro.

Por otro lado, los beneficiarios de la propuesta también son los estudiantes de grado décimo, quienes pueden aprovechar las ventajas de la entrevista socrática

dinámica para conocer su nivel de razonamiento y mejorar su nivel de comprensión, merced al software *GeoGebra* que le permite dotar de movimiento a las figuras, cualidad que permite analizarlas desde diferentes perspectivas y comprender los conceptos y propiedades asociadas a ellas, esto, al emplear las opciones de arrastre del programa; es decir, la ESDpCP ayudará a los estudiantes a mejorar su comprensión en el concepto en cuestión y otros subyacentes a él.

En general, las instituciones educativas también serán beneficiadas gracias a que la ESDpCP se fundamenta en los EBCM y los DBA emitidos por el MEN de Colombia, esto ayudará a mejorar los resultados tanto de las pruebas internas como externas, lo que va a generar mejoras en los razonamientos matemáticos de la comunidad educativa, y a aportar valor agregado en conocimientos e innovación en las aulas de clase

6.6 Localización

En cuanto a la localización geográfica, la ESDpCP fue diseñada para estudiantes que cursan el grado décimo de la Institución Educativa Francisco de Paula Santander de la ciudad de Bucaramanga, Colombia, pero como la entrevista se basa en los EBCM y los DBA emitidos por el MEN de Colombia, se puede aplicar en cualquier institución educativa colombiana que ofrezca el nivel de educación media. Sin embargo, se debe ampliar la validez de acuerdo a otros grados y características de las instituciones educativas.

6.7 Configuración y características del instrumento

La ESDpCP está conformada por 36 preguntas, cada una de ellas se ubica en uno de los cuatro conjuntos de preguntas que corresponden a los cuatro primeros niveles de razonamiento del modelo de van Hiele: Nivel 0-Predescriptivo; Nivel I - de Reconocimiento Visual; Nivel II - de Análisis y el Nivel III de - Clasificación, de acuerdo con los descriptores de nivel que surgieron en la investigación. Esto con el fin

de caracterizar la comprensión de cada uno de los estudiantes que responda la entrevista socrática dinámica, y descubrir el nivel en el que está razonando.

A continuación, se especifican y analizan los descriptores de los niveles 0, I, II y III del concepto de parábola como lugar geométrico, según el modelo de van Hiele:

- Nivel 0: Predescriptivo: Las nueve preguntas 1a, 1b, 1c, 4a, 4b, 4c, 5, 7 y 9 están relacionadas con el solo reconocimiento de los objetos de estudio o conocimientos previos, los cuales son necesarios para comprender el concepto de parábola como lugar geométrico. Algunas de las características que presentan estas preguntas es que permiten ver si el estudiante reconoce objetos geométricos que no son definibles como punto, segmento, recta y plano, así como reconocer que por dos puntos pasa una única recta y que la distancia más corta entre esos dos puntos es la medida del segmento de recta que los une.

- Nivel-I de Reconocimiento Visual: Este bloque lo constituyen las preguntas 6, 10, 12, 13, 15, 18, 19, 20, 21 y 25. Estas diez preguntas permiten ver si el estudiante construye y visualiza, puntos, rectas, rectas paralelas, rectas perpendiculares en un ambiente de *GeoGebr*a; además, si determina la distancia más corta entre un punto y una recta **y** verifica las condiciones bajo las cuales dos rectas son paralelas o perpendiculares.

- Nivel-II de Análisis: Este bloque de nueve preguntas, las cuales son: 3, 11, 14, 16, 17, 22, 23, 24 y 28) permiten ver si el estudiante halla la distancia entre cada uno de los puntos de un conjunto dado y un punto fijo, y entre los primeros y una recta fija en un ambiente de *GeoGebra*; además, ubica algunos puntos que satisfacen la condición de estar a la misma distancia de un punto fijo y una recta fija. Un estudiante del nivel II no podrá progresar al nivel III hasta que no sienta la necesidad de definir la parábola formalmente.

- Nivel-III de Clasificación: Este bloque contiene las preguntas 2, 8, 26, 27, 29, 30, 31, 32. Estas ocho preguntas se corresponden con los descriptores de nivel III; algunas de las características que estas presentan es que permiten observar si el estudiante establece la condición para que un conjunto de puntos pertenezca a la elipse en el ambiente de *GeoGebra* y, de esta manera, manifiesta la necesidad de definir de manera formal la parábola como lugar geométrico.

En dos de las preguntas que se formulan se ofrece información perentoria (definición de nuevos conceptos, relaciones con otras ideas afines, ampliación del vocabulario, entre otros), para que el estudiante razone y adquiera la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico. Pero, de acuerdo con Jurado & Londoño (2005), se debe tener especial cuidado para que la información suministrada no sugiera enseñanza ni explicación alguna.

A continuación, en la Figura 27 se presenta el instrumento Entrevista Socrática para la Comprensión del Concepto de Parábola como Lugar Geométrico, a partir del modelo de van Hiele, con sus respectivas preguntas, tal como se organizaron para su administración.

Entrevista socrática dinámica para la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico. (ESDpCP)

Autor: William Eduardo Calderón Gualdrón

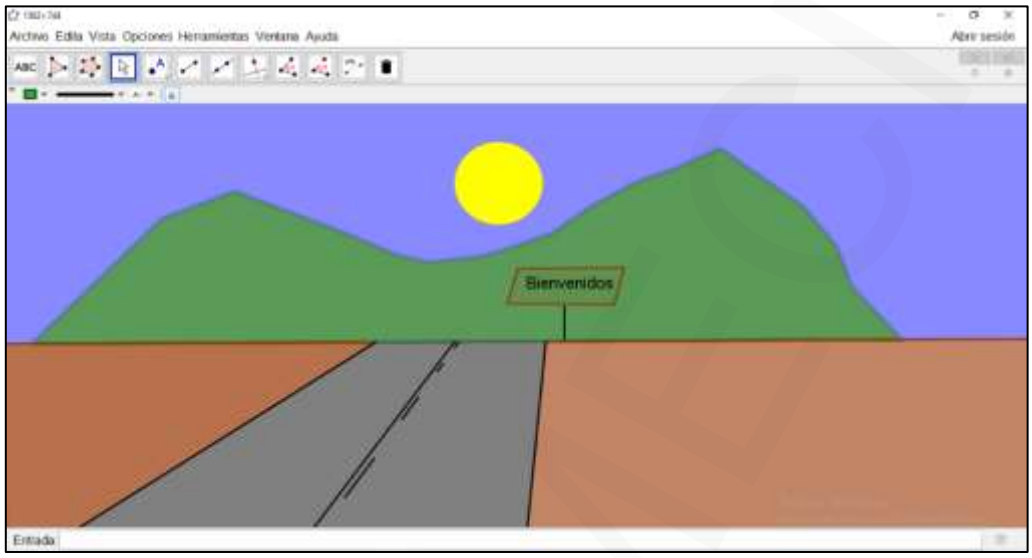
Fecha de Aplicación: _____

Nombre del estudiante: _____Grado_____

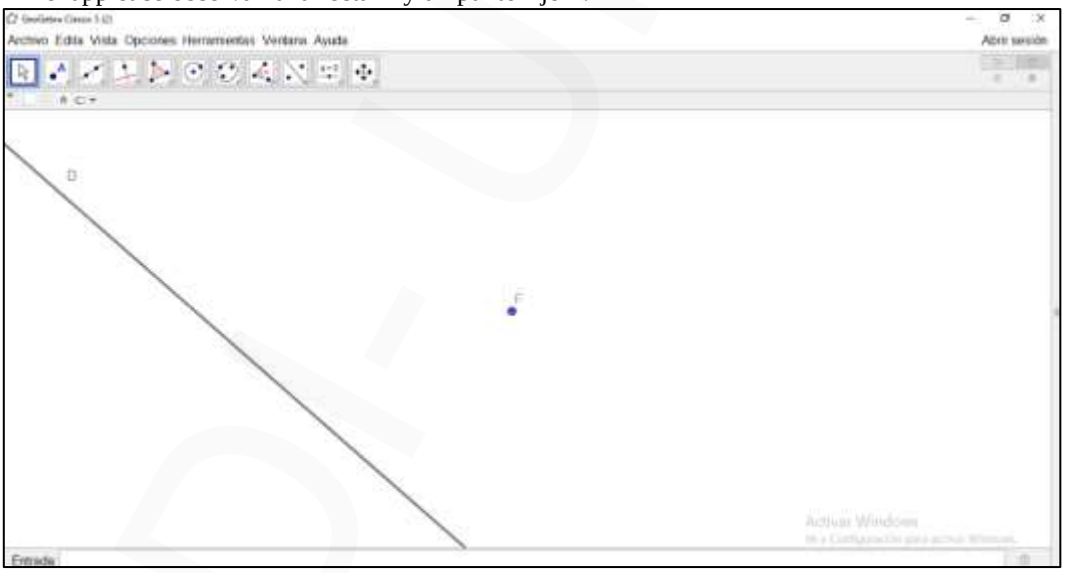
Concepto: La parábola como lugar geométrico

1. Observa la imagen.

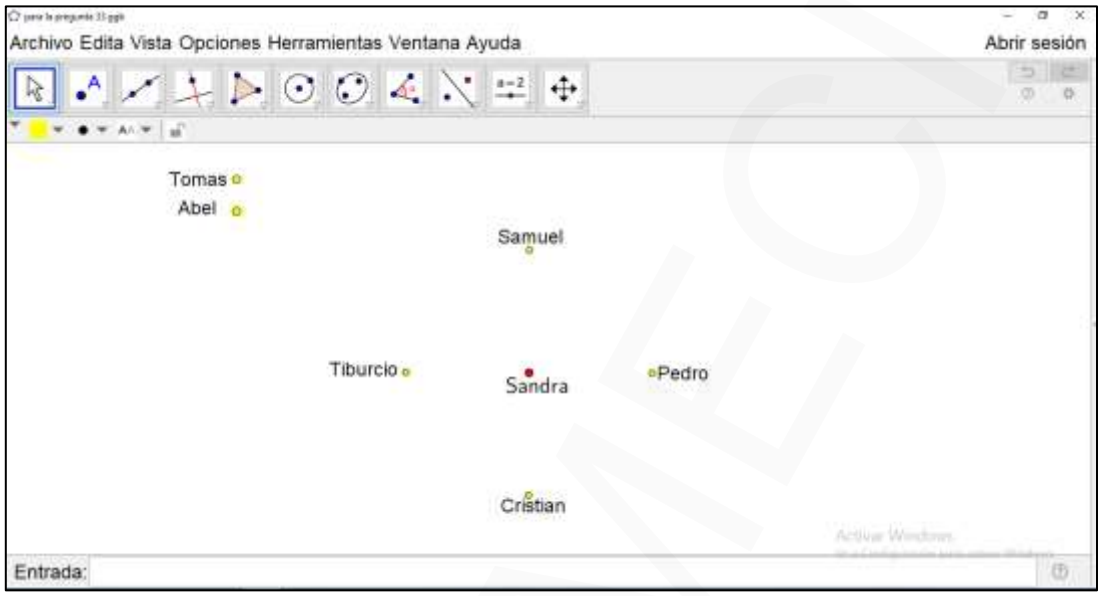
REPRINT



1.a ¿Puedes identificar alguna recta? Explica tu respuesta
1.b ¿Puedes identificar algún segmento? Explica tu respuesta.
1.c ¿Puedes identificar algún punto? Explica tu respuesta.
2. En el applet se observan una recta D y un punto fijo F.



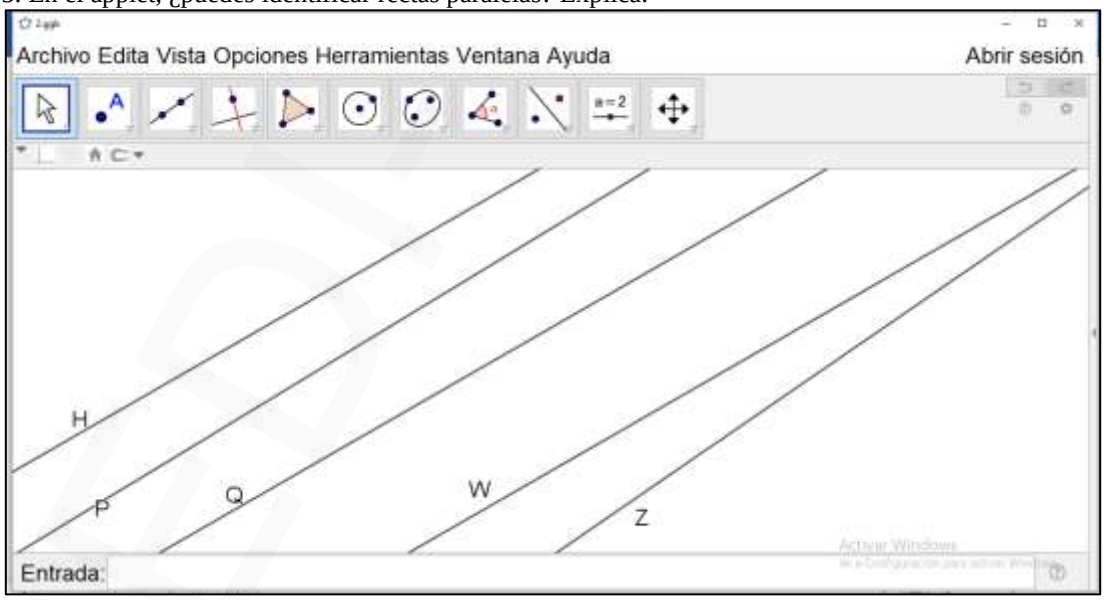
¿Podrías ubicar algunos puntos que equidisten de la recta D y del punto fijo F? Explica cómo lo hiciste.
3. Sandra les ha propuesto un juego a sus amigos, Samuel, Pedro, Cristian, Tiburcio, Tomás y Abel, el cual consiste en que todos deben estar a la misma distancia de ella



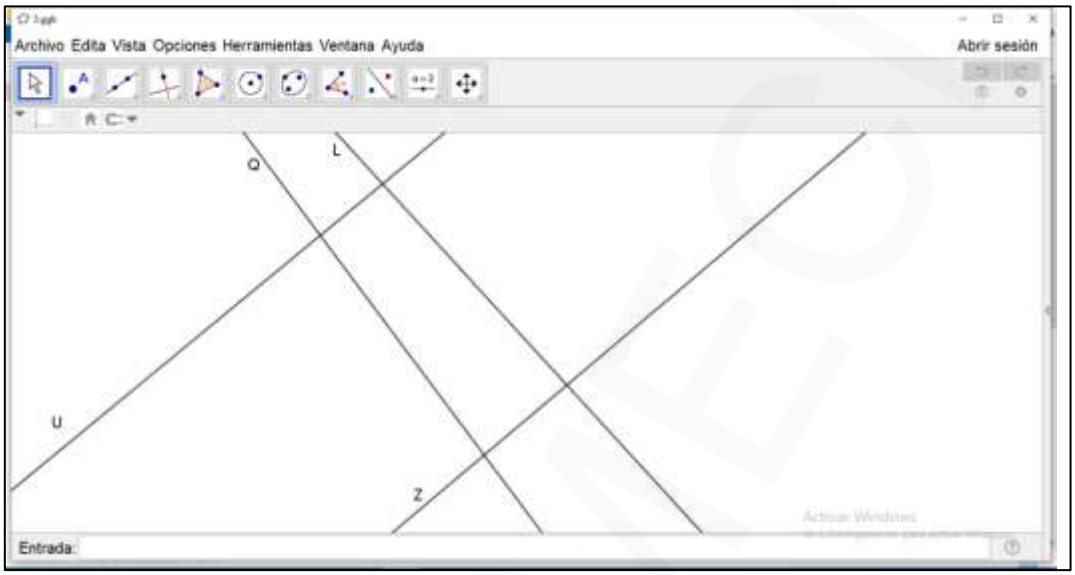
Samuel, Pedro, Cristian y Tiburcio ya están ubicados cumpliendo la condición. ¿Podrías ubicar a Tomás y Abel? ¿Cómo lo harías?

4.a. Expresa alguna idea del término punto.
4.b. Expresa alguna idea del término segmento
4.c. Expresa alguna idea del término recta.

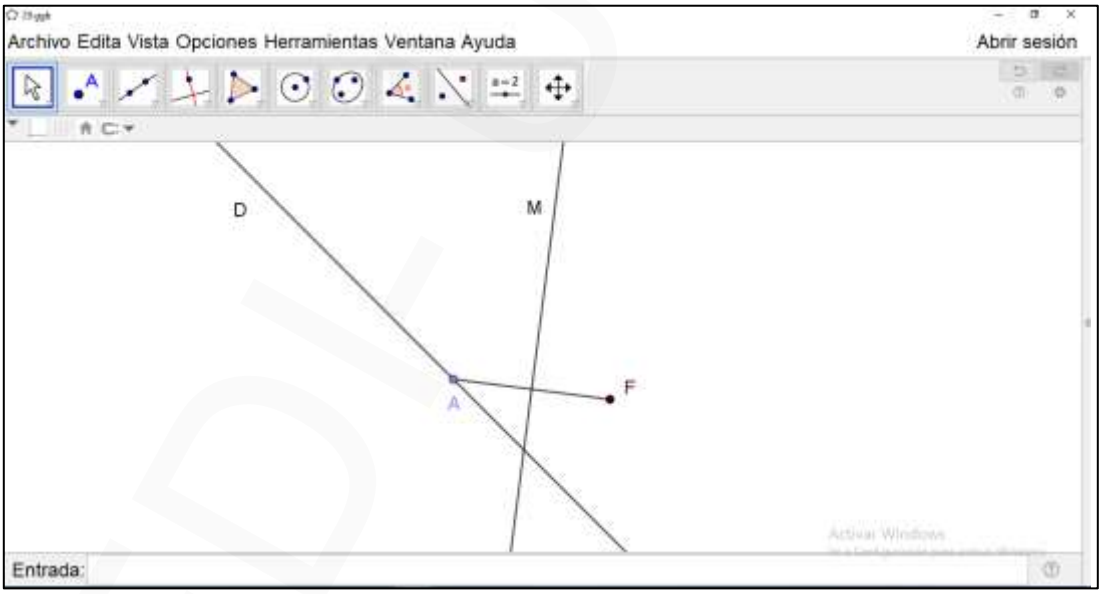
5. En el applet, ¿puedes identificar rectas paralelas? Explica.



6. ¿Cuál crees que debe ser la condición para que dos rectas sean paralelas?
7. En el applet, ¿puedes identificar rectas perpendiculares? Explica.

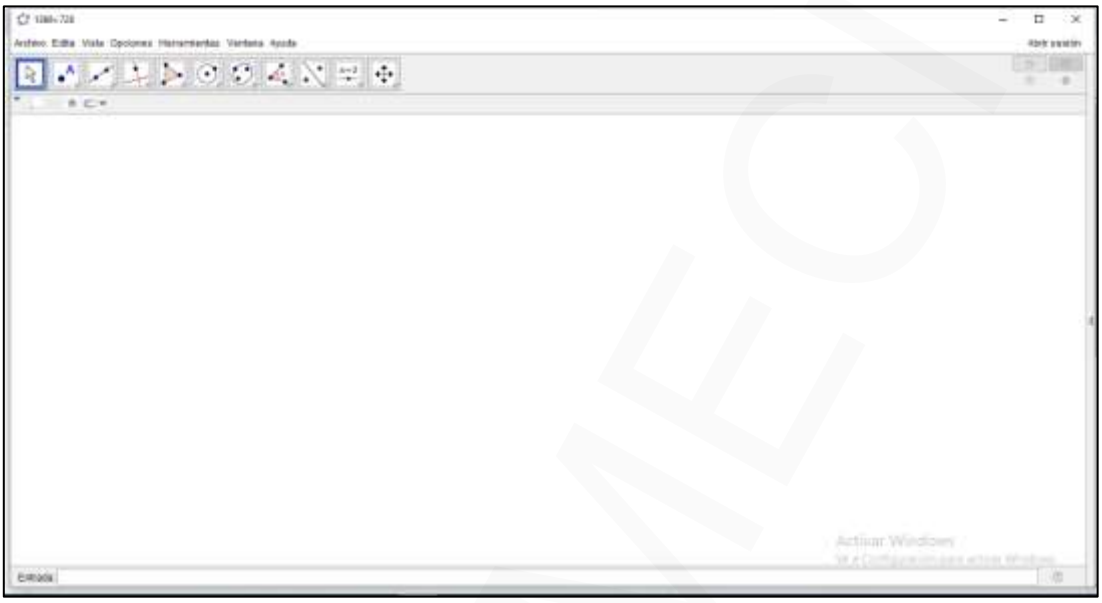


8. En el applet se muestran un punto A cualquiera sobre la recta fija D y un punto fijo F exterior a ella. M es la mediatriz del segmento AF trazado.



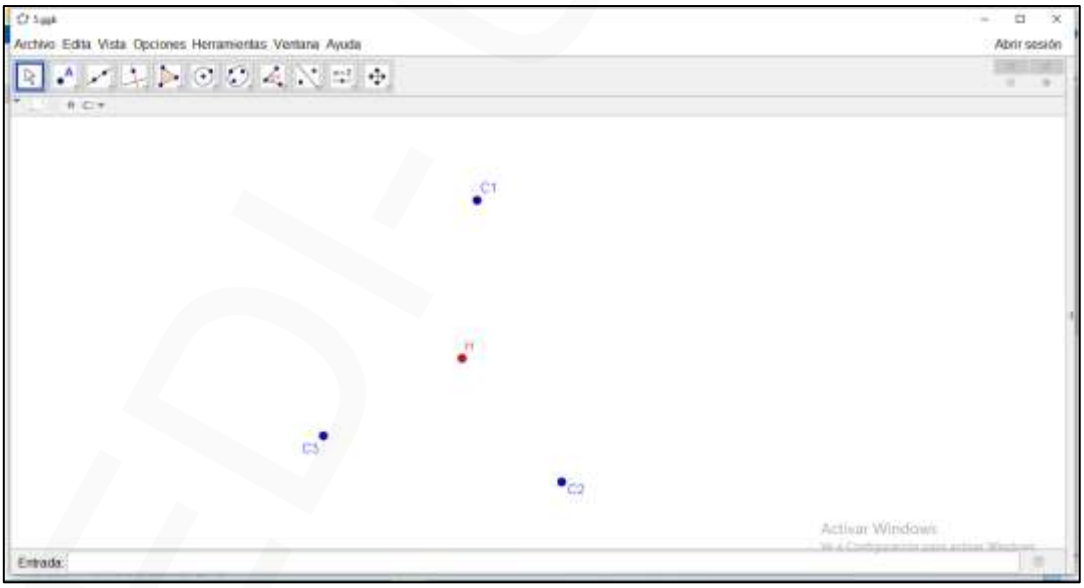
Desliza el punto A sobre la recta D. ¿Dónde deberías ubicar un punto sobre la mediatriz, que equidiste de la recta fija D y del punto fijo F?

9. ¿Cuál crees que debe ser la condición para que dos rectas sean perpendiculares?
10. Ubica un punto y etiquétalo A.



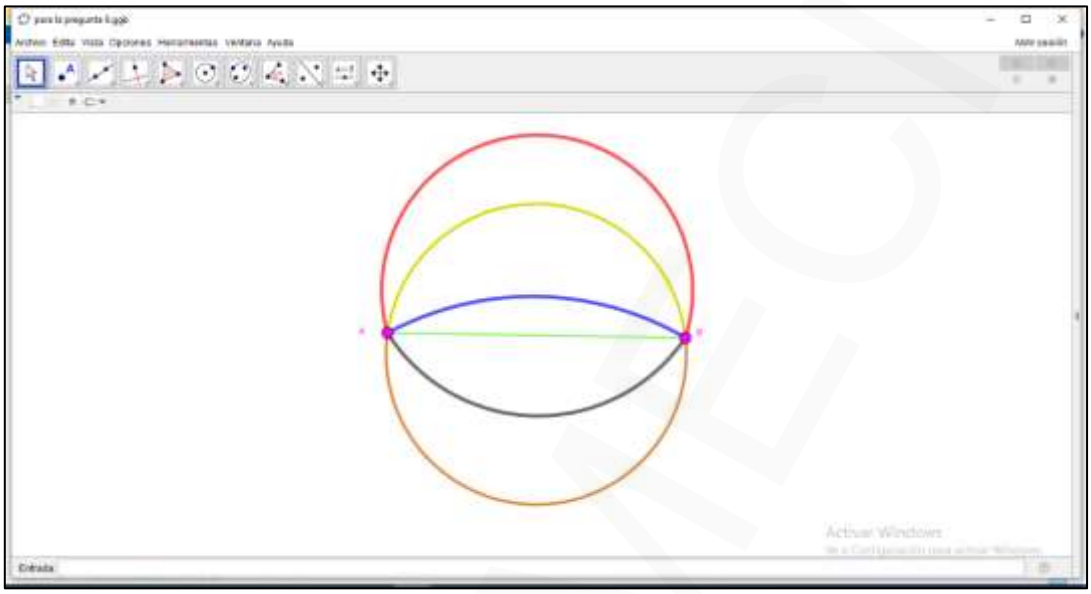
¿Cuántas rectas crees que podrían pasar por A? Traza algunas de ellas si es posible. ¿Podrías trazarlas todas?

11. Una nueva regla de convivencia obliga a que todas las casas que se construyan en un pueblo, deban estar a la misma distancia del hospital.



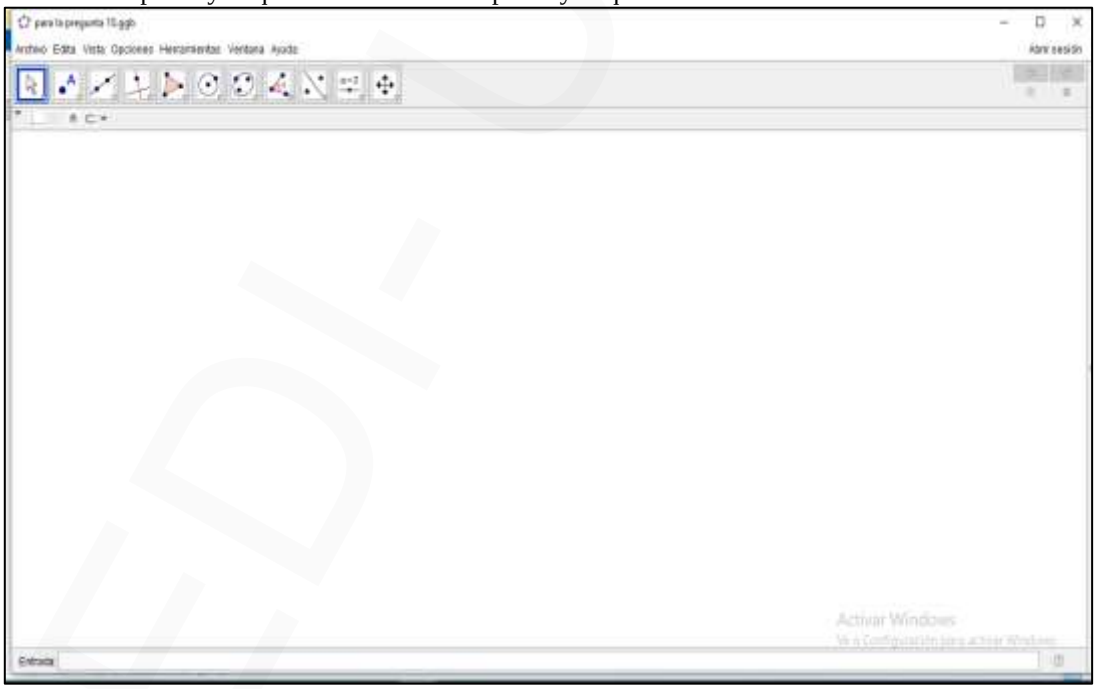
En el applet se aprecian tres casas con esta característica. ¿Podrías ubicar otras dos? ¿Cuántas casas se podrán construir con esta característica?

12. En el applet se muestran algunos caminos para ir desde A hasta B.



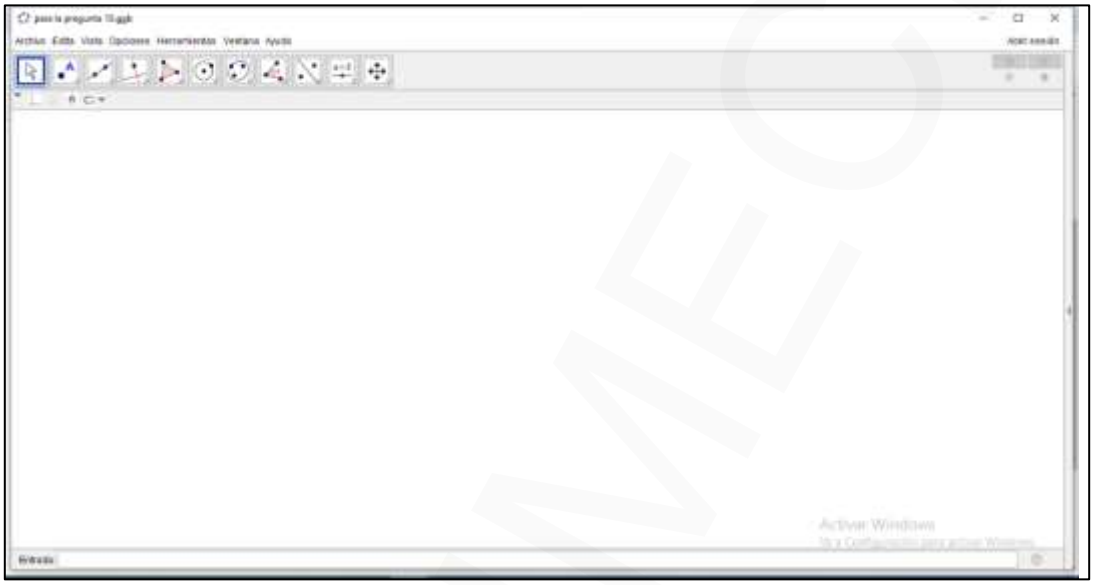
¿Cuál es el camino más corto para ir desde A hasta B (A y B están en un plano)? Justifica tus razones.

13. Ubica un punto y etiquétalo A. Ubica otro punto y etiquétalo B



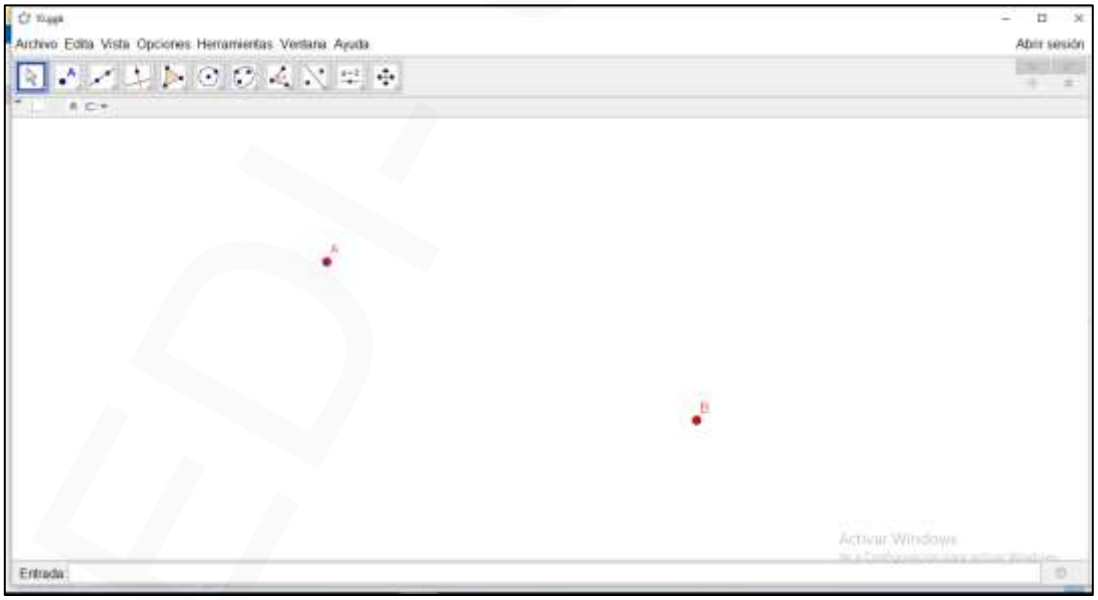
¿Cuántas rectas crees que pasan por A y B? ¿Podrías trazarlas?

14. Ubica un punto y etiquétalo A. Ubica otro punto y etiquétalo B. Luego, traza el segmento que va desde A hasta B.



¿Podrías hallar la distancia entre A y B? ¿Cómo?

15. En el applet se muestran dos puntos etiquetados A y B.



Ubica el punto medio entre ellos.

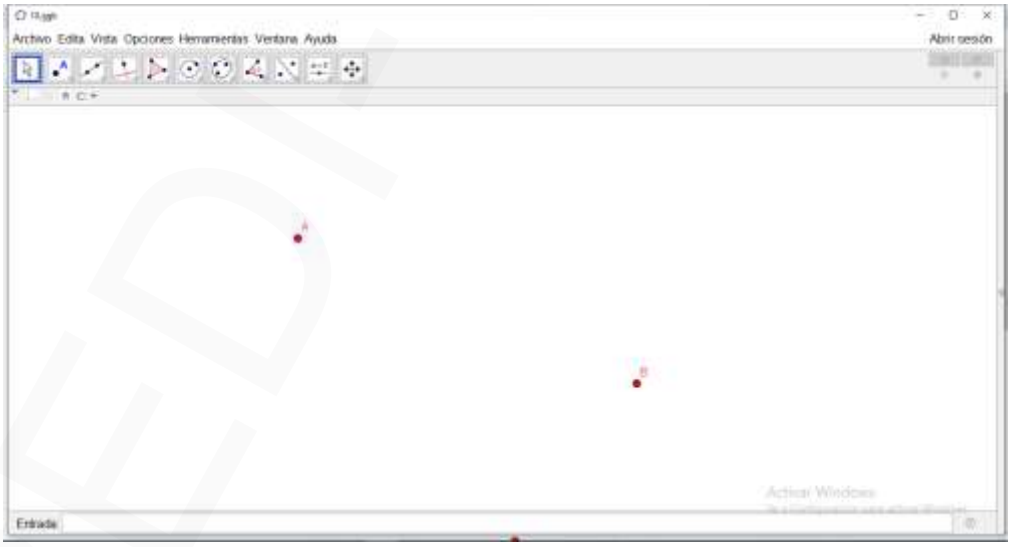
16. En el applet se muestran dos puntos etiquetados A y B.



¿Podrías ubicar otros puntos que estén a la misma distancia del punto A y del punto B? ¿Cómo lo harías? Si es posible, ubícalos.

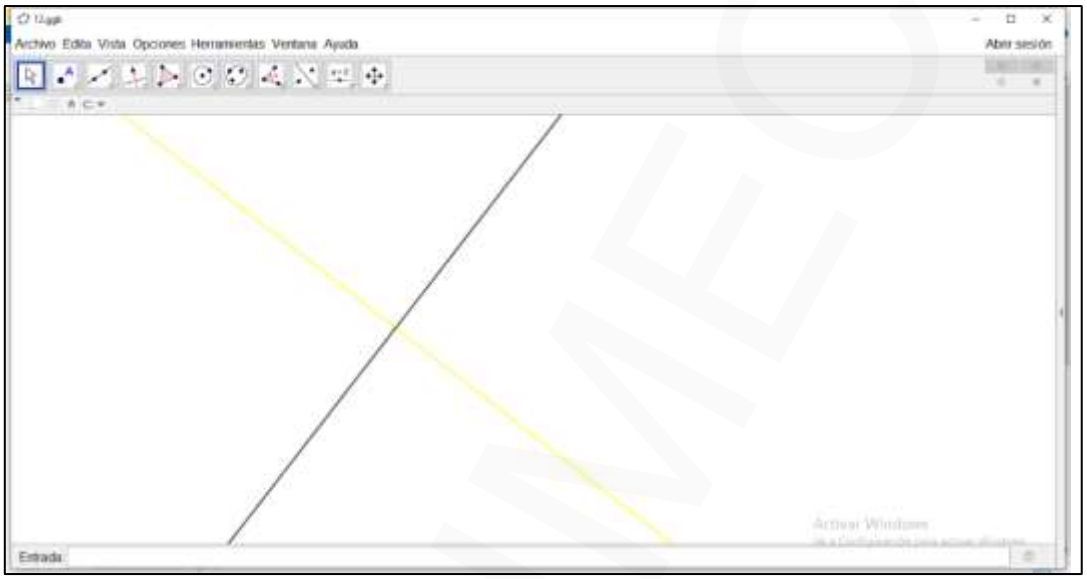
Aporte de información:
Se llama mediatriz a la recta que corta perpendicularmente al segmento en su punto medio.

17. En el applet se muestran dos puntos etiquetados A y B.



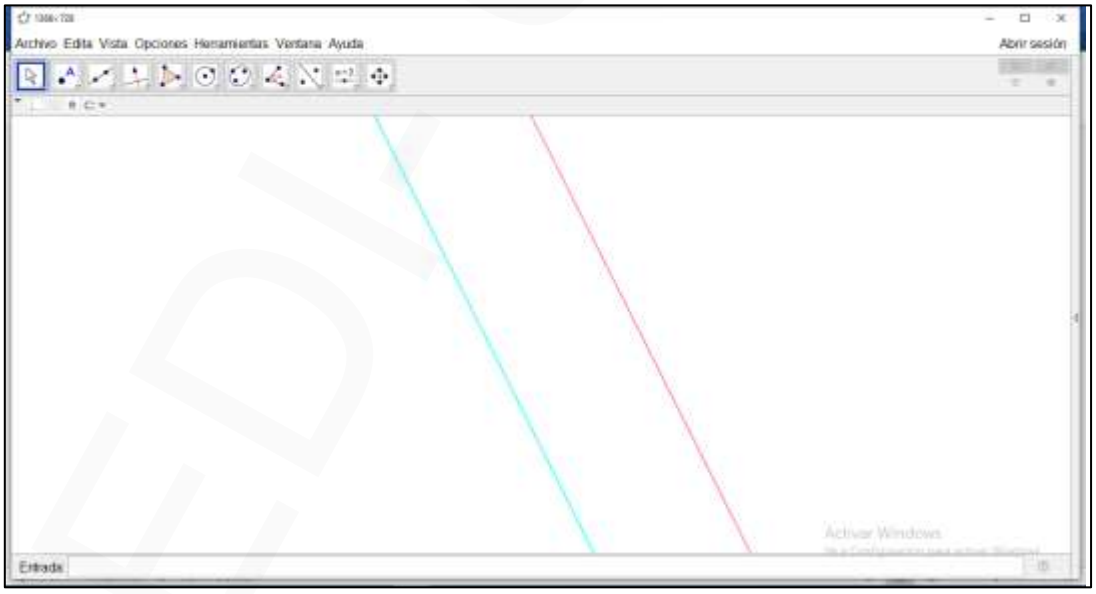
¿Podrías trazar todos los puntos que están a la misma distancia del punto A y del punto B? Si es posible, trázalos.

18. En el applet se muestran dos rectas que se cortan.



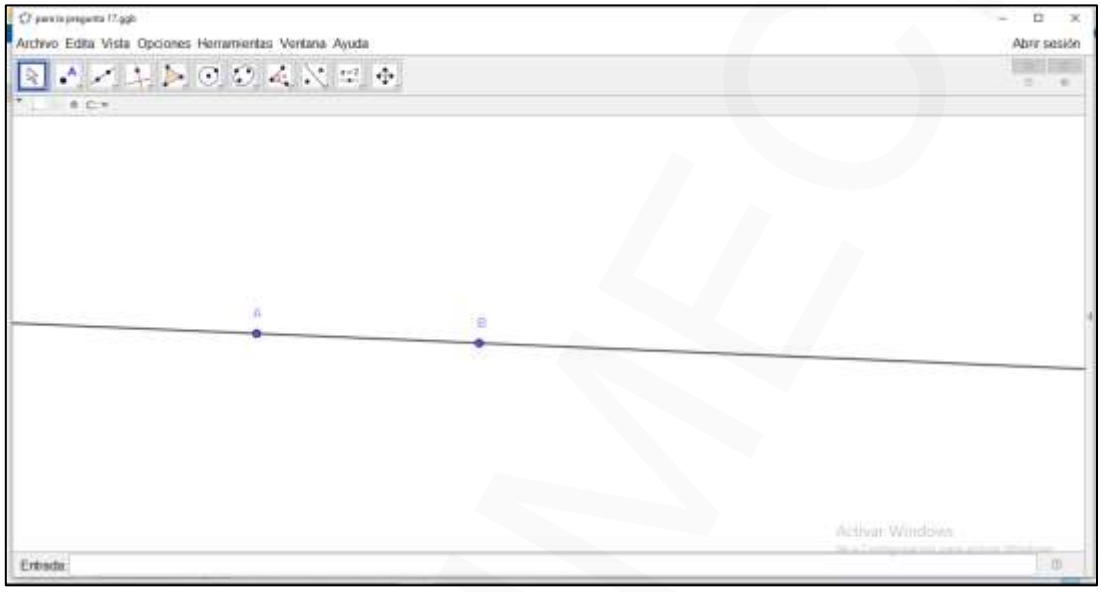
¿Son perpendiculares? ¿Por qué?

19. En el applet se muestran dos rectas.



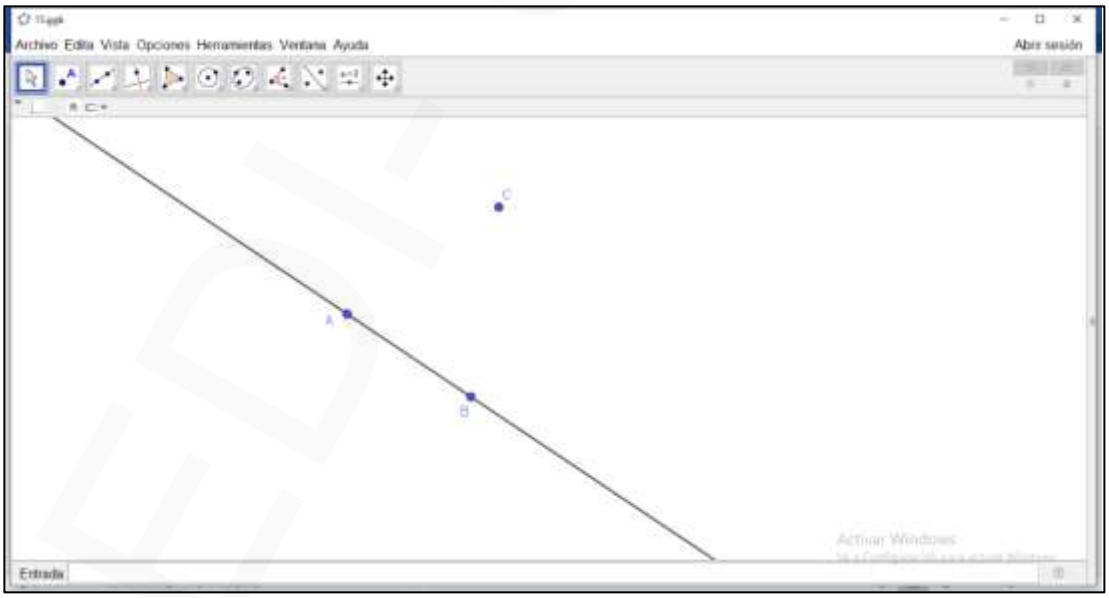
¿Son paralelas? ¿Por qué?

20. En el applet se muestra una recta que pasa por los puntos A y B.



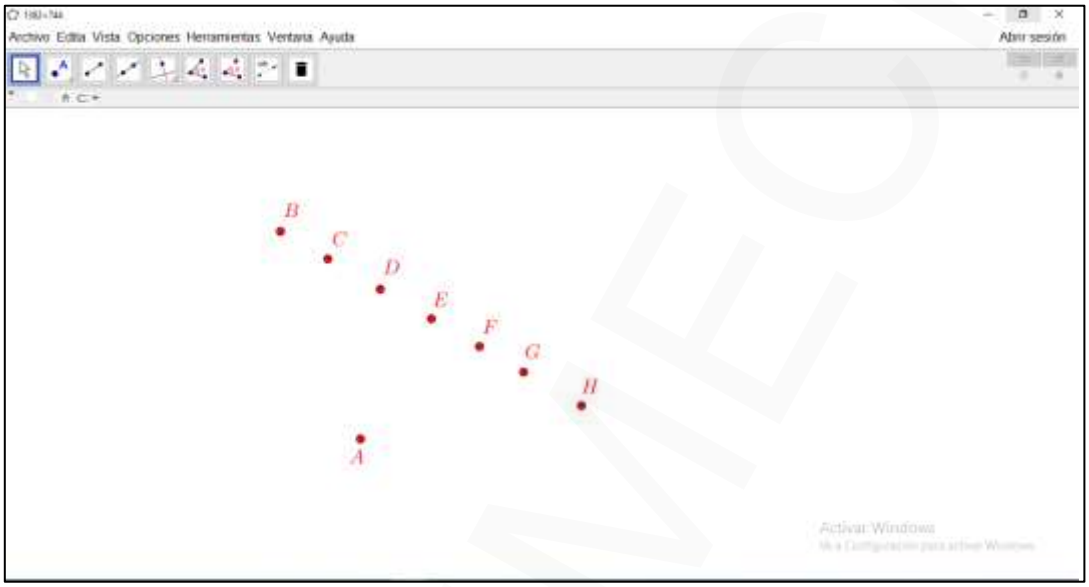
¿Podrías construir una recta perpendicular que pase por el punto A? ¿Cómo lo harías?

21. En el applet se muestran tres puntos A, B, C y una recta que pasa por A y B.



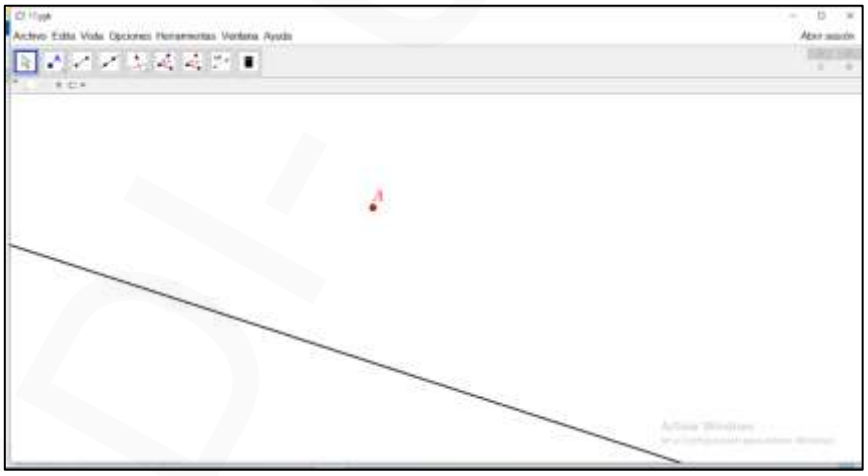
¿Podrías construir una recta paralela que pase por el punto C? ¿Cómo lo harías?

22. En el applet se muestran varios puntos, entre ellos el punto A.



¿Cuál de ellos crees que está más cerca del punto A? ¿Por qué?

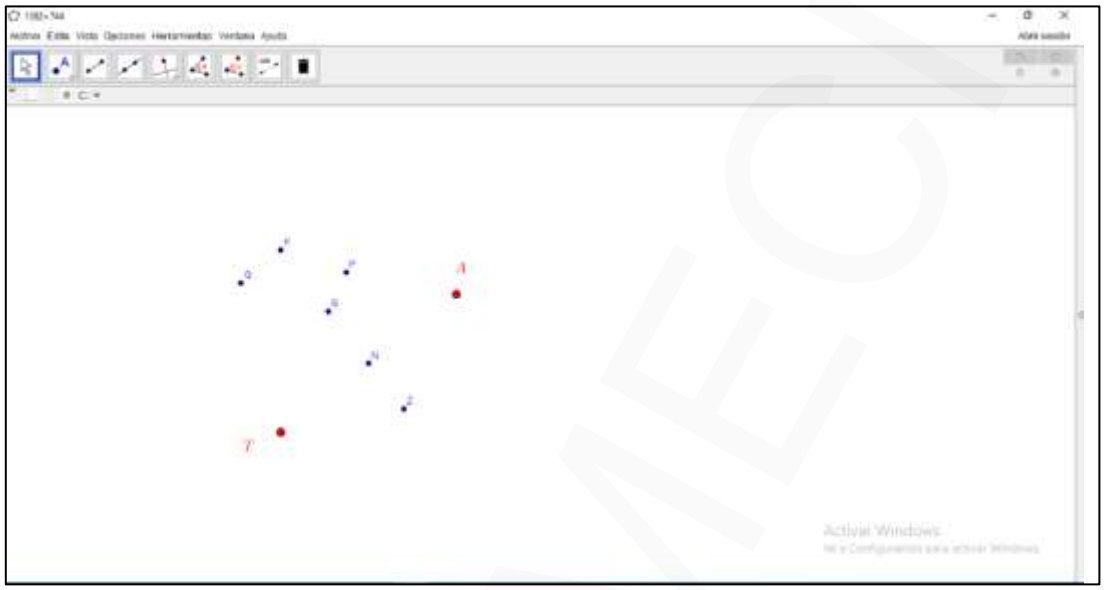
23. En el applet se muestran una recta y un punto A exterior a ella.



¿Dónde deberías ubicar un punto sobre la recta, que esté más cerca del punto A? Ubícalo.

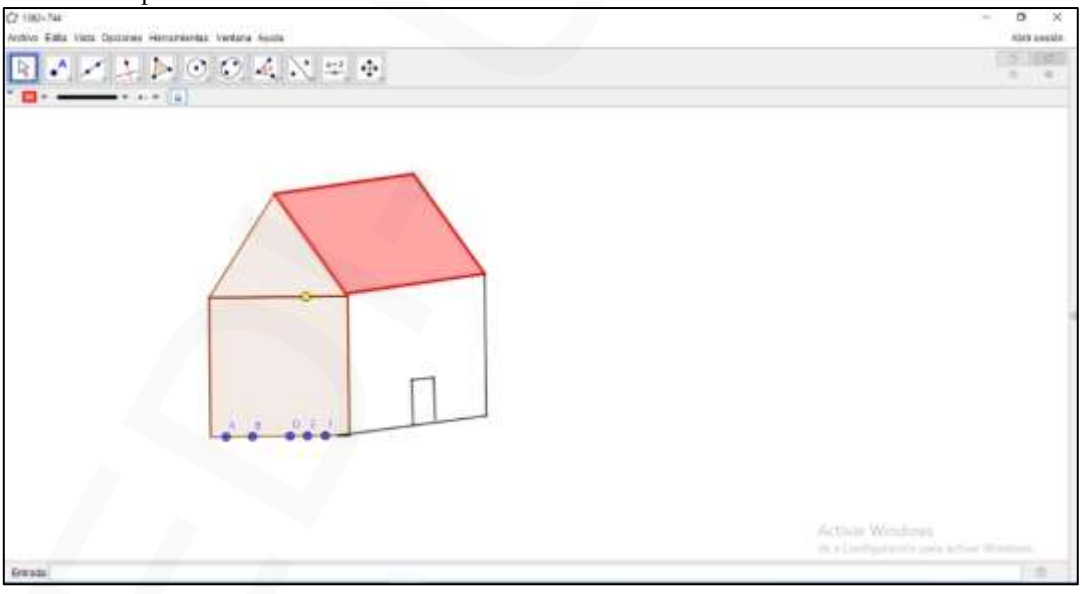
¿Qué condiciones se deben cumplir para que este punto sobre la recta sea el más cercano al punto A?

24. Tiburcio y Anacleto pertenecen al equipo de atletismo del colegio, son vecinos y entrenan todos los días. Como parte de su entrenamiento, ubicaron puntos de meta para hacer sus recorridos, los cuales se encuentran a la misma distancia de ambas viviendas.

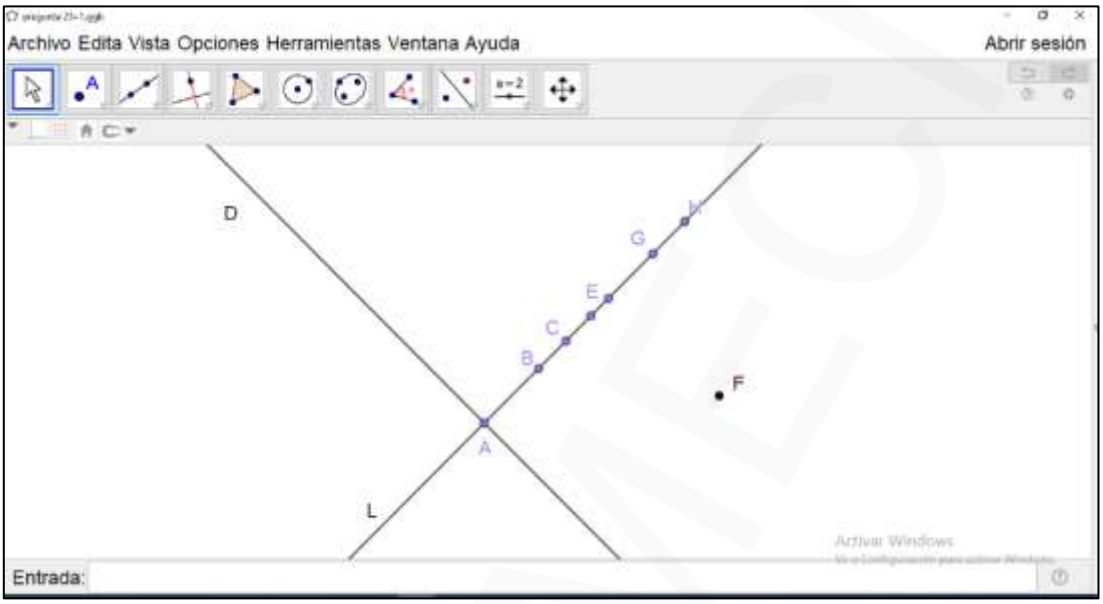


De los puntos que se muestran en el applet, ¿cuáles no son de meta? Es decir, ¿cuáles no se encuentran a la misma distancia de ambas viviendas?
¿Podrías ayudar a Tiburcio y a Anacleto a ubicar otros puntos de meta?

25. Un estudiante de electricidad necesita la menor cantidad de cable posible desde un bombillo en el techo hasta el piso.

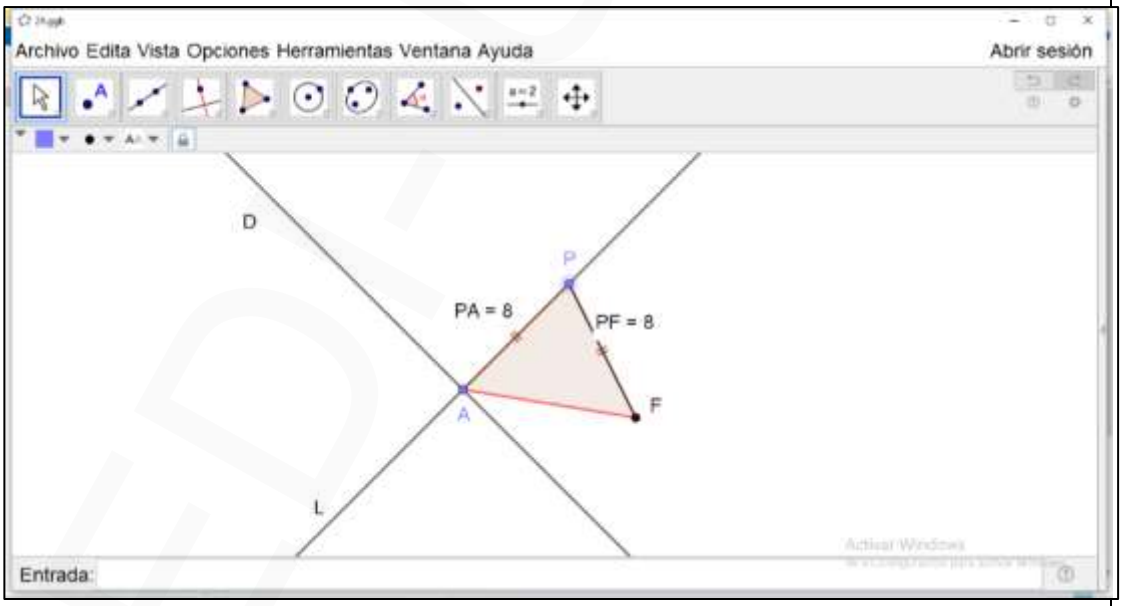


Con base en la imagen que representa la pared, ¿cuál de los puntos del piso (A, B, D, E o F) satisface esta condición? ¿Por qué?
26. En el applet se muestran una recta fija D, otra recta L que la corta perpendicularmente en el punto A y un punto fijo F. Sobre L se marcan otros puntos.



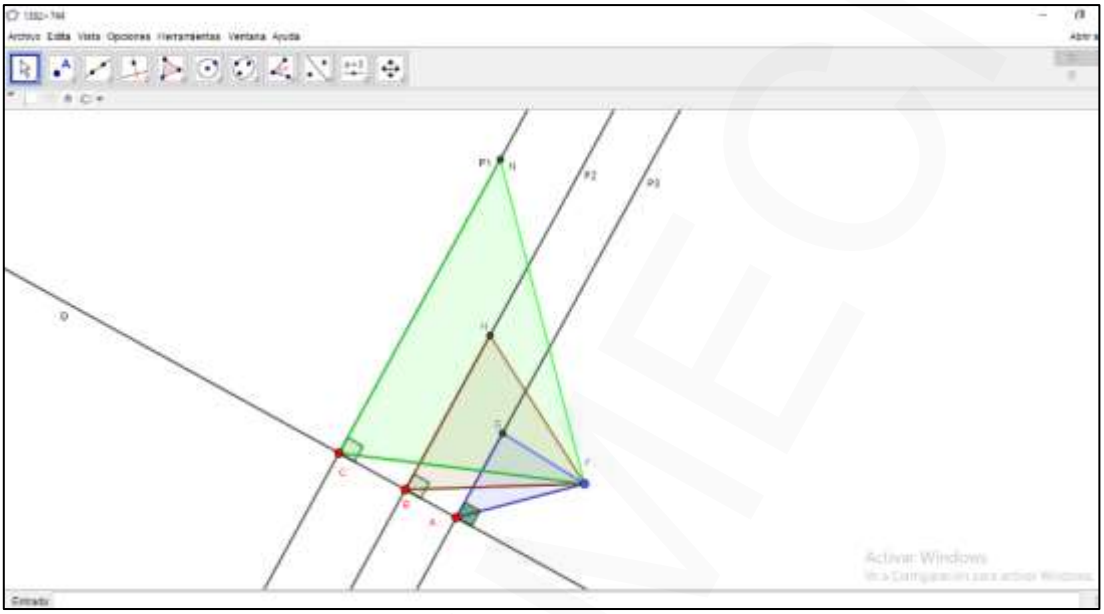
¿Cuál o cuáles de estos puntos equidistan de la recta fija D y del punto fijo F? ¿Es este un punto único? ¿Por qué?

27. En el applet se muestran una recta fija D, otra recta L que la corta perpendicularmente en el punto A y un punto fijo F. Sobre L se marca un punto P, formando el triángulo APF. Desliza el punto A sobre la recta D.



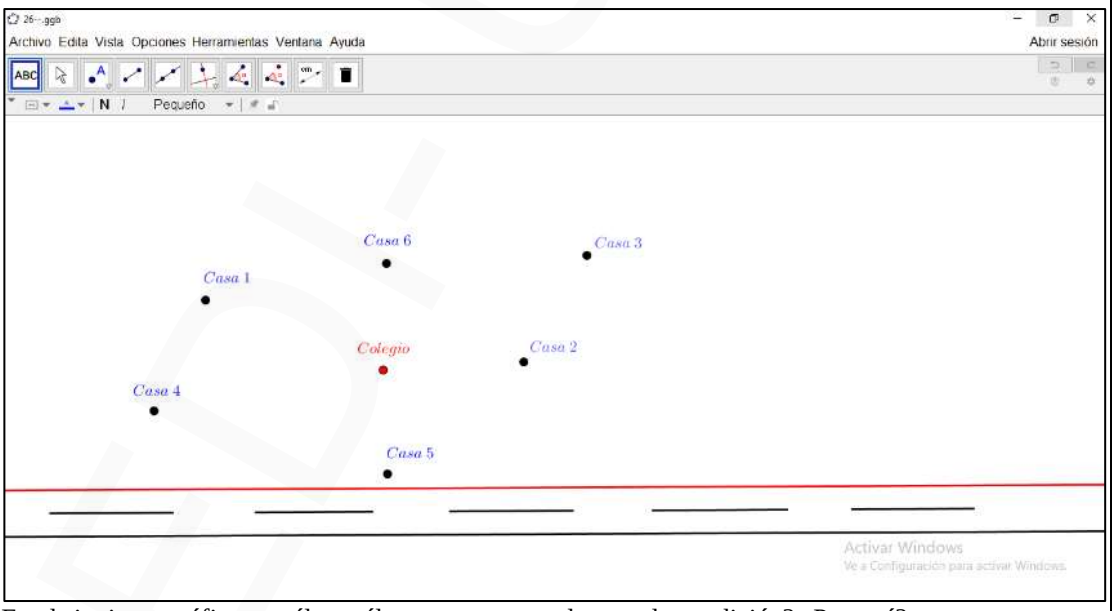
¿Podrías describir la relación entre la distancia del punto P a la recta fija D y del punto P al punto fijo F?

28. En el applet se muestran una recta fija D, otras rectas P1, P2, P3 y P4, que la cortan perpendicularmente en los puntos C, B, A y W, respectivamente, y un punto fijo F. Se trazan los segmentos CF, BF, AF, formando los triángulos CFN, BFN y AFN.



Desliza los puntos C, B y A sobre la recta y describe lo que sucede con los triángulos. ¿Podrías ubicar un punto sobre P4 que forme un triángulo con las mismas características de los otros tres?

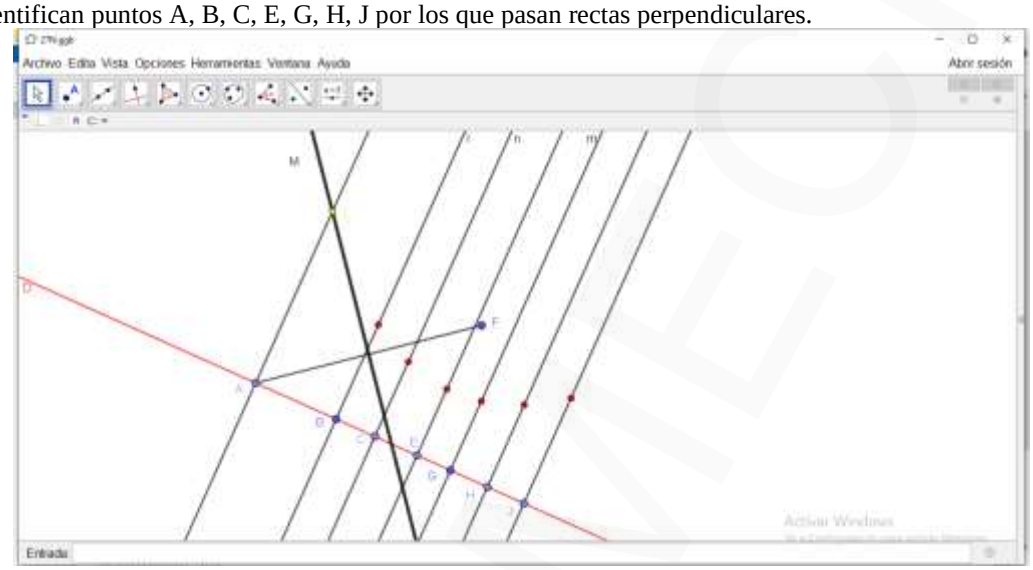
29. En un pueblo, las casas construidas deben satisfacer la condición de que la distancia que hay de ellas al colegio debe ser la misma que de ellas a la carretera.



En el siguiente gráfico, ¿cuál o cuáles casas no cumplen con la condición? ¿Por qué?

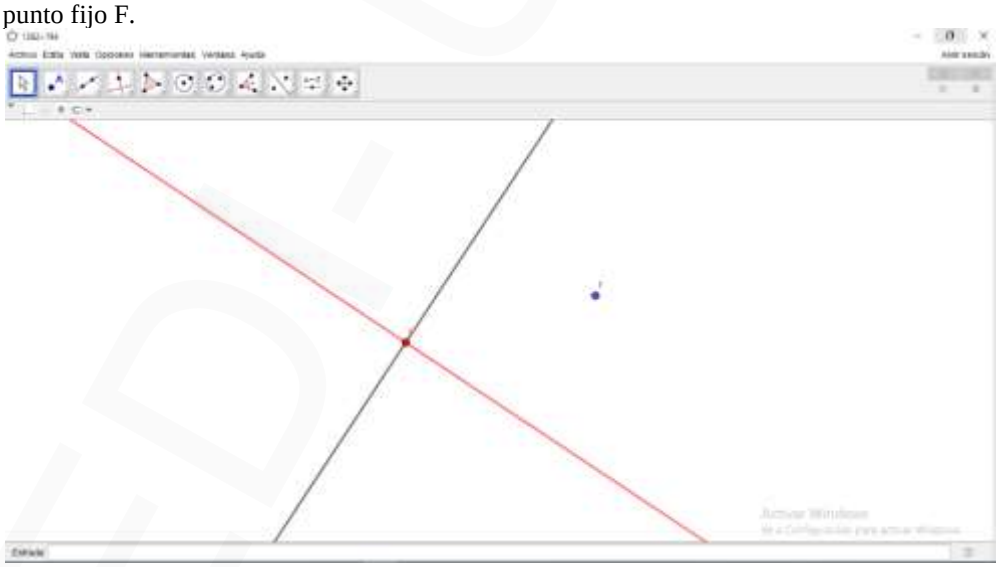
Aporte de información: Se llama lugar geométrico a un conjunto de puntos que satisfacen una propiedad

30. En el applet se pueden observar un punto fijo llamado F y una recta llamada D. Sobre la recta se identifican puntos A, B, C, E, G, H, J por los que pasan rectas perpendiculares.



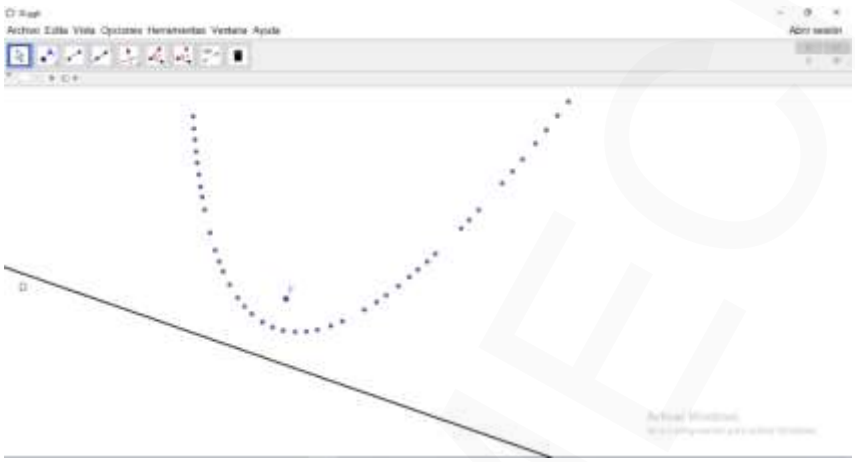
Desliza el punto A sobre la recta D. ¿Podrías describir el recorrido del punto R (amarillo)? ¿Crees que el punto R cumple la misma propiedad que los puntos marcados (rojos) sobre las rectas perpendiculares a D? ¿Por qué? ¿Cuál sería esa propiedad?

31. En el applet se muestran una recta fija D, otra recta L que la corta perpendicularmente en el punto A y un punto fijo F.



¿Podrías ubicar un punto sobre L que equidiste de la recta fija D y del punto fijo F? ¿Cómo lo harías?

32. En el applet se encuentran ubicados un conjunto de puntos que cumplen cierta propiedad, una recta D y un punto fijo F.



¿Podrías mencionar la propiedad que cumplen? ¿Cuál de estos puntos está más cercano a la recta D? ¿Podrías mencionar otra propiedad de este último punto?

Fuente: Elaboración propia.

Figura 27. Instrumento Entrevista Socrática para la Comprensión del Concepto de Parábola como Lugar Geométrico

Las 36 preguntas que componen la ESDpCP tienen como fin evidenciar el nivel de razonamiento acerca del concepto de parábola como lugar geométrico, y tiene como componente socio cognitivo al software de geometría dinámica *GeoGebra*, el cual le permite al estudiante, entre muchas cosas, realizar construcciones que, para efectos de esta investigación, permiten evidenciar propiedades para llegar a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico.

6.8 Método

6.8.1 Procedimiento de administración

Para aplicar la entrevista socrática dinámica, se debe contar con un dispositivo que tenga conexión a internet. Como ya se mencionó, el uso del software *GeoGebra* y su plataforma coincidió con las necesidades del momento y los propósitos iniciales del estudio, concebidos desde 2017.

Para la aplicación de esta entrevista es fundamental utilizar un ambiente cómodo, donde el estudiante se sienta relajado, lo que es especialmente importante porque la población objeto de estudio son estudiantes que cursan décimo grado, jóvenes entre los 14 y los 18 años. Para lograr esto se debe enfatizar en que no se trata de un examen, que la actividad que van a realizar no genera ninguna calificación, que las respuestas dadas a la prueba no están bien ni mal, sino que con ellas se pretende saber lo que piensan acerca de algunos conceptos matemáticos. Se debe motivar a realizar la entrevista con el mayor interés y sinceridad posibles, y aclararles que el objetivo es apreciar el razonamiento matemático acerca de un concepto.

La entrevista socrática dinámica está concebida como una red de relaciones, en la cual cada una de las construcciones realizadas en el software *GeoGebra* esconde una intencionalidad que sólo el entrevistador conoce y, que a medida que se progresa en su aplicación, se busca que el entrevistado, a partir de dichas construcciones razone, reflexione, interprete, construya, e infiera su propia red de relaciones que le permitan llegar a la definición de un concepto matemático. En este estudio, como se ha venido precisando, la red de relaciones sobre la cual el entrevistado razonará será el concepto de parábola como lugar geométrico. Para generar esta red de relaciones se necesitan conceptos básicos de la geometría euclidiana, tales como como *punto, recta, plano, rectas paralelas, rectas perpendiculares, segmentos* y *medida de un segmento* entre otras.

Se debe tener en cuenta que la aplicación de la entrevista está prevista para dos horas, pero en cierta medida puede extenderse el límite de tiempo, porque, aunque la sesión haya finalizado, el estudiante puede seguir trabajando en las situaciones problema planteadas en GeoGebra Classroom en la plataforma, si el profesor lo permite,

Al momento de la aplicación de la ESDpCP, se deben tener en cuenta las siguientes características, inferidas, por una parte, del decálogo para el diseño de una

entrevista de carácter socrático planteado por Jurado & Londoño (2005), pero también de las ideas propuestas por Jaramillo & Campillo (2001), quienes hacen énfasis en que un buen diseño de entrevista, facilita que el estudiante construya su propio conocimiento:

- **La intencionalidad de la entrevista**: Como primera medida el entrevistador debe conocer perfectamente el objetivo que desea lograr el entrevistado durante el discurrir de la entrevista, esto le permitirá establecer con seguridad el nivel de razonamiento del entrevistado. Al mismo tiempo, el entrevistador debe dominar el concepto objeto de estudio y su construcción mediante en el Software de Geometría Dinámica, y tener especial cuidado con los conceptos que están inmersos en las construcciones, y que no se le deben dar al estudiante de forma directa, sino de manera implícita; esto permitirá que el estudiante dé respuestas espontáneas y muy bien elaboradas, producto del razonamiento crítico y reflexivo, basado en las construcciones y propiedades observadas.

  Es fundamental que el investigador trace una ruta específica que le permita centrar el objetivo y no divagar en visualizaciones que le pueden generan posteriormente sobrecargas cognitivas al estudiante; finalmente, se requiere hacer la aleación entre lo disciplinar, lo tecnológico y lo didáctico, por lo tanto, se debe tener claro como desde la exploración y la aplicación de las bondades ofrecidas por el software de Geometría dinámica *GeoGebra* se puede enseñar un concepto matemático de acuerdo al grado de complejidad con una didáctica inmersa en la entrevista.

- **El lenguaje**: En todo momento, y sin disgustarse por las posibles respuestas del entrevistado, el profesor debe motivar a que este siempre responda de forma espontánea, debido a que el lenguaje utilizado por el estudiante, en la gran mayoría de ocasiones, determina el nivel en que éste se encuentra razonando. Es por ello que el entrevistador debe estar atento al vocabulario que se utiliza durante

la entrevista, de tal forma que fluya en el nivel correspondiente y propicie un razonamiento cada vez más refinado, además en el marco de este diálogo se maneja un lenguaje de trabajo con el software.

El uso del lenguaje es la forma como el entrevistado expresa sus razonamientos, este puede darse de forma espontánea o en el proceso de resolución de la situación planteada. Por otra parte, a medida que el entrevistado explore con el software *GeoGebra*, se contribuirá a mejorar su fluidez verbal en la comunicación de ideas matemáticas alrededor del aprendizaje de un concepto matemático determinado, dando significado y permanencia a sus nuevos saberes para posteriormente exponerlos ante nuevos retos de aprendizaje.

- **Los conceptos básicos:** Aunque se trabaje con un software dinámico, éste por sí solo no sirve de nada. En primer lugar, se debe conocer si el estudiante reconoce adecuadamente los conceptos y elementos básicos usados para la construcción del objeto evento de estudio, además, de acuerdo con el modelo de van Hiele, estas preguntas permiten al profesor ubicar a un estudiante en el nivel 0 o Predescriptivo.

  Los preconceptos le van a permitir al estudiante avanzar en el proceso de aprendizaje de nuevos conceptos matemáticos, al tener inmerso el uso de tecnología como complemento a los procesos cognitivos, el estudiante puede hacer exploraciones que le permitan validar los preconceptos para poder asociarlos posteriormente a sus nuevos aprendizajes. En consecuencia, el uso de *GeoGebra* le va a permitir al estudiante retomar conceptos básicos y validarlos para posteriormente avanzar en su nivel de razonamiento.

- **Las experiencias previas con el software y con el tema objeto de estudio**: Es fundamental que el estudiante haya tenido contacto con el software antes de la aplicación de la entrevista, además el entrevistador debe hacer énfasis en los

PREPRINT

conceptos básicos necesarios acerca del concepto objeto de estudio mediante preguntas intencionadas. Todo esto permitirá al estudiante realizar construcciones en el software, de manera que con sus conocimientos previos y sus experiencias precedentes surjan en su mente todas las ideas que tenga del concepto objeto de estudio. Correlacionar los aprendizajes con las bondades ofrecidas por *GeoGebra*, le va a permitir al estudiante avanzar en la capacidad estratégica para resolver diferentes situaciones problema que requieran un nivel propio del aprendizaje de las matemáticas.

Por lo anterior, al tener conocimiento sobre el uso adecuado del software, el estudiante podrá hacer experimentaciones, visualizaciones y razonamientos en torno de las construcciones a realizar y, de esta forma, a partir de las experiencias previas y mediante el software, logrará realizar conjeturas que posteriormente le pueden generar explicaciones con base en sus razonamientos.

- **El diálogo inquisitivo:** En la entrevista socrática dinámica, mediante un diálogo inquisitivo, en ocasiones irónico pero respetuoso y cordial, el entrevistador propicia la indagación y el razonamiento, lo que provoca que el estudiante razone y reflexione en torno a cada una de las construcciones y propiedades, que debe realizar o analizar. Esto lleva al estudiante a la comprensión del objeto matemático que se está investigando. A medida que se avanza en la comprensión del concepto en cuestión, las preguntas inquisidoras exigirán respuestas que requieren un nivel de mayor complejidad para entender las estructuras propias de la disciplina.

  Por lo tanto, el uso de *GeoGebra* le permite al estudiante hacer una construcción física y mental, lo que significa en términos del software, resistir la prueba del arrastre a través de un intercambio de ideas, preguntas y respuestas clave que deberán cumplir con las propiedades del objeto matemático sin importar su tamaño.

PREPRINT

En conclusión, para ser una construcción, se requiere cumplir con todas y cada una de las propiedades del objeto de comprensión, en razón de que al tomar un punto de la construcción e intentar mover el objeto matemático, debe permanecer, de lo contrario, no sería una construcción sino un dibujo.

- **Pensamiento discursivo**: Algunas construcciones conllevan a reforzar o reformular la misma idea; es decir, se proponen varias construcciones acerca del mismo contenido, para que en un primer momento el entrevistado dé a conocer lo que sabe del tema objeto de estudio, en otras posteriores, se espera que el estudiante dé respuestas más elaboradas, toda vez que las construcciones anteriores han provocado un proceso de razonamiento, producto de las preguntas inquisitivas. Las respuestas dadas por los estudiantes son producto de un nivel de razonamiento, y en ocasiones pueden ser efímeras, por lo tanto, al hacer otra pregunta con el mismo sentido, pero en otras palabras y/o construcciones con igual intencionalidad, el estudiante podrá evocar su nivel de conocimiento para validar, refutar y/o reformar lo planteado anteriormente. Para ello, al utilizar el software *GeoGebra*, el estudiante estará en capacidad de realizar construcciones y generar nuevas conjeturas que pueda explicar, refutar o argumentar

- **El aporte de información:** En ocasiones, al iniciar una nueva pregunta de la entrevista, en la cual debe estar inmersa una construcción en el software, se debe brindar información necesaria para que el estudiante pueda llegar a la compresión del concepto objeto de estudio. De acuerdo con Jurado & Londoño (2005), dicho aporte de información no puede sugerir enseñanza directa o explicación alguna, y los aportes de información se deben brindar como definiciones de nuevos conceptos o como ampliación del vocabulario propio de un nuevo nivel de razonamiento. El nivel de comprensión requiere conocimientos previos y de acuerdo al grado de complejidad, en ocasiones, es necesario brindar al estudiante

un aporte de información que le proporcionará herramientas útiles para la solución de un problema y/o construcción a realizar.

En razón de lo anterior, el uso de *GeoGebra* permite usar las ayudas brindadas por el entrevistador y validar su aporte de información para, posteriormente, avanzar en el nivel de comprensión del concepto matemático.

- **La problematización con las ideas:** En la entrevista socrática dinámica debe haber preguntas acerca de las construcciones presentadas o dadas, que logren que el estudiante enriquezca su propio saber, mientras otras construcciones un poco más elaboradas lo llevan a un estado de contradicción consigo mismo, al ver que sus propias ideas acerca del concepto matemático cambian totalmente, es aquí donde el entrevistador debe centrar su atención y manipular ese conflicto interno que tiene el estudiante para conseguir mayor objetividad en sus respuestas.

  De acuerdo al grado de complejidad de una construcción, surgen conjeturas alrededor de la comprensión de un concepto matemático, que mediante el uso de *GeoGebra* pueden ser exploradas y visualizadas en diferentes momentos y a través de diversos razonamientos, para validar o refutar el juicio de valor de la conjetura. Esto en ocasiones genera contradicciones y/o expectativas que con el uso adecuado de la tecnología permitirá que el entrevistador pueda sortear el momento en que el estudiante pasa de la contradicción a la comprensión, producto de los razonamientos realizados durante la entrevista socrática dinámica.

- **El paso por los tres momentos**: Se le deben presentar al estudiante construcciones muy bien elaboradas que hagan creer que sabe la respuesta a la pregunta que se le ha planteado, luego, con base en la misma construcción y a partir de algunas manipulaciones a la misma, es necesario hacerle ver que no sabe (problematizar) y, por último, al estar en contradicción consigo mismo, y ver esas

contradicciones mediante el software, el estudiante puede manipularlo para que le ayude a llegar a la comprensión del concepto objeto de estudio.

Para llegar a la comprensión del concepto matemático se requiere que el estudiante haya manipulado el software y puesto en juego las competencias heurísticas y de control con el fin de poder crear una respuesta entorno de una situación problema planteada. Como respuesta, el entrevistador hace ver las competencias heurísticas propias del concepto matemático y las competencias de control, de tal forma que le permitan al estudiante desarrollar su capacidad de razonamiento y, posteriormente, llegue a la compresión del objeto de estudio.

- **La red de relaciones**: Las preguntas de la entrevista y las construcciones presentadas en el software deben estar enunciadas y distribuidas de tal modo que el entrevistado pueda construir una red de relaciones alrededor del concepto objeto de estudio, con base en la manipulación de dichas construcciones que le permitan razonar y reflexionar sobre el mismo. La comprensión de un objeto matemático no se da a través de conceptos sueltos y dispersos por sí solos, sino que requiere del procesamiento cognitivo de un conjunto de relaciones que se condensan para crear nuevas redes de relaciones matemáticas. El uso adecuado de *GeoGebra* le permite al estudiante validar la adquisición de conceptos y relacionarlos para obtener nuevas y mejores construcciones.

6.8.2 Procedimiento de puntuación

Se debe tener claro que la ESDpCP es un instrumento con preguntas abiertas, en el que cada uno de las preguntas está relacionado con un concepto matemático (en este caso, el concepto de parábola como lugar geométrico). Por lo tanto, se debe tener presente que los estudiantes van a dar respuestas similares expresadas de diversas formas, pero se debe buscar la existencia de grupos de respuestas (patrones) suficientemente uniformes, mediante los cuales se puedan identificar los niveles de

razonamiento, ya que no tiene sentido medir el nivel de razonamiento de un entrevistado a partir de respuestas individuales, sino al comportamiento generalizado de cada una de las preguntas de la entrevista. En la Tabla 33 se pueden apreciar los códigos que se utilizaron para categorizar los niveles de razonamiento.

Tabla 33. Códigos para las categorías de los eventos de estudio y demográficos

CCPNP	Comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, nivel predescriptivo
CCPNRV	Comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, nivel de reconocimiento visual
CCPNA	Comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, nivel de análisis
CCPNC	Comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, nivel de clasificación
Grado	Décimo

Fuente: Elaboración propia

6.8.2.1 Baremos de Categorización del Instrumento

El procedimiento para la elaboración de la tabla de baremos (en adelante TB), para el instrumento ESDpCP se fundamenta en el establecimiento de una relación estadística entre las respuestas de los estudiantes y la puntuación a dichas respuestas. En la Tabla 34 se aprecia una escala de 1 a 5, en la que un (1) punto es el valor que se da a una respuesta sin argumentos, o que no tiene relación con la pregunta, se da un valor de dos (2) puntos a aquellas respuestas que tiene un aceptable argumento, se dan tres (3) puntos a aquellas respuestas que muestra un buen argumento, cuatro (4) puntos a las respuestas con un muy buen argumento, y cinco (5) puntos a las respuestas muy bien elaboras y que muestran un excelente argumento. La escala utilizada para este baremo es pertinente y adecuada porque recoge todas las posibles argumentaciones de los estudiantes a las preguntas de la entrevista.

Tabla 34. Categorías de clasificación a las respuestas de los estudiantes a cada ítem

1	2	3	4	5

Escaso Argumento	Aceptable Argumento	Buen Argumento	Muy Buen Argumento	Excelente Argumento

Fuente: Elaboración propia

6.8.2.2 Criterios para categorizar y codificar las respuestas a las preguntas

Al momento de aplicar y tabular los resultados de la ESDpCP, se deben tener en cuenta las Tablas 35, 36, 37 y 39, las cuales muestran los criterios a considerar para la categorización de las posibles respuestas dadas por los estudiantes; la escala de valores que se ha utilizado es 1, 2, 3, 4, y 5 que corresponden al puntaje asignado a cada respuesta. En las columnas correspondientes a estos valores se encuentran las potenciales respuestas, de acuerdo a cada pregunta de la entrevista.

6.8.3 Tabla de Baremos

En cuanto a la detección de los niveles de razonamiento para la comprensión de cada estudiante, de acuerdo al puntaje total obtenido, la Tabla 35 muestra el baremo para el nivel 0 o predescriptivo, con un puntaje que oscila entre 0 y 50; la Tabla 36 muestra el baremo para el nivel reconocimiento visual, con un puntaje que oscila entre 51 y 90; la Tabla 37 muestra el baremo para el nivel análisis, con un puntaje que oscila entre 91 y 135; y, finalmente, la Tabla 38 muestra el baremo para el nivel de clasificación, con un puntaje que oscila entre 136 y 180 puntos.

REPOSITORIO

Tabla 35. Baremos Nivel Predescriptivo

Entre 0 y 50	Criterio	1	2	3	4	5
CPNP1a	Dado un gráfico en GeoGebra Identifica una recta.	Trata de reconocer una recta en un gráfico dado.	En ocasiones reconoce una recta en un gráfico dado.	Identifica una recta en un gráfico dado	Identifica algunas rectas en un gráfico dado.	Identifica todas las rectas planteadas en un gráfico dado.
CPNP1b	Dado un gráfico en GeoGebra identifica un segmento	Realiza exploraciones iniciales en el software.	En ocasiones reconoce segmentos en un gráfico dado	Identifica un segmento en un gráfico dado	Identifica algunos segmentos en un gráfico dado.	Identifica todos los segmento planteadas en un gráfico dado
CPNP1c	Dado un gráfico en GeoGebra identifica puntos.	Trata de reconocer un punto en un gráfico dado	En ocasiones reconoce un punto en un gráfico dado	Identifica un punto en un gráfico dado	Identifica algunos puntos en un gráfico dado.	Identifica todos los puntos planteadas en un gráfico dado
CPNP4a	Reconoce un punto como un elemento básico de la recta.	Trata de establecer que existen elementos fundamentales de la recta como el punto.	En ocasiones establece que existen elementos fundamentales de la recta como el punto.	Establece que existen elementos fundamentales de la recta como el punto.	Identifica que existen elementos fundamentales de la recta como el punto.	Identifica el punto como un elemento fundamental de la recta y lo describe como un concepto no definido
CPNP4b	Reconoce la recta como un concepto geométrico no definido	Se le dificulta reconocer la recta como elemento geométrico	En ocasiones reconoce que existen elementos fundamentales de la geometría como la recta	Reconoce algunas veces la existencia de la recta como elemento geométrico	Identifica con frecuencia la recta como elemento geométrico.	Siempre identifica la recta como un elemento fundamental de la geometría y lo describe como un concepto no definido
CPNP4c	Reconoce el plano como un concepto geométrico fundamental.	Trata de establecer que existen elementos fundamentales de la geometría como un plano	En ocasiones reconoce el plano como un elemento fundamental de la geometría.	Establece que existen elementos fundamentales de la geometría como un plano	Identifica que existen elementos fundamentales de la geometría como un plano.	En cualquier situación identifica un plano como un elemento fundamental de la geometría y lo describe como concepto no definido

RED INEDIT

Entre 0 y 50	Criterio	1	2	3	4	5
CPNP5	En una construcción dada en GeoGebra identifica rectas paralelas	No reconoce rectas paralelas.	Todas las rectas dadas son paralelas.	Solo la recta H o la recta P es paralela	Las rectas H y P son paralelas, pero no argumenta su respuesta	Identifica que las rectas H y P son paralelas, y argumenta su respuesta.
CPNP7	Identifica rectas perpendiculares en una construcción dada en GeoGebra	No reconoce la existencia de rectas perpendiculares.	Las rectas perpendiculares son Q y L	Se observan dos pares de rectas perpendiculares Q y L y U y Z	Las rectas U y Z son perpendiculares, pero no argumenta su respuesta	Identifica que las rectas U y Z son perpendiculares, y argumenta su respuesta.
CPNP9	Define la condición para que dos rectas sean perpendiculares	No reconoce la definición de perpendicularidad.	Construye rectas, pero sin identificar ninguna particularidad.	Define rectas perpendiculares como rectas que se cortan	Da una definición aproximada de rectas perpendiculares.	Da una definición exacta de rectas perpendiculares

Fuente: Elaboración propia

Tabla 36. Baremos Nivel reconocimiento visual

Entre 51 y 90	Criterio	1	2	3	4	5
CPNRV6	Define la condición para que dos rectas sean es paralelas	Trata de reconocer las condiciones para que dos rectas sean paralelas.	En ocasiones establece condiciones para que dos rectas sean paralelas.	Establece algunos indicios para que dos rectas sean paralelas.	Describe las condiciones para que dos rectas sean paralelas.	Da una definición argumentada de rectas paralelas.
CPNRV10	Reconoce con claridad cuantas rectas pasan por un punto	Solo una recta pasa por un punto	Por un punto pasan algunas rectas	360 rectas pasan por el punto A	Las rectas que uno desee trazar, es decir muchas.	Por un punto pasan infinitas rectas.

REPOSITORIO UPN

Entre 51 y 90	Criterio	1	2	3	4	5
CPNRV12	Identifica la distancia más corta entre dos puntos	Es el mismo recorrido para todos.	El camino más corto va por arriba	El camino b es más corto va por abajo	El caminos más corto es que va derecho.	El camino más corto es el segmento de recta que los une.
CPNRV13	Identifica el número de rectas que pasan por dos puntos.	Muchas rectas, tantas como uno quiera.	Yo creo que una por cada punto.	De pronto solo una	Por A y B solo trazo una recta	Dados dos puntos cualesquiera A y B solo se puede trazar una recta.
CPNRV15	Ubica el punto medio entre dos puntos.	El punto medio es el que debe estar en la mitad.	El punto medio debe estar a igual distancia de ambos, pero no sé cómo hallarlo.			Usando la herramienta punto medio de GeoGebra y ya está.
CPNRV18	Reconoce cuando dos rectas son perpendiculares.	Parece que sí, pero no podría justificarlo	Las dos rectas son secantes no perpendiculares	Dependen del ángulo que formen, pero no recuerdo cuanto debe ser.	Parecen formar un ángulo de 90º, tocaría medirlo	Si son perpendiculares, con GeoGebra medí el ángulo entre dos rectas y me dio 90º, por lo tanto, son perpendiculares
CPNRV19	Identifica cuando dos rectas son paralelas.	No se puede saber cuándo dos rectas son paralelas.	Dos rectas paralelas deben ser infinitas	Dos rectas paralelas no se deben cortar pero no sé cómo probar eso.	Dos rectas paralelas no deben tener puntos en común pero no sé cómo probar eso.	Dos rectas son paralelas cuando trazamos una secante, que corte a las dos rectas formando ángulos correspondientes congruentes.

RED-UMECIT

Entre 51 y 90	Criterio	1	2	3	4	5
CPNRV20	Traza una recta perpendicular a otra dada por un punto dado.	El estudiante traza una recta cualquiera sobre la recta dada.	La recta trazada no cumple con la condición de ser perpendicular, su ángulo no mide 90º.	La recta trazada no cumple con prueba del arrastre.		
CPNRV21	Construye una recta perpendicular a otra dada. .	Traza una recta cualquiera que pasa por el punto c	La recta trazada no cumple la propiedad del arrastre	La recta es infinita y no se puede garantizar que sea perpendicular		
CPNRV25	Determina la distancia más corta entre un segmento y un punto.	En la vida real con un metro se mide al bajar.	El que este frente al piso ese debe ser			

Fuente: Elaboración propia

RED UMECIT

Tabla 37. Baremos Nivel de análisis

Entre 91 y 135	Criterio	1	2	3	4	5
CPNA3	Construye todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo dado	Los puntos dados son los únicos que cumplen la condición.	No reconoce más puntos que equidistan de un punto fijo dado.	Reconoce solo 4 puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro.	Reconoce que algunos puntos equidistan de un punto fijo llamado centro.	Reconoce la circunferencia como el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro.
CPNA11	Identifica que existen infinitos puntos a la misma distancia de un punto fijo dado	Algunos puntos dados que cumplen la condición.	Solo algunos puntos equidistan de un punto fijo dado.	Los ejes coordenados son los únicos puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro.	Reconoce que algunos puntos equidistan de un punto fijo llamado centro.	Reconoce la circunferencia como el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro.
NA14	Determina la distancia entre dos puntos fijos.	Se le dificulta determinar la distancia mínima entre dos puntos	En ocasiones determina la distancia entre dos puntos.	Generalmente calcula la distancia entre un par de puntos.	Casi siempre utiliza GeoGebra para calcular la distancia más corta entre dos puntos.	Siempre utiliza GeoGebra para calcular la distancia más corta entre dos puntos.
CPNA16	Ubica algunos puntos que están a la misma distancia de dos puntos fijos dados.	Se le dificulta ubicar puntos el software	Ubica el punto medio entre los dos puntos.	En ocasiones ubica puntos a la misma distancia de dos puntos dados incluido el punto medio.	Intenta construir la mediatriz de un segmento	Construye con herramientas del software la mediatriz de un segmento
CPNA17	Traza todos los puntos que están a la misma distancia de dos puntos fijos dados.	Se le dificulta ubicar puntos con esa condición el software	Solo ubica el punto medio entre los dos puntos.	Ubica varios puntos a la misma distancia de dos puntos dados incluido el punto medio.	Usando el software intenta construir la mediatriz de un segmento	Construye con herramientas del software la mediatriz de un segmento

RIDUNIOT

Entre 91 y 135	Criterio	1	2	3	4	5
CPNA22	Dados varios puntos identifica la distancia más corta con otro punto fijo.	No es posible calcular la distancia entre cada par de puntos.	Calcula algunas distancias entre cada par de puntos, aunque se le dificulta porque no maneja bien GeoGebra.	En ocasiones utiliza GeoGebra para calcular distancias	Con frecuencia utiliza GeoGebra para calcular la distancia más corta entre los puntos.	Utiliza GeoGebra para calcular la distancia más corta entre los puntos.
CPNA23	Dada una recta y un punto A exterior a ella, ubica el punto sobre la recta que esta mas cercano al punto A.	Se le dificulta graficar la recta y el punto.	Grafica el punto y la recta, pero no determina el más cercano a la recta.	Identifica que debe construir la perpendicular pero no maneja la herramienta en GeoGebra.	Con ayuda de GeoGebra encuentra el punto por ensayo y error midiendo distancias.	Utiliza GeoGebra para calcular la perpendicular a la recta por el punto.
CPNA24	Identifica puntos que satisfacen la propiedad de estar a la misma distancia de dos puntos fijos dados.	Se le dificulta ubicar puntos el software	Ubica el punto medio entre los dos puntos.	En ocasiones ubica puntos a la misma distancia de dos puntos dados incluido el punto medio.	Intenta construir la mediatriz de un segmento	Construye con herramientas del software la mediatriz de un segmento
CPNA28	Establece las características que poseen ciertos triángulos dados.	No identifica los triángulos de la gráfica	Identifica algunos triángulos de la gráfica	Reconoce que algunos triángulos dados son isósceles.	Reconoce que algunos los triángulos dados son isósceles y verifica la congruencia entre sus lados..	Reconoce que todos los triángulos dados son isósceles y verifica la congruencia entre sus lados.

Fuente: Elaboración propia

RED UNEXT

Tabla 38. Baremos Nivel de clasificación

MAX 136- 180	Criterio	1	2	3	4	5
CPNC2	Construye los puntos que satisfacen la propiedad de equidistar de la recta D y del punto fijo F	No identifica la definición de puntos equidistantes.	Identifica algunos puntos que equidistan de la recta y el unto.	Con ayuda del software grafica un punto equidistante de la recta y el punto fijo(foco)	Con ayuda del software grafica algunos puntos equidistantes de una recta y un punto fijo	Con ayuda del software grafica todos los puntos equidistantes de una recta y un punto fijo
CPNC8	Establece condiciones para ubicar puntos sobre la mediatriz y que satisfagan la condición dada.	No reconoce el concepto de mediatriz	Identifica algunos puntos de la mediatriz	Identifica la mediatriz pero no reconoce sus propiedades	Con ayuda del software grafica la mediatriz y algunos puntos con la condición dada.	Con ayuda del software grafica la mediatriz y todos los puntos con la condición dada.
CPNC26	Identifica cual o cuales puntos sobre una recta L perpendicular a la recta fija D, equidistan de la recta fija D y del punto fijo F exterior a ellas.	Se le dificulta visualizar la recta perpendicular	Reconoce las rectas perpendiculares	Visualiza las rectas perpendiculares, pero no encuentra el punto con las características pedidas.	Establece que las rectas dadas son perpendiculares, y además encuentra el punto con las características pedidas.	Reconoce las rectas perpendiculares, y sus características, y a partir de ellas encuentra el punto solicitado.
CPNC27	Describe la propiedad que posee un triángulo isósceles formado entre dos rectas perpendiculares y un punto fijo F.	Se le dificulta reconocer un triángulo en la construcción dada.	reconocer algunos triángulos en la construcción dada pero no sus características.	Identifica todos los triángulo en la construcción dada pero no sus características.	Visualiza todos los triángulos dados y reconoce algunas de sus características.	Con ayuda del software verifica todas las características de los triángulos dados
CPNC29	Identifica puntos equidistantes de un puto fijo y una recta fija	No identifica la definición de puntos equidistantes.	Identifica algunos puntos que equidistan de la recta y el unto.	Con ayuda del software grafica un punto equidistante de la recta y el punto fijo(foco)	Con ayuda del software grafica algunos puntos equidistantes de una recta y un punto fijo	Con ayuda del software grafica todos los puntos equidistantes de una recta y un punto fijo

MAX 136- 180	Criterio	1	2	3	4	5
CPNC30	Describe la propiedad especial que poseen algunos puntos ubicados sobre rectas perpendiculares a una recta dada	Se le dificulta visualizar la recta perpendicular	Reconoce las rectas perpendiculares	Visualiza las rectas perpendiculares, pero no encuentra el punto con las características pedidas.	Establece que las rectas dadas son perpendiculares, y además encuentra el punto con las características pedidas.	Reconoce las rectas perpendiculares, y sus características, y a partir de ellas encuentra el punto solicitado.
CPNC31	Establece gráficamente propiedades de parábola	Visualiza puntos sin ninguna propiedad que los caracterice.	Establece que existen puntos que deben satisfacer alguna propiedad	Identifica que algunos puntos tienen características similares.	Reconoce la propiedad de equidistancia entre los puntos dados.	Identifica que los puntos dados equidistan de una recta fija D y de un punto fijo F exterior a ella.
CPNC32	Menciona la propiedad que tiene ciertos puntos dados con respecto a una recta y un punto fijo dado	Observa el conjunto de puntos pero sin ninguna propiedad que los caracterice.	Identifica la recta y el punto fijo exterior a ella, pero no reconoce ninguna propiedad que los caracterice.	Identifica la recta y el punto fijo exterior a ella, y reconoce el foco de la parábola.	Reconoce que los puntos dados forman la parábola, pero no sus características.	Reconoce que los puntos dados forman una parábola y menciona sus características.

Fuente: Elaboración propia

REDI UNET

6.8.4 Interpretación de resultados

Con los resultados obtenidos en los baremos y con la división en cuatro grupos que están fuertemente relacionados con la descripción del modelo y la robustez del mismo, gracias a la clasificación obtenida es posible establecer el nivel de razonamiento en el cual se encuentra un estudiante con respecto al concepto de parábola como lugar geométrico; para ello, en primera medida, se debe obtener el valor del puntaje total de acuerdo a las respuestas dadas por los estudiantes; este resultado permitirá, de acuerdo a la Tabla 39, clasificar a los estudiantes en alguno de los niveles de razonamiento de acuerdo al modelo de van Hiele.

Tabla 39. Nivel de clasificación de acuerdo al puntaje obtenido.

	Nivel 0	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 3**
Puntaje	0 -50	51-90	91-135	136- 180

Fuente: Elaboración propia

6.9 Cronograma

Para aplicar la ESDpCP, se deben destinar aproximadamente de 10 a 12 horas, previas a la aplicación, para que el entrevistador pueda revisar cada una de las construcciones realizadas en *GeoGebra*. Además, debe haber probado que funcionen perfectamente cada uno de las preguntas que componen la entrevista, en la plataforma GeoGebra Classroom, esto le permitirá desarrollarla revista sin ninguna complicación.

El tiempo que demora la aplicación de la ESDpCP es de aproximadamente dos horas treinta minutos, aunque esto difiere mucho en cada estudiante, en gran medida debido a la experticia en el manejo del software y a sus conocimientos previos; es fundamental durante la entrevista no presionar al estudiante por el tiempo empleado en las respuestas a las preguntas, tener siempre presente que, por ser una entrevista

semiestructurada de carácter socrático, se permite el diálogo reflexivo entre el profesor y el estudiante.

Al momento de realizar la socialización y evaluación de la la ESDpCP se debe dedicar un tiempo de 40 a 50 minutos por estudiante, debido a que las construcciones realizadas en el software se deben analizar paso a paso; es decir, reconstruir cada uno de los procesos que realizó el estudiante en la plataforma GeoGebra Classroom, y a la par de las construcciones, analizar las diversas argumentaciones.

6.10 Recursos y requerimientos para la aplicación

6.10.1 Requerimientos

Para la aplicación de la ESDpCP se tiene una gran ventaja, porque al trabajarse desde una plataforma en línea, se puede hacer en el aula de informática de la institución educativa o el estudiante puede trabajar desde casa. En ambos casos se recomienda un espacio cómodo, limpio, ordenado, e iluminado. Además, se debe evitar tener objetos que distraigan al entrevistado.

6.10.2 Recursos

Como principal elemento tecnológico se debe destacar que cada estudiante debe contar con su respectivo ordenador y el SGD *GeoGebra* instalado. Es fundamental contar con una muy buena conexión a internet, que le permita estar en línea durante el desarrollo de la entrevista.

6.10.3 Personal: Preparación del evaluador

El profesor evaluador, o la persona encargada de valorar la ESDpCP, debe poseer conocimientos en: geometría euclidiana, manejo el software *GeoGebra* y la plataforma GeoGebra Classroom; además, tener claridad de que se pretende alcanzar mediante el

uso del modelo de van Hiele la detección del nivel de razonamiento y la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico.

6.11. Productos derivados de la propuesta

El principal producto de esta investigación es la entrevista socrática dinámica ESDpCP, la cual es un aporte a la Educación Matemática porque permitió ver cómo avanza el estudiante a través de los niveles de razonamiento del modelo de van Hiele y, de la misma forma, evidenciar el nivel en el que estaba razonando un estudiante frente al concepto de parábola como lugar geométrico. El SGD *GeoGebra* y la plataforma GeoGebra Classroom, permitieron realizar construcciones en las que se podía evidenciar propiedades de las gráficas.

En cuanto a los productos científicos, el presente trabajo se ha presentado en cuatro congresos internacionales de investigación en educación matemática (Anexo M), lo cual ha generado artículos plasmados en las memorias con ISSBN O ISSN. En la Tabla 40 se muestran cada uno de ellos en forma cronológica.

Tabla 40. Participación de Ponencias Internacionales

Título de la ponencia	Comprensión de la parábola como lugar geométrico con la medición de GeoGebra en educación media				
Autores	William Eduardo Calderón Gualdrón			Tipo de Participación: Ponente	
Evento	RELME 32 Reunión Latinoamericana de Educación Matemática				
Tipo de evento	Internacional	Ciudad	Medellín, Colombia	Fecha	2 a 6 de Junio 2018
Entidad	Universidad de Medellín y Universidad de Antioquia				
Título de la ponencia	La entrevista socrática como medio para detectar el nivel de comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, en el marco del modelo de van Hiele				
Autores	William Eduardo Calderón Gualdrón			Tipo de Participación: Ponente	
Evento	XV CIAEM Conferencia Interamericana de Educación Matemática				
Tipo de evento	Internacional	Ciudad	Medellín, Colombia	Fecha	5 a 10 de mayo 2019
Entidad	Universidad de Medellín y Universidad de Antioquia				

Enlace	https://conferencia.ciaem-redumate.org/public/conferences/XV-CIAEM-2019-book/XV-CIAEM-2019-book-with-ISBN.pdf
código ISBN	ISBN: 978-9945-09-413-8

Título de la ponencia	La entrevista socrática dinámica: una estrategia para la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico				
Autores	William Eduardo Calderón Gualdrón				Tipo de Participación
Evento	V congreso Internacional de Investigación y Pedagogía IP				
Tipo de evento	Internacional	Ciudad	Tunja Colombia	Fecha	7 a 11 de octubre de 2019
Entidad	Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia				
Enlace	http://rdigitales.uptc.edu.co/memorias/index.php/5_cong_pedag/5_ped_cong/index				
código ISSN	ISSN: 2556-1951				

Título de la ponencia	Descriptores de nivel de razonamiento de van Hiele, para la comprensión de la parábola como lugar geométrico				
Autor	William Eduardo Calderón Gualdrón				Tipo de Participación
Evento	X Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas. X CIEM				
Tipo de evento	Internacional	Ciudad	Lima, Perú	Fecha	20 a 22 de Febrero de 2020
Entidad	http://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/171568				
código ISBN	978-612-4320-38-5				

Finalmente, se logró publicar un artículo en una revista indexada categoría B, avalada por Colciencias, el cual es un aporte adicional al estudio; véase la referencia que sigue:

Calderón-Gualdrón, W., y Londoño-Cano, R. (2021). Descriptores para el concepto de parábola en el modelo de van Hiele. Educación y Humanismo, 23(40), 1-25. https://doi.org/10.17081/eduhum.23.40.4221 ISSN: 0124-2121 E-ISSN: 2665-2420 artículo de investigación científica Copyright © By Educación y Humanismo.

PREPRINT

BIBLIOGRAFÍA

RED-UMECIT

Acosta, García, & Maldonado. (2017). *La educación media: Calidad y gestión escolar*. https://www.magisterio.com.co/articulo/la-educacion-media-calidad-y-gestion-escolar.

Acosta, M., & Fiallo, J. (2017). *Enseñando geometría con tecnología digital: Una propuesta desde la teoría de las situaciones didácticas*.

Agudelo, N., & Escobar, D. (2016). *Propuesta de actividades para potenciar la comprensión del infinito actual en estudiantes de grado décimo, un medio de aporte al desarrollo del pensamiento crítico en la escuela.* [Trabajo de grado]. Universidad Francisco José De Caldas Facultad De Ciencias Y Educación Lic. En Educación.

Aldana, E., & Wagner, G. (2012). La evaluación del aprendizaje en matemáticas. *Universidad del Quindío,* 1347-1352.

Álvarez, F., & Morales, A. (s.f.). Concepciones sobre el infinito de un grupo de estudiantes de cuarto medio: Evidencias del obstáculo epistemológico a través de un análisis didáctico. *XX Jornadas de Educación Matemática,* 296-300.

Ancochea, B. (2011). Un panorama de la TAD. *Centre de Recerca Matemática, Bellaterra (Barcelona), 10*, 533-551.

Aparicio, T. (2012). *Discalculia o dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.* http://www.pulevasalud.com/ps/contenido.jsp?ID=56717&TIPO_CONTENIDO=Articulo& ID_CATEGORIA=2212&ABRIR_SECCION=747

Arteaga, E., Medina, J., & Del Sol, J. (2019). El Geogebra: Una herramienta tecnológica para aprender Matemática en la Secundaria Básica haciendo matemática. *15*, *70*, 102-108.

Ausubel, B. (1980). *Psicología Educativa, Un punto de vista cognoscitivo*. Editorial Trillas.

Báez, Legañoa, & García. (2018). Formación inicial de maestros en la competencia promoción de la valoración positiva de la matemática: Un estudio de casos. Transformación. *14*, *2*, 262-271.

Barrantes, M., & Blanco, L. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*.

Barrera, M. (2000). *Los 10 principios éticos de toda investigación*. Curso de ascenso 1ra cohorte ECDF, Universidad de Antioquia, sede Carmen de Viboral.

Barrios, A. (2018). *Diseño didáctico para la enseñanza de las secciones cónicas, centrado en la parábola, a través de su modelación en diferentes sistemas de representación* [Maestría en educación, ICESI]. https://repository.icesi.edu.co/biblioteca_digital/bitstream/10906/84064/1/T01586.pdf

Boyer, C. (1987). *Historia de la matemática. V*. ersión española de Mariano Martínez Pérez. Alianza Editorial.

PREPRINT

Caballero, F., & Espínola, J. (2016). El rechazo al aprendizaje de las matemáticas a causa de la violencia en el bachillerato tecnológico Ra Ximhai. *Universidad Autónoma Indígena de México El Fuerte, México, 12*(3), 143-161.

Cáceres, G. (2017). Aprendizaje de traslaciones en el plano fundamentado en el modelo de van Hiele, mediado por Geogebra. *PAIDEIA*, *22*.

Calderón, W. (2013). *Propuesta metodológica para la enseñanza de las secciones cónicas en el grado décimo de la institución educativa Villas de San Ignacio de Bucaramanga* [Tesis de Maestría]. Universidad Nacional de Colombia.

Carrillo, B. (2009). *Dificultades en el aprendizaje matemático*.

Carroll, J. (1964). World, meaning and concept. Harvard. *Educational Review*, *34*, 178-202.

Castillo, S. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *11*(2), 171-194.

Congreso de Colombia. (2009). *Ley 1341 TIC*.

Copeland, M. (2010). *Socratic Circles: Fostering Critical and Creative Thinking in Middle and High School.: Vol. Portland, MN: Stenhouse*.

Corberán, M. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad* [Tesis doctoral]. Universitat de València: Valencia.

Crespo, C. (s.f.). *Un paseo por el paraíso de cantor: Problemas y reflexiones acerca del infinito. Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González* (Acta

Latinoamericana de Matemática, Vol. 19). Universidad de Buenos Aires. https://core.ac.uk/download/pdf/33251926.pdf

De la Rosa, L. (2014). *Una propuesta para abordar la parábola utilizando un procesador geométrico*. http://geometriadinamica.org/actividad/Actividades/Construyendoalaparabola.pdf.

De la Torre, A (2003). El Método Socrático y el modelo van Hiele. *Universidad de Antioquía, 24*.

Del Rio, C. (2018). *La parábola como objeto matemático desde el enfoque ontosemiótico en el curso de matemáticas de grado decimo del Instituto Mistrató Risaralda* [Universidad Tecnológica de Pereira]. http://repositorio.utp.edu.co/dspace/bitstream/handle/11059/9354/T510.712%20R585.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Esteban, P (2003). *Estudio comparativo del concepto de aproximación local a través del modelo de van Hiele* [Tesis doctoral]. Universidad Politécnica de Valencia.

Fernández, C. (2013). *Principales dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. Pautas para maestros de Educación Primaria.* [Universidad Internacional de La Rioja Facultad de Educación]. https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/1588/2013_02_04_tfm_estudio_del_trabajo.pdf?sequence=1

REPUNIET

Fernández, M. (2010). *Estudio de una secuencia de situaciones para la enseñanza de las cónicas integrando Cabri Géomètre II Plus* [Departamento de Matemáticas y Estadística]. Universidad de Nariño.

Ferrández, A. (1995). *Didáctica General* (UOC).

Ferreira, Zulueta, & Rivera. (2018). *Interdisciplinariedad en el proceso de enseñanza aprendizaje de las Matemáticas*.

Fiallo, J. (2011). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica*. Universidad de Valencia.

Filmus, D. (2016). *Enseñar y aprender en ¿Qué país queremos y para qué educar?. Escenarios de diversidad e inclusión educativa*. Facultad de Periodismo y Comunicación Social de la Universidad Nacional de La Plata Argentina. http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/53903/Documento_completo__.pdf-PDFA.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Font, V. (2001). Expresiones simbólicas a partir de gráficas. El caso de la parábola. *Revista EMA*, *6*(2), 180-200.

Gaita, C., & Ortega, T. (2014). Unidades elementales en problemas de lugar geométrico en los cuadros geométrico y algebraico. *Salamanca: SE: Investigación en Educación Matemática., XVIII*, 317-326.

Gaitán, M., Lacayo, M., & Flores, W. (2014). Comprensión del aprendizaje de la parábola en undécimo grado aplicando el modelo de van Hiele. *Revista Ciencia e Interculturalidad*, *15*(7).

REPOSITORIO

Gaona, V. (2009). La educación media en Colombia. *Educación y Cultura. dilemas y perspectivas de la educación técnica y de la educación media.*, *48n-*. http://www.fecoderevistaeducacionycultura.com/images/revistas_1-100/Educacion%20y%20Cultura%2083.pdf

García, F. (2000). Los modelos didácticos como instrumento de análisis y de intervención en la realidad educativa. *Revista Bibliográfica de Geografía y Ciencias Sociales. Universidad de Barcelona*, *207*(18). http://www.ub.edu/geocrit/b3w-207.htm

Giraldo, & Rodríguez. (2009). Propuesta didáctica para la enseñanza de la parábola en Ingeniería Civil. *Departamento de ciencias Básicas Uniminuto. Inventum No. 7 Facultad de Ingeniería Uniminuto*. https://revistas.uniminuto.edu/index.php/Inventum/article/view/126/119

Godino, J. (2016). *Perspectiva de la matemática como disciplina*. Universidad de Granada.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2004). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros* (GAMI).

Gómez, P., & Carulla, C. (2000). *Enseñanza sobre la Función Cuadrática*. Universidad de los Andes. Colombia.

González, F. (2005). Algunas cuestiones básicas acerca de la enseñanza de conceptos matemáticos. *Fundamentos en Humanidades Universidad Nacional de San Luis, Año VI*(1), 37/80.

PREPRINT

González, M. (2016). El problema educativo colombiano.Colombian educational problema. *Aibi revista de investigación, administración e ingeniería,Universidad San Martin, 4*(2), 63-67.

Guevara, Yépez, Placencia, & Jiménez. (2017). *La baja calidad del desempeño escolar*. Polo del Conocimiento.

Hernán, J., Aldana, E., & Alonso, A. (2014). *Análisis de la comprensión del concepto de parábola.*

Hernández, Fernández, & Baptista. (2014). *Metodología de la investigación* (6.ª ed.). McGraw-Hill.

Herrera. (2019). Evaluación para el aprendizaje. *Revista Educación las Américas*. http://revistas.udla.cl/rea/index.php/rea/article/view/22

Hurtado de Barrera, J. (2012). *El proyecto de investigación. Comprensión holística de la metodología y la investigación* (Séptima edición).

Hurtado, J. (2008). ¿Investigación Holística o comprensión holística de la investigación? *Revista Internacional Magisterio, 31*.

Hurtado, J. (2010). *Guía para la comprensión holística de la ciencia: Vol. Tercera Edición* (Universidad Nacional Abierta Dirección de Investigación y Postgrado). Fundación Sypal. htt://dip.una.odu.vo

Hurtado, J. (2012). *Metodología de la investigación. Guía para la comprensión holística de la ciencia.* (Cuarta). Quiron ediciones.

Ibarra. (2014). *Relaciones proporcionales entre segmentos en el contexto del modelo de van Hiele* [Maestría en Educación]. Universidad de Antioquia.

PREPRINT

Jaime, A., & Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. *Teoría y práctica en educación matemática Sevilla: Alfar*, 295-384.

Jaramillo, C., & Campillo, P. (2011). Propuesta Teórica de Entrevista Socrática a la Luz del Modelo de van Hiele. *Divulgaciones Matemáticas*, *9*, 65-84.

Jaramillo, Londoño, & Jurado. (2012). *Una metodología alternativa para la comprensión de la noción de límite: El caso de la convergencia de series de términos positivos.* Editorial Académica Española.

Jurado & Londoño. (2005). Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas. "Una metodología alternativa para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Colciencias*, *11*.

Just, M., & Carpenter, P. (1985). Cognitive coordinate systems: Accounts of mental rotation and individual differences in spatial ability. *Psychological Review*, 137-172.

Korenova, L. (2017). GeoGebra in teaching of primary school mathematics. *International Journal of Technology in Mathematics Education*, *24*(3), 155-160.

Lara. (2018). *La parábola como lugar geométrico: Una formación continua de profesores*. Universidad tecnológica del Perú.

Lehmann, C. (1989). *Geometría Analítica*. Editorial Limusa.

REPOSITORIO

León, J. (2016). *Las construcciones geométricas en torno al lugar geométrico de la parábola influenciado por Geogebra*. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Lestón. (2007). *Ideas previas a la construcción del infinito en escenarios no escolares.* [Tesis de Maestría]. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada.

Llerena, C. (2019). *Demostraciones geométricas, euclídianas y no euclídeas medidas por software dinámico, evaluadas bajo el modelo de van Hiele en el proceso de nivelación emblemática*. Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE.

Llorens. (1995). *Extensión del modelo de van Hiele a un ámbito diferente de la geometría en niveles educativos elementales.*

Londoño, R. (2011). *La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren* [Tesis doctorado en educación]. Universidad de Antioquia. Facultad de Educación.

López, J., & Aldana, E. (2013). Análisis de la comprensión del concepto de parábola en un contexto universitario. *18*, *2*, 74-79.

López, Z., González, O., & Álvarez, Y. (2017). Validación de instrumento de medición para el diagnóstico del proceso de formación de pregrado. *Revista Electrónica Cooperación*, 37-42.

Maguiña, A. (2013). Una propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros basada en el modelo van Hiele. *Revista Científica In Crescendo4*, *4*(1), 41-49.

REPOSITORIO

Mena, A., Montoya, J., Morales, E., & Parraguez, M. (2015). *El obstáculo epistemológico del infinito actual: Persistencia, resistencia y categorías de análisis*. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33543068003

Méndez, C., & Rondón, M. (2012). Introducción al análisis factorial exploratorio. *Revista Colombiana de Psiquiatría*, *41*(4), 197-207.

Ministerio de Educación Nacional. (2002). *Estándares curriculares, un compromiso con la excelencia.* Altablero. Bogotá Colombia. https://www.mineducacion.gov.co/1621/article-87872.html

Ministerio de Educación Nacional. (2004). *Estándares Básicos de Matemáticas*. Ministerio De Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de competencias en matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático. Un reto escolar.* Ministerio de educación Nacional. Colombia Bogotá. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2019). *Ley 115 de 1994*. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf

Moncayo, C., Pantoja, J., & Mosquera, E. (2014). Enfoque didáctico para la conceptualización de la parábola como lugar geométrico. *Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*.

Mora, S. (1973). *Geometría Dinámica en Secundaria*. http://jmora7.com/miWeb8/Archiv/2007_granada_JAMora.pdf.

REPOSITORIO

Morales, A. (2018). *Importancia de la educación*. https://www.todamateria.com/importancia-de-la-educacion/

Murillo, B., & Caicedo, C. (2017). *Implementación del software GeoGebra en la enseñanza de la simetría axial en el grado noveno cinco (9º-5) de la institución educativa Teófilo Roberto potes del Distrito de Buenaventura* [Universida del Valle Sede Pacifico]. https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/handle/10893/13048/0593814.pdf;jsessionid=19396E2AA8DE192EEEF971407C290E53?sequence=1

Naciones Unidas. (s.f.). *Educar a niñas, erradicar la pobreza*. https://www.un.org/es/chronicle/article/educar-las-ninas-erradicar-la-pobreza

OCDE. (2016). *Revisión de políticas nacionales de educación. La educación en Colombia*. http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-356787_recurso_1.pdf

Osborne, R., & Gilbert, J. (1979). *A theorical analysis of concepts understanding*.

Oviedo, P. (2014). *Investigaciones y desafíos para la docencia del siglo XXI*. Universidad de la Salle.

Penalva, C., Posadas, J., & Roig, A. (2010). Resolución y planteamiento de problemas: Contextos para el aprendizaje de la probabilidad. *Educación Matemática22*, *3*, 23-54.

Peña, A. (2010). *Enseñanza de la geometría con tic en Educación secundaria obligatoria* [Tesis doctoral.].

PREPRINT

Pérez, I. (2012). *Estudio de las aplicaciones de las cónicas mediado por la modelación desde una visión analítica*. Universidad Nacional de Colombia.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., & Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas.* (Primera Edición. Universidad Pedagógica Nacional). Nomos SA. https://books.google.com.co/books?id=Cd1k3PQiAa4C&pg=PA201&lpg=PA201&dq=Los+estudiante+est%C3%A1n+acostumbrados+a+una+matem%C3%A1tica+demostrativa,+de+ejemplificaci%C3%B3n,&source=bl&ots=ca-YAJ1M6C&sig=ACfU3U2M_YgSC5J7UYoUG16fFQzHEpWqeA&hl=es&sa=X&ved=2ahUKEwiBi5H3qeHoAhUhn-AKHeKjCl8Q6AEwAHoECAwQKw#v=onepage&q=Los%20estudiante%20est%C3%A1n%20acostumbrados%20a%20una%20matem%C3%A1tica%20demostrativa%2C%20de%20ejemplificaci%C3%B3n%2C&f=false

Posner, G., & Gertzog, W. (1982). The clinical interview and the measurement of conceptual change. *Science Education*, *66*(2), 195-209.

Prat. (2015). Extensión del modelo van Hiele al concepto de área de una figura plana. *Universidad de Antioquia. Universidad EAIT*.

Puerta, F., Asmar, A., & Asmar, C. (2006). *Semillero UN. Matemáticas básicas* (Universidad Nacional).

Quintero, & Jerez. (2019). Las TIC para la Enseñanza de la Matemática en Educación Media. *Revista Electrónica de Ciencia y Tecnología*.

Rivera, J., Rivera, F., & Benavidez, I. (2017). *Validación de estrategias metodológicas que faciliten el desarrollo del contenido la parábola, con estudiantes de undécimo grado del Centro Escolar Amigos de Alemania, comunidad Casa Blanca, municipio Pueblo Nuevo, departamento de Estelí, en el segundo semestre del año 2017*. Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua.

Rodríguez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometría dinámica. *Universidad de Valencia. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM*, 27-44.

Rueda, L. (2004). Consideraciones éticas en el desarrollo de investigaciones que involucran a seres humanos como sujetos de investigación. Las investigaciones en terapia ocupacional. *Revista Chilena de Terapia Ocupacional*, *4*, 19-24. https://doi.org/10.5354/0719-5346.2010.158

Ruiz, A. (2016). *Importancia de las matemáticas en la educación*. rededuca.net/importancia-de-las-matematicas-en-educacion.

Ruiz, J. (2013). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la parábola como lugar geométrico en el grado décimo de la institución educativa Luis López De Mesa del municipio de Medellín* [Maestría en enseñanza de las ciencias exactas y naturales, Universidad Nacional de Colombia]. http://bdigital.unal.edu.co/39411/1/71370949.2014.pdf

REPOSITORIO

Ruiz, M., Ávila, P., & Villa, J. (2013). *Uso de Geogebra como herramienta didáctica dentro del aula de matemáticas*.

Sánchez, E. (2015). Algunas dificultades de aprendizaje presentes en el estudio de la parábola en un grupo de estudiantes de grado once del Colegio María Cano J.T. *Encuentro Distrital de Educación Matemática EDEM.*, *2*.

Santa, Z. (2011). *La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de van Hiele* [Universidad de Antioquia]. http://bibliotecadigital.udea.edu.co/handle/10495/7100

Santa, Z., & Jaramillo, C. (2007). Construcción de las secciones cónicas mediante el doblado de papel en el marco del modelo educativo de van Hiele. *X Encuentro Colombiano de Matemáticas Educativa. Universidad de Antioquia.*

Sarton, G. (1980). *Ciencia antigua y civilización moderna*.

Shardakov, M. (1968). *Desarrollo del pensamiento en el escolar*. Editorial Grijalbo.

Sucerquia, E., Londoño, R., & Jaramillo, C. (2013). El teorema Fundamental del Cálculo en la Educación a Distancia Online. *VI Congreso Internacional de Ensino da Matemática – CIEM - ULBRA Canos /RS - Brasil*. http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/1280/648.

Sucerquia, & Londoño. (2015). La entrevista de carácter socrático como una estrategia para producir conocimiento matemático en educación a distancia online. *Conferencia interamericana de Educación Matemática CIAEM, At Mexico*. https://www.researchgate.net/publication/294089123_La_entrevista_de_carac

REPOSITORIO

ter_socratico_como_una_estrategia_paraproducir_conocimiento_matematico_en_educacion_a_distancia_online

Toranzos, F. (1965). *Enseñanza de la Matemática*. Editorial Kapelusz.

UNESCO. (s. f.). *La educación transforma vidas.* https://es.unesco.org/themes/education

Van Engen, H. (1953). *He formationof concepts. En: Thelearnignof Mathematics*. Twenty-first Yearbook of National Council of Teachers of Mathematics.

Vargas, G., & Gamboa, R. (2013). *El modelo de van Hiele y la enseñanza de la geometría*. Universidad Nacional (UNA).

Vargas, J. (2013). *Un viaje por la historia de algunas ecuaciones algebraicas y su enseñanza en la escuela.* [Maestría en cuencias exactas y naturales]. Universidad Nacional de Colombia.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. Trillas.

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 107-122.

Weil, P. (1997). *Holística: Una nueva visión y abordaje de lo real* (Segunda edición). Editorial San Pablo.

Zabalza. (2017). *Didáctica de la educación infantil*. Santiago de Compostela.

REPOSITORIO

ANEXOS

RED-UMECIT

Anexo A. Matriz de análisis de los aspectos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico

Autor: William Eduardo Calderón Gualdrón

Documento analizado _____ Fecha de análisis_____

Nombre del analista: _____

Criterio	**Cita del documento**
Sección A. Concepto de recta real	
1. Contenido asociado a la definición de recta	
2. Contenidos asociados a las características de la recta	
3. Contenidos asociados a los elementos de la recta	
4. Contenidos asociados a la representación de la recta	
5. Contenidos asociados a la clasificación geométrica la recta	
6. Contenidos asociados a la representación geométrica de la recta	
7. Contenidos asociados a la distinción entre segmento y recta	
8. Contenidos asociados a la uubicación de puntos en la recta	
Sección B. Concepto de secciones cónicas	
9. Contenidos asociados a la definición de cónica	
10. Contenidos asociados a las propiedades de las secciones cónicas	
11. Contenidos asociados a la clasificación de las secciones cónicas	
Sección C. Concepto de sistema de coordenadas	
12. Contenidos asociados a la definición de coordenadas cartesianas	
13. Contenidos asociados a la representación en coordenadas polares	
14. Contenidos asociados a la representación en coordenadas cartesianas	
15. Contenidos asociados a la transformación de coordenadas polares a cartesianas.	
Sección D. Concepto de función	
16. Contenidos asociados al concepto de función	
17. Contenidos asociados a la clasificación de las funciones	
18. Contenidos asociados a las operaciones entre funciones	
19. Contenidos asociados a la representación gráfica de las funciones	
20. Contenidos asociados a la familia de funciones	

Anexo B. Matriz de análisis tipo de pensamiento (geométrico, numérico, variacional y métrico)

Autor: William Eduardo Calderón Gualdrón

Documento analizado _____**Fecha de análisis**_____

Nombre del analista: _____

Criterio	**Cita del documento**
Sección A. Aspectos asociados al pensamiento geométrico	
1. Características de los elementos que componen un lugar geométrico	
2. Características de los triángulos	
3. Características y diferencias entre segmento de recta y recta	
4. Representación de puntos en el plano.	
Sección B. Aspectos asociados al pensamiento variacional	
5. Elementos básicos que componen la mediatriz.	
6. Elementos básicos que componen un lugar geométrico.	
7. Descripción de la representación gráfica de un lugar geométrico	
8. Variación de un punto con respecto a una recta.	
Sección C. Aspectos asociados al pensamiento numérico	
9. Representación aritmética de la recta	
10. Operaciones básicas con números reales	
Sección D. Aspectos asociados al pensamiento métrico	
11. Determina la medida de un segmento de recta	
12. Representación de segmentos de igual mediada.	

REDIAT

Anexo C. Matriz de análisis de los aspectos referidos a los objetos matemáticos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico

Autor: William Eduardo Calderón Gualdrón

Documento analizado _____**Fecha de análisis**_____

Nombre del analista: _____

Criterio	**Cita del documento**
Sección A. Elementos geométricos no definido	
1. El punto como concepto no definida	
2. La recta como concepto no definida.	
3. El plano como concepto no definida	
Sección B. Distancia entre distintos elementos del plano	
4. Distancia entre dos puntos	
5. Representación gráfica de la distancia entre dos puntos.	
6. Distancia entre todos los puntos de una circunferencia y su centro.	
7. Propiedades de la mediatriz como lugar geométrico.	
Sección C Congruencia de triángulos	
8. Medida de los lados de un triángulo	
9. Líneas notables del triángulo.	
10. Descripción de la congruencia de dos triángulos	
11. Criterios de congruencia entre triángulos.	
Sección D. Representación gráfica de un lugar geométrico	
12. Representación gráfica de la circunferencia como lugar geométrico	
13. Representación gráfica de la mediatriz como lugar geométrico	

PREPRINT

Anexo D. Matriz de análisis de los niveles de razonamiento según el modelo de van Hiele

Autor: William Eduardo Calderón Gualdrón

Documento analizado _____**Fecha de análisis**_____

Nombre del analista: _____

Criterio	**Cita del documento**
Sección A. Nivel-0 Predescriptivo	
1. Percibe un punto como un concepto no definido.	
2. Percibe una recta como un concepto no definida.	
3. Percibe un plano como un concepto no definido	
4. Representa puntos en el plano cartesiano	
Sección B. Nivel -I Reconocimiento visual	
5. Identifica cuando dos rectas son paralelas	
6. Identifica cuando dos rectas son perpendiculares	
Sección C. Nivel -II Análisis	
7. Percibe la representación gráfica de la circunferencia como un lugar geométrico	
8. Percibe la representación gráfica de la mediatriz como un lugar geométrico.	
Sección D. Nivel –III Clasificación	
9. Establece la condición de un punto para pertenecer a la parábola como lugar geométrico.	

REDIUMECIT

Anexo E. Matriz de análisis de los aspectos referidos a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico

Autor: **William Eduardo Calderón Gualdrón**

Documento analizado _____ **Fecha de análisis**_____

Nombre del analista: _____

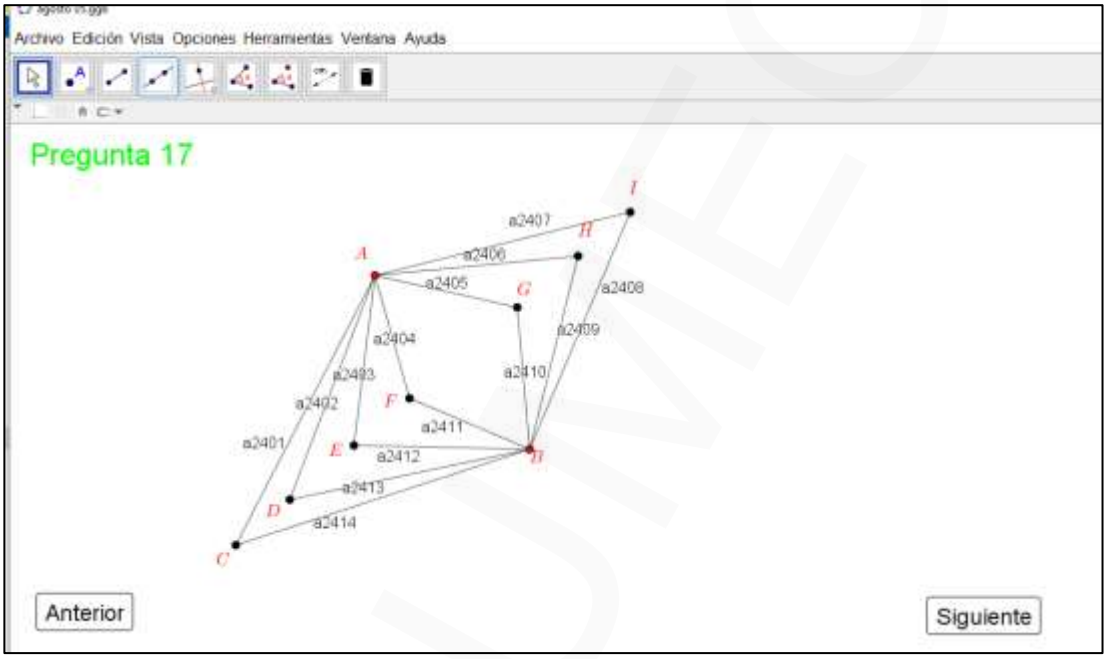
Criterio	**Cita del documento**
Sección A. Construcción de Polígonos regulares	
1. Determina las condiciones bajo las cuales dos lados de un polígono son paralelos o perpendiculares	
2. Halla la distancia entre cada uno de los puntos de un polígono	
3. Encuentra el conjunto de puntos que están a la misma distancia de dos puntos fijos.	
4. Ubica algunos puntos que satisfacen ciertas propiedades.	
Sección B. Función cuadrática representación gráfica	
5. Describe la parábola como un conjunto infinito de puntos que cumplen una condición especifica.	
6. Propiedades de la parábola	
Sección C. Trayectorias y desplazamientos:	
7. Representación gráfica en el plano de diversos desplazamientos.	
8. Análisis de las propiedades de la parábola.	
Sección D. Posiciones de una recta y una circunferencia	
9. Ubica algunos puntos que satisfacen la propiedad de ser lugares geométricos.	

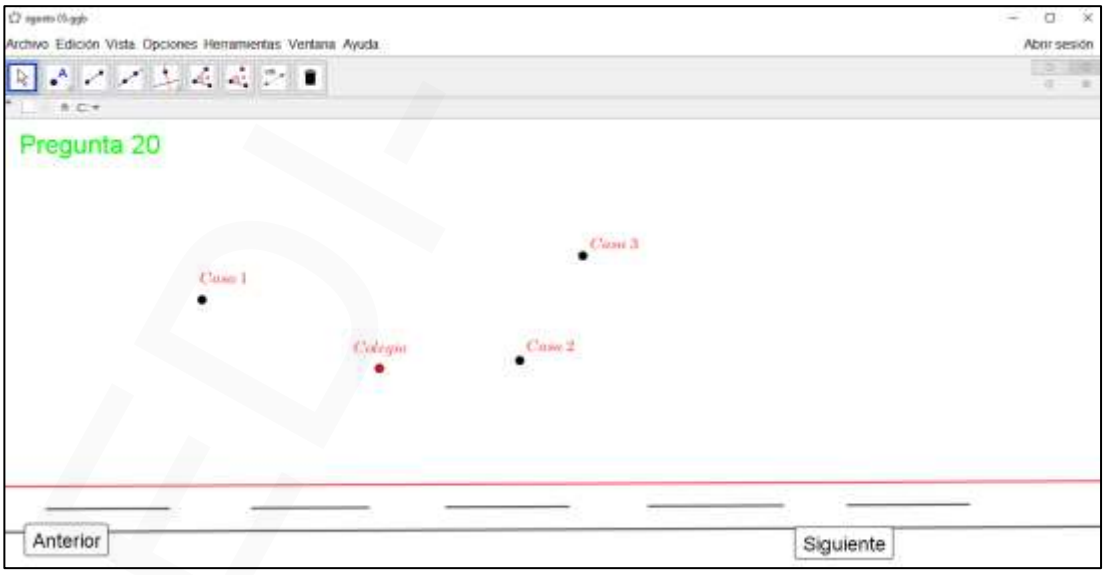
PREPRINT

Anexo F. Versión preliminar de la entrevista Socrática

Autor: William Eduardo Calderón Gualdrón

Muestra de la versión preliminar de la entrevista socrática.





Anexo G. Validación por expertos del instrumento aspectos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico

Apreciado colega:

El instrumento que se presenta a continuación, forma parte de una investigación a nivel doctoral que pretende analizar los EBCM y los DBA para los grados de sexto a undécimo generados por el MEN, para identificar **aquellas unidades de aprendizaje relacionadas con los aspectos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico**. Se entiende por "aspectos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico" al lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia, de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta. Los aspectos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico se agrupan cuatro dimensiones ellas son: Concepto de recta, Concepto de secciones cónicas, Concepto de Coordenadas polares y cartesianas, Concepto de función, a continuación, se define cada una de ellas.

- **Concepto de lugar geométrico:** Se denomina lugar geométrico al conjunto de los puntos del plano que satisfacen una determinada propiedad. Dicha propiedad se enuncia habitualmente en términos de distancias a puntos o rectas.

- **Concepto de secciones cónicas:** Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya relación de distancias a un punto y una recta fijos es constante. El punto fijo se llama foco, la recta fija directriz y la relación constante excentricidad.

- **Concepto de Sistema de Coordenadas:** un sistema de coordenadas es un sistema que utiliza uno o más números (coordenadas) para determinar unívocamente la posición de un punto u objeto geométrico.

- **Concepto de recta:** Involucra todos los contenidos donde se define la recta como línea continuada que se extiende en una misma dirección, o de manera similar.

De acuerdo a lo anterior y con base en su experticia en temas relacionados con los propósitos del instrumento, se solicita de manera atenta pueda considerar realizar la validación respectiva del instrumento descrito. Por favor, lea cuidadosamente cada pregunta y coloque una X en la casilla correspondiente a la dimensión a la cual usted considere éste pertenece. Debajo de cada grupo de preguntas hay un espacio para observaciones en el cual podrá plasmar sugerencias relativas a la redacción, contenido o cualquier otro aspecto que usted estime pertinente para mejorar el instrumento.

Agradecemos de antemano su valiosa colaboración.

PROYECTO

Índice de validez por expertos del instrumento aspectos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico

Instrumento N° 1. Matriz de análisis de los aspectos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico					
Ítem	**Experto 1 Gutiérrez**	**Experto 2 Valderrama**	**Experto 3 Moreno**	**Investigador**	**Acuerdo**
1(6)	**RR**	**RR**	**RR**	**RR**	1
2(9)	**SC**	**SC**	**SC**	**SC**	1
3(12)	**SCo**	**CF**	**CF**	**SCo**	0
4(1)	**RR**	**RR**	**RR**	**RR**	1
5(2)	**RR**	**RR**	**RR**	**RR**	1
6(13)	**SCo**	**SCo**	**SCo**	**SCo**	1
7(16)	**SCo**	**SCo**	**CF**	**CF**	0
8(10)	**SC**	**SC**	**SC**	**SC**	1
9(14)	**SCo**	**SCo**	**SCo**	**SCo**	1
10(15)	**SCo**	**SCo**	**SCo**	**SCo**	1
11(3)	**RR**	**RR**	**RR**	**RR**	1
12(8)	**RR**	**RR**	**RR**	**RR**	1
13(17)	**CF**	**CF**	**CF**	**CF**	1
14(18)	**CF**	**CF**	**CF**	**CF**	1
15(4)	**RR**	**RR**	**RR**	**RR**	1
16(11)	**SC**	**SC**	**SC**	**SC**	1
17(5)	**RR**	**RR**	**RR**	**RR**	1
18(19)	**CF**	**CF**	**CF**	**CF**	1
19(20)	**CF**	**CF**	**CF**	**CF**	1
20(7)	**RR**	**RR**	**RR**	**RR**	1
				Total	18
				Índice	18/20 = 0,9

Fuente elaboración propia a partir de las preguntas de la entrevista inicial

REDIN

Constancia de validación del instrumento aspectos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico

Yo, **Juddy Amparo Valderrama Moreno,** identificada con cédula de ciudadanía número 37747090 Licenciada en matemáticas, Especialista en Educación Matemática, Magíster en Educación, candidata a doctora en Educación y ejerciendo actualmente como profesor de matemáticas, en el colegio técnico Vicente Azuero (Florida Blanca -Santander, y profesor hora catedra de la Universidad Industrial de Santander (Bucaramanga/Santander) hago constar que he revisado, con fines de validación, el instrumento **aspectos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico** diseñado por el investigador William Eduardo Calderón Gualdrón , y luego de hacer las observaciones pertinentes, puedo formular las siguientes apreciaciones:

	Deficiente	Aceptable	Excelente
Congruencia ítem- dimensión			x
Amplitud de contenidos			x
Redacción de las preguntas			x
Precisión de las preguntas			x
Ortografía			x
Presentación			x

Es un instrumento adecuado y pertinente, se entiende con claridad el objetivo que persigue.

En la ciudad de Bucaramanga, a los 25 días del mes 09 de 2020.

_____

Firma del experto validador

REDINET

Constancia de validación del instrumento aspectos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico

Yo, **Alba Soraida Gutiérrez Sierra,** identificada con cédula de ciudadanía número 46.381.348 de profesión profesor del área de matemáticas, Especialista en Educación Matemática, Magíster en Educación, candidata a doctora en Educación y ejerciendo actualmente como profesor en matemáticas , en la institución Educativa Técnica Vicente Azuero (Florida Blanca -Santander, y profesor hora catedra de la Universidad Industrial de Santander (UIS) (Bucaramanga/Santander) hago constar que he revisado, con fines de validación, el instrumento **aspectos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico** diseñado por el investigador William Eduardo Calderón Gualdrón , y luego de hacer las observaciones pertinentes, puedo formular las siguientes apreciaciones:

	Deficiente	Aceptable	Excelente
Congruencia ítem- dimensión			x
Amplitud de contenidos			x
Redacción de las preguntas			x
Precisión de las preguntas s			x
Ortografía			x
Presentación			x

Es un instrumento adecuado y pertinente, se entiende con claridad el objetivo que persigue.

En la ciudad de Bucaramanga, a los 25 días del mes 09 de 2020.

Alba Soraida Gutierrez Sierra

_____

Firma del experto validador

REDINCIT

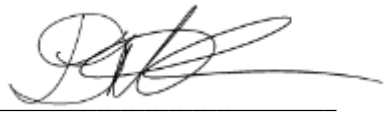
Constancia de validación del instrumento aspectos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico

Yo, **Daniel Moreno Caicedo,** identificado con cédula de ciudadanía número 91237310 Licenciado en matemáticas, Especialista en Educación Matemática, Magíster en Educación Matemática, y ejerciendo actualmente como profesor de matemáticas, en el Colegio Técnico Vicente Azuero (Florida Blanca –Santander), y profesor hora catedra en la Universidad Industrial de Santander (UIS) (Bucaramanga/Santander) hago constar que he revisado, con fines de validación, el instrumento **aspectos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico** diseñado por el investigador William Eduardo Calderón Gualdrón , y luego de hacer las observaciones pertinentes, puedo formular las siguientes apreciaciones:

	Deficiente	Aceptable	Excelente
Congruencia ítem- dimensión			x
Amplitud de contenidos			x
Redacción de las preguntas			x
Precisión de las preguntas s			x
Ortografía			x
Presentación			x

Es un instrumento es adecuado y pertinente, se entiende con claridad el objetivo que persigue.

En la ciudad de Bucaramanga, a los 25 días del mes 09 de 2020.



Firma del experto validador

REDUNET

Anexo H. Validación por expertos de la Matriz de Análisis, tipo de pensamiento (geométrico, numércio, variacional y métrico)

Instrumento N° 3. Matriz de análisis, tipo de pensamiento					
Ítem	**Experto 1 Moreno**	**Experto 2 Valderrama**	**Experto 3 Gutiérrez**	**Investigador**	**Acuerdo**
1(5)	**PV**	**PV**	**PV**	**PV**	1
2(9)	**PN**	**PN**	**PN**	**PN**	1
3(6)	**PV**	**PV**	**PV**	**PV**	1
4(4)	**PG**	**PG**	**PG**	**PG**	1
5(7)	**PV**	**PV**	**PV**	**PV**	1
6(3)	**PG**	**PG**	**PG**	**PG**	1
7(10)	**PN**	**PN**	**PN**	**PN**	1
8(2)	**PG**	**PG**	**PG**	**PG**	1
9(11)	**PM**	**PM**	**PM**	**PM**	1
10(12)	**PM**	**PM**	**PM**	**PM**	1
11(1)	**PG**	**PG**	**PG**	**PG**	1
12(8)	**PV**	**PV**	**PV**	**PV**	1
				Total	12
				Índice	12/12=1

Fuente elaboración propia

RED-UNIT

Constancia de validación del instrumento tipo de pensamiento (geométrico, numérico, variacional y métrico)

Yo, **Juddy Amparo Valderrama Moreno,** identificada con cédula de ciudadanía número 37747090 Licenciada en matemáticas, Especialista en Educación Matemática, Magíster en Educación, candidata a doctora en Educación y ejerciendo actualmente como profesor de matemáticas, en el colegio técnico Vicente Azuero (Florida Blanca -Santander, y profesor hora catedra de la Universidad Industrial de Santander (Bucaramanga/Santander) hago constar que he revisado, con fines de validación, el instrumento **tipo de pensamiento (geométrico, numérico, variacional y métrico)** diseñado por el investigador William Eduardo Calderón Gualdrón , y luego de hacer las observaciones pertinentes, puedo formular las siguientes apreciaciones:

	Deficiente	Aceptable	Excelente
Congruencia ítem- dimensión			x
Amplitud de contenidos			x
Redacción de las preguntas			x
Precisión de loas preguntas			x
Ortografía			x
Presentación			x

Es un instrumento adecuado y pertinente, se entiende con claridad el objetivo que persigue.

En la ciudad de Bucaramanga, a los 25 días del mes 09 de 2020.

_____

Firma del experto validador

REDINET

Constancia de validación del instrumento tipo de pensamiento (geométrico, numérico, variacional y métrico)

Yo, **Alba Soraida Gutiérrez Sierra,** identificada con cédula de ciudadanía número 46.381.348 profesión profesor del área de matemáticas, Especialista en Educación Matemática, Magíster en Educación, candidata a doctora en Educación y ejerciendo actualmente como profesor en matemáticas , en la institución Educativa Técnica Vicente Azuero (Florida Blanca -Santander, y profesor hora catedra de la Universidad Industrial de Santander (UIS) (Bucaramanga/Santander) hago constar que he revisado, con fines de validación, el instrumento **tipo de pensamiento (geométrico, numérico, variacional y métrico)** diseñado por el investigador William Eduardo Calderón Gualdrón , y luego de hacer las observaciones pertinentes, puedo formular las siguientes apreciaciones:

	Deficiente	Aceptable	Excelente
Congruencia ítem- dimensión			x
Amplitud de contenidos			x
Redacción de las preguntas			x
Precisión de las preguntas			x
Ortografía			x
Presentación			x

Es un instrumento adecuado y pertinente, se entiende con claridad el objetivo que persigue.

En la ciudad de Bucaramanga, a los 25 días del mes 09 de 2020.

Alba Soraida Gutierrez Sierra

_____

Firma del experto validador

REPUNCIT

Constancia de validación del instrumento tipo de pensamiento (geométrico, numérico, variacional y métrico)

Yo, **Daniel Moreno Caicedo,** identificado con cédula de ciudadanía número 91237310 Licenciado en matemáticas, Especialista en Educación Matemática, Magíster en Educación Matemática, y ejerciendo actualmente como profesor en matemáticas, en el Colegio Técnico Vicente Azuero (Florida Blanca -Santander, y profesor hora catedra de la Universidad Industrial de Santander (UIS) (Bucaramanga/Santander) hago constar que he revisado, con fines de validación, el instrumento **tipo de pensamiento (geométrico, numérico, variacional y métrico)** diseñado por el investigador William Eduardo Calderón Gualdrón , y luego de hacer las observaciones pertinentes, puedo formular las siguientes apreciaciones:

	Deficiente	Aceptable	Excelente
Congruencia ítem- dimensión			x
Amplitud de contenidos			x
Redacción de las preguntas			x
Precisión de las preguntas			x
Ortografía			x
Presentación			x

Es un instrumento adecuado y pertinente, se entiende con claridad el objetivo que persigue.

En la ciudad de Bucaramanga, a los 25 días del mes 09 de 2020.



Firma del experto validador

PREPRINT

Anexo I. Matriz de análisis de los aspectos referidos a los objetos matemáticos asociados al concpeto de parábola como lugar geométrico.

Instrumento N°4. Matriz de análisis de los aspectos referidos a los objetos matemáticos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico					
Ítem	**Experto 1 Moreno**	**Experto 2 Valderrama**	**Experto 3 Gutiérrez**	**Investigador**	**Acuerdo**
1(3)	**EG**	**EG**	**EG**	**EG**	1
2(7)	**DP**	**CT**	**CT**	**DP**	0
3(6)	**DP**	**DP**	**DP**	**DP**	1
4(8)	**CT**	**CT**	**CT**	**CT**	1
5(1)	**EG**	**EG**	**EG**	**EG**	1
6(9)	**CT**	**CT**	**CT**	**CT**	1
7(11)	**CT**	**CT**	**CT**	**CT**	1
8(10)	**CT**	**CT**	**CT**	**CT**	1
9(5)	**DP**	**DP**	**DP**	**DP**	1
10(13)	**RG**	**RG**	**RG**	**RG**	1
11(12)	**RG**	**RG**	**RG**	**RG**	1
12(4)	**DP**	**DP**	**DP**	**DP**	1
13(2)	**EG**	**EG**	**EG**	**EG**	1
				Total	12
				Índice	12/13=0,92

Fuente elaboración propia

Constancia de validación del instrumento aspectos referidos a los objetos matemáticos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico

RED-UNET

Yo, **Juddy Amparo Valderrama Moreno,** identificada con cédula de ciudadanía número 37747090 Licenciada en matemáticas, Especialista en Educación Matemática, Magíster en Educación, candidata a doctora en Educación y ejerciendo actualmente como profesor de matemáticas, en el colegio técnico Vicente Azuero (Florida Blanca -Santander, y profesor hora catedra de la Universidad Industrial de Santander (Bucaramanga/Santander) hago constar que he revisado, con fines de validación, el instrumento **aspectos referidos a los objetos matemáticos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico** diseñado por el investigador

William Eduardo Calderón Gualdrón , y luego de hacer las observaciones pertinentes, puedo formular las siguientes apreciaciones:

	Deficiente	Aceptable	Excelente
Congruencia ítem- dimensión			x
Amplitud de contenidos			x
Redacción de las preguntas			x
Precisión de las preguntas			x
Ortografía			x
Presentación			x

Es un instrumento adecuado y pertinente, se entiende con claridad el objetivo que persigue.

En la ciudad de Bucaramanga, a los 25 días del mes 09 de 2020.

_____

Firma del experto validador

REDIMEN

Constancia de validación del instrumento aspectos referidos a los objetos matemáticos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico

Yo, **Alba Soraida Gutiérrez Sierra,** identificada con cédula de ciudadanía número 46.381.348 profesión profesor del área de matemáticas, Especialista en Educación Matemática, Magíster en Educación, candidata a doctora en Educación y ejerciendo actualmente como profesor en matemáticas , en la institución Educativa Técnica Vicente Azuero (Florida Blanca -Santander, y profesor hora catedra de la Universidad Industrial de Santander (UIS) (Bucaramanga/Santander) hago constar que he revisado, con fines de validación, el instrumento **aspectos referidos a los objetos matemáticos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico** diseñado por el investigador William Eduardo Calderón Gualdrón , y luego de hacer las observaciones pertinentes, puedo formular las siguientes apreciaciones:

	Deficiente	Aceptable	Excelente
Congruencia ítem- dimensión			x
Amplitud de contenidos			x
Redacción de las preguntas			x
Precisión de las preguntas			x
Ortografía			x
Presentación			x

Es un instrumento adecuado y pertinente, se entiende con claridad el objetivo que persigue.

En la ciudad de Bucaramanga, a los 25 días del mes 09 de 2020.

Alba Soraida Gutierrez Sierra

_____

Firma del experto validador

REPUNOT

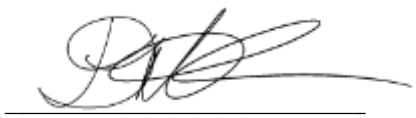
Constancia de validación del instrumento aspectos referidos a los objetos matemáticos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico

Yo, **Daniel Moreno Caicedo,** identificado con cédula de ciudadanía número 91237310 Licenciado en matemáticas, Especialista en Educación Matemática, Magíster en Educación Matemática, y ejerciendo actualmente como profesor en matemáticas, en el Colegio Técnico Vicente Azuero (Florida Blanca -Santander, y profesor hora catedra de la Universidad Industrial de Santander (UIS) (Bucaramanga/Santander) hago constar que he revisado, con fines de validación, el instrumento **aspectos referidos a los objetos matemáticos asociados al concepto de parábola como lugar geométrico** diseñado por el investigador William Eduardo Calderón Gualdrón , y luego de hacer las observaciones pertinentes, puedo formular las siguientes apreciaciones:

	Deficiente	Aceptable	Excelente
Congruencia ítem- dimensión			x
Amplitud de contenidos			x
Redacción de las preguntas			x
Precisión de las preguntas			x
Ortografía			x
Presentación			x

Es un instrumento adecuado y pertinente, se entiende con claridad el objetivo que persigue.

En la ciudad de Bucaramanga, a los 25 días del mes 09 de 2020.



Firma del experto validador

REDINET

Anexo J. Validación por expertos de la Matriz de análisis de los niveles de razonamiento según el modelo de van Hiele

Instrumento N°5. Matriz de análisis de los niveles de razonamiento según el modelo de van Hiele					
Ítem	**Experto 1 Moreno**	**Experto 2 Valderrama**	**Experto 3 Gutiérrez**	**Investigador**	**Acuerdo**
1(3)	**P**	**P**	**P**	**P**	1
2(4)	**P**	**P**	**P**	**P**	1
3(7)	**A**	**A**	**A**	**A**	1
4(8)	**A**	**A**	**A**	**A**	1
5(2)	**P**	**P**	**P**	**P**	1
69()	**C**	**C**	**C**	**C**	1
7(5)	**RV**	**RV**	**RV**	**RV**	1
8(6)	**A**	**RV**	**A**	**RV**	0
9(1)	**P**	**P**	**P**	**P**	1
				Total	8
				Índice	8/9=0,89

Fuente elaboración propia

RED-UNIT

Constancia de validación del instrumento niveles de razonamiento según el modelo de van Hiele

Yo, **Juddy Amparo Valderrama Moreno,** identificada con cédula de ciudadanía número 37747090 Licenciada en matemáticas, Especialista en Educación Matemática, Magíster en Educación, candidata a doctora en Educación y ejerciendo actualmente como profesor de matemáticas, en el colegio técnico Vicente Azuero (Florida Blanca -Santander, y profesor hora catedra de la Universidad Industrial de Santander (Bucaramanga/Santander) hago constar que he revisado, con fines de validación, el instrumento **niveles de razonamiento según el modelo de van Hiele** diseñado por el investigador William Eduardo Calderón Gualdrón , y luego de hacer las observaciones pertinentes, puedo formular las siguientes apreciaciones:

	Deficiente	Aceptable	Excelente
Congruencia ítem- dimensión			x
Amplitud de contenidos			x
Redacción de las preguntas			x
Precisión de las preguntas			x
Ortografía			x
Presentación			x

Es un instrumento adecuado y pertinente, se entiende con claridad el objetivo que persigue.

En la ciudad de Bucaramanga, a los 25 días del mes 09 de 2020.

_____

Firma del experto validador

REDINCT

Constancia de validación del instrumento niveles de razonamiento según el modelo de van Hiele

Yo, **Alba Soraida Gutiérrez Sierra,** identificada con cédula de ciudadanía número 46.381.348 profesión profesor del área de matemáticas, Especialista en Educación Matemática, Magíster en Educación, candidata a doctora en Educación y ejerciendo actualmente como profesor en matemáticas , en la institución Educativa Técnica Vicente Azuero (Florida Blanca -Santander, y profesor hora catedra de la Universidad Industrial de Santander (UIS) (Bucaramanga/Santander) hago constar que he revisado, con fines de validación, el instrumento **niveles de razonamiento según el modelo de van Hiele** diseñado por el investigador William Eduardo Calderón Gualdrón , y luego de hacer las observaciones pertinentes, puedo formular las siguientes apreciaciones:

	Deficiente	Aceptable	Excelente
Congruencia ítem- dimensión			x
Amplitud de contenidos			x
Redacción de las preguntas			x
Precisión de las preguntas			x
Ortografía			x
Presentación			x

Es un instrumento adecuado y pertinente, se entiende con claridad el objetivo que persigue.

En la ciudad de Bucaramanga, a los 25 días del mes 09 de 2020.

Alba Soraida Gutiérrez Sierra

_____

Firma del experto validador

REDINET

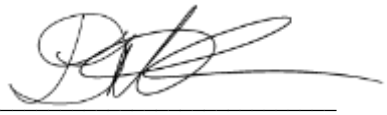
Constancia de validación del instrumento niveles de razonamiento según el modelo de van Hiele

Yo, **Daniel Moreno Caicedo,** identificado con cédula de ciudadanía número 91237310 Licenciado en matemáticas, Especialista en Educación Matemática, Magíster en Educación Matemática, y ejerciendo actualmente como profesor en matemáticas, en el Colegio Técnico Vicente Azuero (Florida Blanca -Santander, y profesor hora catedra de la Universidad Industrial de Santander (UIS) (Bucaramanga/Santander) hago constar que he revisado, con fines de validación, el instrumento **niveles de razonamiento según el modelo de van Hiele** diseñado por el investigador William Eduardo Calderón Gualdrón , y luego de hacer las observaciones pertinentes, puedo formular las siguientes apreciaciones:

	Deficiente	Aceptable	Excelente
Congruencia ítem- dimensión			x
Amplitud de contenidos			x
Redacción de las preguntas			x
Precisión de las preguntas			x
Ortografía			x
Presentación			x

Es un instrumento adecuado y pertinente, se entiende con claridad el objetivo que persigue.

En la ciudad de Bucaramanga, a los 25 días del mes 09 de 2020.



Firma del experto validador

REDIMEN

Anexo K. Matriz de análisis de los aspectos referidos a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico

Instrumento N°6 Matriz de análisis de los aspectos referidos a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico					
Ítem	**Experto 1 Moreno**	**Experto 2 Valderrama**	**Experto 3 Gutiérrez**	**Investigador**	**Acuerdo**
1(1)	**PR**	**PR**	**PR**	**PR**	1
2(5)	**FC**	**FC**	**FC**	**FC**	1
3(6)	**FC**	**FC**	**FC**	**FC**	1
4(7)	**TD**	**TD**	**TD**	**TD**	1
5(9)	**RYC**	**RYC**	**RYC**	**RYC**	1
6(4)	**FC**	**PR**	**FC**	**PR**	0
7(3)	**PR**	**PR**	**PR**	**PR**	1
8(8)	**TD**	**TD**	**TD**	**TD**	1
9(2)	**PR**	**PR**	**PR**	**PR**	1
				Total	9
				Índice	8/9=0,89

Fuente elaboración propia a partir de las preguntas de la entrevista inicial

RED-UNET

Constancia de validación del instrumento aspectos referidos a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico

Yo, **Juddy Amparo Valderrama Moreno,** identificada con cédula de ciudadanía número 37747090 Licenciada en matemáticas, Especialista en Educación Matemática, Magíster en Educación, candidata a doctora en Educación y ejerciendo actualmente como profesor de matemáticas, en el colegio técnico Vicente Azuero (Florida Blanca -Santander, y profesor hora catedra de la Universidad Industrial de Santander (Bucaramanga/Santander) hago constar que he revisado, con fines de validación, el instrumento **aspectos referidos a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico** diseñado por el investigador William Eduardo Calderón Gualdrón , y luego de hacer las observaciones pertinentes, puedo formular las siguientes apreciaciones:

	Deficiente	Aceptable	Excelente
Congruencia ítem- dimensión			x
Amplitud de contenidos			x
Redacción de las preguntas			x
Precisión de las preguntas			x
Ortografía			x
Presentación			x

Es un instrumento adecuado y pertinente, se entiende con claridad el objetivo que persigue.

En la ciudad de Bucaramanga, a los 25 días del mes 09 de 2020.

_____

Firma del experto validador

REPOSITORIO

Constancia de validación del instrumento aspectos referidos a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico

Yo, **Alba Soraida Gutiérrez Sierra,** identificada con cédula de ciudadanía número 46.381.348 profesión profesor del área de matemáticas, Especialista en Educación Matemática, Magíster en Educación, candidata a doctora en Educación y ejerciendo actualmente como profesor en matemáticas , en la institución Educativa Técnica Vicente Azuero (Florida Blanca -Santander, y profesor hora catedra de la Universidad Industrial de Santander (UIS) (Bucaramanga/Santander) hago constar que he revisado, con fines de validación, el instrumento **aspectos referidos a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico** diseñado por el investigador William Eduardo Calderón Gualdrón , y luego de hacer las observaciones pertinentes, puedo formular las siguientes apreciaciones:

	Deficiente	Aceptable	Excelente
Congruencia ítem- dimensión			x
Amplitud de contenidos			x
Redacción de las preguntas			x
Precisión de las preguntas			x
Ortografía			x
Presentación			x

Es un instrumento adecuado y pertinente, se entiende con claridad el objetivo que persigue.

En la ciudad de Bucaramanga, a los 25 días del mes 09 de 2020.

Alba Soraida Gutierrez Sierra

_____

Firma del experto validador

REPUBLICA

Constancia de validación del instrumento aspectos referidos a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico

Yo, **Daniel Moreno Caicedo,** identificado con cédula de ciudadanía número 91237310 Licenciado en matemáticas, Especialista en Educación Matemática, Magíster en Educación Matemática, y ejerciendo actualmente como profesor en matemáticas, en el Colegio Técnico Vicente Azuero (Florida Blanca -Santander, y profesor hora catedra de la Universidad Industrial de Santander (UIS) (Bucaramanga/Santander) hago constar que he revisado, con fines de validación, el instrumento **aspectos referidos a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico** diseñado por el investigador William Eduardo Calderón Gualdrón , y luego de hacer las observaciones pertinentes, puedo formular las siguientes apreciaciones:

	Deficiente	Aceptable	Excelente
Congruencia ítem- dimensión			x
Amplitud de contenidos			x
Redacción de las preguntas			x
Precisión de las preguntas			x
Ortografía			x
Presentación			x

Es un instrumento adecuado y pertinente, se entiende con claridad el objetivo que persigue.

En la ciudad de Bucaramanga, a los 25 días del mes 09 de 2020.



Firma del experto validador

REPOSITORIO

Anexo L. Constancias de validación por expertos

UNIVERSIDAD METROPOLITANA DE EDUCACION, CIENCIA Y TECNOLOGIA
Decreto Ejecutivo 575 del 21 de julio de 2004
Acreditada mediante Resolución N°15 del 31 de octubre de 2012
Escala de actitudes hacia la investigación

Constancia de validación

Yo, Sandra Milena Zapata, identificada con cédula de ciudadanía número 32140410 de profesión DOCENTE, y ejerciendo actualmente como docente tutora y de cátedra en las instituciones Cristo Rey y Universidad de Antioquia hago constar que he revisado, con fines de validación, la entrevista de carácter socrático con software dinámico, que permite evaluar la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, a partir del modelo de van Hiele diseñado por el investigador William Eduardo Calderón Gualdrón y luego de hacer las observaciones pertinentes, puedo formular las siguientes apreciaciones:

	Deficiente	Aceptable	Excelente
Congruencia ítem- dimensión			X
Amplitud de contenidos			X
Redacción de los ítems		X	
Precisión de los ítems			X
Ortografía			X
Presentación			X

En la ciudad de Medellín, a los 17 días del mes noviembre de 2020.

Sandra Milena Zapata

Firma del experto validador

REPOSITORIO

UNIVERSIDAD METROPOLITANA DE EDUCACIÓN, CIENCIA Y TECNOLOGÍA
Decreto Ejecutivo 575 del 21 de julio de 2004
Acreditada mediante Resolución N°15 del 31 de octubre de 2012

Escala de actitudes hacia la investigación

Constancia de validación

Yo, EDISON ALBERTO SUCERQUIA VEGA identificado con cédula de ciudadanía nuero 71223062 de profesión DOCTOR EN EDUCACIÓN y ejerciendo actualmente como DOCENTE DE MATEMÁTICAS en la institución UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA hago constar que he revisado, con fines de validación, la entrevista de carácter socrático con software dinámico, que permite evaluar la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, a partir del modelo de van Hiele diseñado por el investigador William Eduardo Calderón Gualdrón y luego de hacer las observaciones pertinentes, puedo formular las siguientes apreciaciones:

	Deficiente	Aceptable	Excelente
Congruencia ítem- dimensión			X
Amplitud de contenidos			X
Redacción de los ítems		X	
Precisión de los ítems			X
Ortografía			X
Presentación			X

En la ciudad de Medellín, a los 10 días del mes noviembre de 2020.

Edison Sucerquia.

Firma del experto validador

REDUCIT

UNIVERSIDAD METROPOLITANA DE EDUCACIÓN, CIENCIA Y TECNOLOGÍA
Decreto Ejecutivo 575 del 21 de julio de 2004
Acreditada mediante Resolución N°15 del 31 de octubre de 2012

Escala de actitudes hacia la investigación

Constancia de validación

Yo, Zaida Margot Santa Ramírez, identificada con cédula de ciudadanía número 32110512, de profesión docente, y ejerciendo actualmente como docente ocasional de tiempo completo, en la institución Tecnológico de Antioquia, hago constar que he revisado, con fines de validación, la entrevista de carácter socrático con software dinámico, que permite evaluar la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, a partir del modelo de van Hiele diseñado por el investigador William Eduardo Calderón Gualdrón y luego de hacer las observaciones pertinentes, puedo formular las siguientes apreciaciones:

	Deficiente	Aceptable	Excelente
Congruencia ítem - dimensión			X
Amplitud de contenidos			X
Redacción de los ítems		X	
Precisión de los ítems		X	
Ortografía			X
Presentación			X

En la ciudad de Medellín, a los 13 días del mes noviembre de 2020.



Zaida Margot Santa Ramírez
Doctora en Educación

REDUCIT

Anexo M. Productos de la investigación

ZW2BFJMX

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN
SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

CONSTANCIA No. 2020-531-B-0000092-01

El Director del Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP) y la Directora de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas (MEM-PUCP) dejan constancia que:

WILLIAM EDUARDO CALDERÓN GUALDRÓN

ha participado como Ponente en el X Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas (X CIEM), realizado en Lima, del 20 al 22 de febrero del 2020.

Reporte de investigación titulado:

Descriptores de nivel de razonamiento de van Hiele, para la comprensión de la parábola como lugar geométrico

Se expide la presente constancia a solicitud del interesado para los fines y usos a que hubiere lugar.

Lima, 22 de febrero del 2020

FRANCISCO JAVIER UGARTE GUERRA
DIRECTOR DEL IREM-PUCP

JESUS VICTORIA FLORES SALAZAR
DIRECTORA DE LA MEM-PUCP

La presente constancia y las firmas consignadas en ella han sido emitidas a través de medios digitales, al amparo de lo dispuesto en el artículo 141-A del Código Civil: "Artículo 141-A.- En los casos en que la ley establezca que la manifestación de voluntad debe hacerse a través de alguna formalidad expresa o requerida de firma, ésta podrá ser generada o comunicada a través de medios electrónicos, ópticos o cualquier otro análogo. Tratándose de instrumentos públicos, la autoridad competente deberá dejar constancia del medio empleado y conservar una versión íntegra para su ulterior consulta."

Verifique la autenticidad de este documento digital desde el enlace: www.pucp.edu.pe/certificaciones

Uptc Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
ACREDITACIÓN INSTITUCIONAL DE ALTA CALIDAD MULTICAMPUS
RESOLUCIÓN 3910 DE 2015 MEN / 6 AÑOS

UNISINOS UNIVATES

Certifican que:

WILLIAM EDUARDO CARDERÓN GUALDRÓN

C.C. 91495767

Participó como:

Ponente

Con la ponencia titulada:

LA ENTREVISTA SOCRÁTICA DINÁMICA: UNA ESTRATEGIA PARA LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO

Código de autenticidad: 20190200100056-100593

en el

Congreso Internacional de
V Investigación y Pedagogía
Escuela, Maestro y Estudio
Perspectivas contemporáneas
la educación y la pedagogía en
el bicentenario de la independencia

OCTUBRE
7 al 11
2019
TUNJA, BOYACÁ, COLOMBIA

MAURA CORCINI LOPES
UNISINOS

JULIO ALDEMAR GÓMEZ C.
Decano Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Maestría en Educación
Maestría en Gestión Educativa
Facultad Ciencias de la Educación



XV CIAEM
Medellín - Colombia
5 - 10 mayo/mai/may 2019
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference on Mathematics Education

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

CERTIFIES THAT:

WILLIAM EDUARDO CALDERÓN GUALDRÓN

co-authored a Communication, La entrevista socrática como medio para detectar el nivel de comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico en el marco del modelo de van Hiele, that was presented at the

XV Inter-American Conference on Mathematics Education
(XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática)

held in Medellín, Antioquia, Colombia, from May 5 to 10, 2019 (46 hours).

Medellín, Colombia, May 10, 2019

Ángel Ruiz President
IACME-CIAEM

JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ

José Alberto Rúa Vásquez
Decano Facultad Ciencias Básicas

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Relme 32
Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa

Universidad de Medellín
Ciencia y Libertad

El Comité Latinoamericano de Matemática Educativa y la Universidad de Medellín
dejan constancia que

WILLIAM EDUARDO CALDERON GUALDRON

D.I. 91495767

ha asistido a la

XXXII REUNIÓN LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA,
realizada en la Universidad de Medellín, Colombia, del 2 al 6 de julio de 2018,
con una duración de 40 horas académicas.

OLGA LIDIA PÉREZ GONZÁLEZ
Presidenta
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

LUZ DORIS BOLIVAR YEPES
Vicerrectora Académica
Universidad de Medellín

LUIS ALBEIRO ZABALA JARAMILLO
Presidente
Comité Organizador - RELME 32

CÓDIGO DE VERIFICACIÓN
2018760IPCRELME32767354A

Vigilada MinEducación

Educación y Humanismo, 23(40), pp.1-25, Enero-Junio, 2021.
DOI: https://doi.org/10.17081/eduhum.23.40.4221

CC BY

EDUCACIÓN Y HUMANISMO

Descriptores para el concepto de parábola en el modelo de Van Hiele

Descriptors for the concept of parable in the Van Hiele model

William Eduardo Calderón-Gualdrón
Universidad Metropolitana de Educación Ciencia y Tecnología, Panamá
René Alejandro Londoño-Cano
Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia

Resumen

El presente artículo se deriva de una investigación a nivel doctoral en el campo de la educación matemática. **Objetivo:** Caracterizar los niveles de razonamiento delmodelo de Van Hiele asociados a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico por parte de estudiantes de décimo grado, haciendo uso del software de geometría dinámica GeoGebra. **Método**: En una primera etapa de la investigación y a partir del análisis del modelo y de la literatura que aborda la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico con el uso de GeoGebra, se formulan descriptores preliminares para los niveles de pensamiento del modelo de Van Hiele, posteriormente se diseña una estrategia orientada por la entrevista socrática mediante la cual se refinan los descriptores para cada nivel. **Resultados:** En el presente artículo se presentan los descriptores que se detectaron en la etapa final de refinamiento de la entrevista socrática. **Discusión y Conclusiones**: Esta investigación valida el modelo de Van Hiele para la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico, mediado por el software de geometría dinámica.

Palabras clave: Descriptores, Entrevista socrática, GeoGebra, Parábola.

Abstract

This article is derived from a doctoral research in the field of mathematical education. **Objective:** to characterize the reasoning levels of the Van Hiele model associated with the understanding of the concept of parabola as a geometric place in tenth-grade students using GeoGebra dynamic geometry software. **Method:** In a first stage of the investigation and from the analysis of the model and of the literature that addresses the teaching of conics as a geometric place with the use of GeoGebra, preliminary descriptors are formulated for the levels of thinking of the Van Hiele model, Subsequently, a strategy oriented by the Socratic interview is designed through which the descriptors for each level are refined. **Results:** This article presentsthe descriptors that were detected in the final stage of refining the Socratic interview.**Discussion and Conclusions:** This research validates the Van Hiele model for the understanding of the concept of parabola as a geometric place, mediated by dynamicgeometry software.

Keywords: Descriptors, Socratic interview, GeoGebra, Parable.

Open Access

ISSN: 2216-0123
E-ISSN: 2665-0428

Editorial:
Fundación Universitaria Católica del Norte

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA
Copyright ©
By Educación y Humanismo

Correspondencia
William Calderón
wilbercalderon@hotmail.com

Recibido: 19-09-2020
Aceptado: 17-12-2020
En línea desde: 24-02-2021

Cómo citar este artículo (APA): Calderón-Gualdrón, W., y Londoño-Cano, R. (2021). Descriptores para el concepto de parábola en el modelo de Van Hiele. *Educación y Humanismo*, 23(40), 1-25. https://doi.org/10.17081/eduhum.23.40.4221

REPOSIT

RED-UWEGIT